



بررسی عددی و تخمین خطا برای معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای مبتنی بر یک عملگر کسری جدید

مجتبی فردی^۱، ابراهیم امینی^۲

(۱) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
(۲) گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۴

چکیده: در این مقاله، روشی عددی برای حل معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای مرتبط با یک عملگر کسری جدید ارائه شده است. بر اساس روش تفاضل متناهی، یک طرح نیمه-گسسته در مسیر زمان به دست آورده شده و سپس برای گسسته سازی مکانی روش تقریب طیفی چبیشف استفاده شده است. همچنین آنالیز پایداری و خطای روش طیفی پیش‌نهادی بررسی شده است. بیش‌تر، توسعه‌ی معادله‌ی انتشار کسری چندجمله‌ای به معادله‌ی مرتبه‌ی توزیعی در نظر گرفته شده و روی آن تجزیه و تحلیل عددی صورت گرفته شده است. در پایان، با استفاده از برخی مثال‌های عددی، نتایج نظری مورد تایید واقع شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتشار کسری-زمانی، تقریب طیفی، آنالیز پایداری، آنالیز خطا.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 65M70, 35R11

مقدمه

آنالیز مدل‌های دیفرانسیل کسری به دلیل نقش مهمی که در مدل‌سازی کسری دارد، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. [۱-۱۱]. اخیراً برخی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری جزئی ارائه شده است. برای نمونه به چندین مورد اشاره می‌کنیم. در [۱۲] یک الگوریتم بهبودیافته مبتنی بر طرح‌های تفاضل متناهی برای مسائل مقدار مرزی کسری ارائه شده است. نویسندگان در [۱۳] یک تقریب تفاضل متناهی برای معادلات پراکندگی فرارفت کسری پیش‌نهاد کرده‌اند. یک روش عناصر متناهی گالرکین برای معادلات دیفرانسیل زمانی-مکانی در [۱۴] ارائه شده است. در [۱۵] روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری دو بعدی با ضرایب متغیر به کار گرفته شده است. روش طیفی هم‌محلی برای معادلات دیفرانسیل کسری همراه با نامنفردی در نقاط پایانی در [۱۶] استفاده شده است. نویسندگان در [۱۷] با استفاده از روش‌های طیفی پتروف-گالرکین و هم‌محلی یک تقریب خطای بهین برای جواب مسائل مقدار مرزی کسری ارائه داده‌اند. روش‌های دیگری نیز برای حل برخی مسائل کسری ارائه شده است که می‌توان به روش گالرکین ناپیوسته و روش حجم

محدود اشاره نمود که در [۱۸، ۱۹] آورده شده است. از آن جایی که مشتقات کسری یک عمل گر با هسته‌ی نمایی منفردند، از این رو یافتن جواب دقیق و عددی معادلات دیفرانسیل کسری چالش انگیز است. در حال حاضر تعریف‌های تعمیم یافته‌ی از مشتقات کسری ارائه شده است. مشتق کیوتو-فابریزو توسط کیوتو و فابریزو در [۲۰] معرفی شده است. در تعریف مشتق فابریزو هسته‌ی منفرد یک تابع نمایی جای‌گزین شده است [۲۱]. برخی کاربردهای مشتق کسری مکانی و زمانی با هسته‌های نمایی در [۲۲] آورده شده است. کاربردهای دیگری از مشتق کیوتو-فابریزو را می‌توان در [۲۳-۲۵] مشاهده کرد.

در این مقاله یک روش طیفی برای محاسبه‌ی جواب تقریبی معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای مبتنی بر یک عمل گر کسری جدید ارائه می‌دهیم. ابتدا معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t)U(x, t) = \partial_x^2 U(x, t) + Q(U) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times J, \\ U(x, t)|_{t=0} = h(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ U(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0, & t \in J, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن $\Omega = (-1, 1)$ ، $J = (0, T]$ با بازه زمانی با شرایط $0 < T < +\infty$ ، $U: \bar{\Omega} \times \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$ و تابع مشتق پذیر با شرط $Q(U)$ است. به علاوه، $Q(U)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

- عدد ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که $|Q(U)| \leq c|U|$
- عدد ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که $|Q'(U)| \leq c$

در این جا

$$P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t)U(x, t) = \sum_{j=1}^n d_j {}^{\circ}CF \partial_t^{\alpha_j} U(x, t),$$

که در آن $0 < \alpha_j < 1$ ، $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ ، $j = 1, 2, \dots, n-1$ و ضرایب d_j ($j = 1, 2, \dots, n$) اعداد حقیقی و مثبت هستند و عمل گر کسری CF به صورت زیر است:

$${}^{\circ}CF \partial_t^{\alpha} U(x, t) := \int_0^t \frac{\partial U(x, s)}{\partial s} \vartheta_{\alpha}(t-s) ds, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\vartheta_{\alpha}(t) := \frac{e^{-\frac{1-\alpha}{1-\alpha}t}}{1-\alpha}$$

اگر $Q(U) \neq 0$ آن گاه مسئله‌ی (۲.۴) شبه خطی است. در غیر این صورت خطی است. ساختار این مقاله به شرح زیر است: در قسمت‌های ۲ و ۳، روش محاسباتی برای به دست آوردن جواب عددی معادلات انتشار چندجمله‌ای و مرتبه‌ی توزیعی مبتنی بر عمل گر کسری کیوتو-فابریزو ارائه شده است. علاوه بر این، هم‌گرایی و پایداری این روش اثبات شده است. در قسمت ۴، با ارائه‌ی مثال‌هایی عمل کرد روش عددی مورد نظر بررسی شده است. در قسمت ۵، نتایج این مقاله آورده شده است.

۲ جواب معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای

۱.۲ گسسته سازی عمل گر کسری

گسسته سازی از \bar{J} با گام زمانی ثابت $\Delta t = \frac{T}{N}$ انجام می‌شود و با $t_k = k\Delta t$ برای $k = 0 : N$ نمایش داده می‌شود. فرض کنیم $U^k := U(x, t_k)$ و دنباله‌ی $\{U^k\}_{k=0}^M$ را در نظر می‌گیریم. مشتق زمانی گسسته $\frac{U^k - U^{k-1}}{\Delta t} = \delta_t U^{k-\frac{1}{2}}$ را با نماد δ_t نشان می‌دهیم. اکنون مشتق کسری-زمانی را با استفاده از طرح تقاضی متناهی زیر تقریب می‌زنیم:

$${}^{\circ}CF \partial_t^{\alpha} U^{k+1}(x) = \alpha^{-1} \sum_{j=1}^{k+1} D_{\alpha, j}^{k+1} \delta_t U^{j-\frac{1}{2}} + r_1^{k+1}(x), \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

که در آن

$$D_{\alpha, j}^{k+1} = e^{-\frac{\alpha \Delta t}{1-\alpha}(k+1-j)} - e^{-\frac{\alpha \Delta t}{1-\alpha}(k-j+2)}, \quad (j = 1, 2, \dots, k+1).$$

قضیه ۱.۲ ([۲۶]) برای هر $0 < \alpha < 1$ ، ضرایب $1, 2, \dots, k+1$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

- $D_{\alpha, j}^{k+1} > 0, \forall j \leq k+1$
- $D_{\alpha, j}^{k+1} \leq D_{\alpha, j+1}^{k+1}, \forall j \leq k$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha, k+1}^{k+1} &= \mathcal{D}_{\alpha, 1}^1, \quad \mathcal{D}_{\alpha, k}^{k+1} = \mathcal{D}_{\alpha, 1}^2, \quad \bullet \\ \sum_{j=1}^{k-1} (\mathcal{D}_{\alpha, j+1}^{k+1} - \mathcal{D}_{\alpha, j}^{k+1}) + \mathcal{D}_{\alpha, 1}^{k+1} &= \mathcal{D}_{\alpha, k}^{k+1} = \mathcal{D}_{\alpha, 1}^2, \quad \bullet \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲ ([۲۶]) برای هر $0 < \alpha < 1$ ، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$r_1^{k+1}(x) = - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(s - t_{j-1})}{1 - \alpha} \frac{\partial^\alpha \mathcal{U}(x, s)}{\partial s^\alpha} \Big|_{s=\zeta_j} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_{k+1}-s)} ds,$$

که در آن

$$|r_1^{k+1}(x)| \leq \frac{c}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \max_{t \in J} |\partial_t^\alpha \mathcal{U}(x, t)| \Delta t^\alpha, \quad -1 \leq k \leq N-1, \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{or } r_1^{k+1} = O(\Delta t^\alpha),$$

در این جا $\zeta_j \in (t_{j-1}, t_j)$ و c مستقل از Δt اند.

۲.۲ حالت اول: جواب معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای خطی

عبارت $\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}$ را با استفاده از طرح تفاضل متناهی زیر توصیف می‌کنیم:

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}^{k+1}(x) = \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\bar{\partial}_t) \mathcal{U}^{k+1}(x) + r_\tau^{k+1}(x),$$

که در آن

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\bar{\partial}_t) \mathcal{U}^{k+1}(x) = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{D}_{\alpha_j, i}^{k+1} \delta_t \mathcal{U}^{i-\frac{1}{\alpha_j}}. \quad (۲.۲)$$

در این جا، خطای برشی به صورت زیر است:

$$r_\tau^{k+1} = O(\Delta t^\alpha).$$

سرانجام، با حذف شرایط خطا و جای‌گزین کردن \mathcal{U}^{k+1} با جواب تقریبی u^{k+1} مسئله‌ی نیمه‌گسسته‌ی زیر را برای معادلات انتشار کسری زمانی چندجمله‌ای داریم:

طرح I-I: فرض کنیم $u^\circ = h(x)$ ($k = 0, 1, \dots, M-1$) u^{k+1} را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\bar{\partial}_t) u^{k+1} = \partial_x^\alpha u^{k+1} + f^{k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \quad 0 \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = 0, & -1 \leq k \leq N-1, \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \mathcal{L} u^{k+1} = \mathcal{F}^{k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \quad 0 \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = 0, & -1 \leq k \leq N-1, \end{cases} \quad (۳.۲)$$

که در آن

$$\mathcal{L}(\ast) = \left[\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \mathcal{D}_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - \partial_x^\alpha \right](\ast), \quad \mathcal{F}^{k+1} = V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^\circ, \dots, u^k) + f^{k+1},$$

در این جا

$$V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^\circ, \dots, u^k) = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k),$$

$$W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k) = D_{\alpha_j, 1}^{k+1} u^\circ + \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) u^i.$$

۱.۲.۲ تقریب طیفی چبیشف برای (۳.۲)

فضای μ -اندازه پذیر هیلبرت زیر را در نظر می گیریم:

$$L^{\nu}((-\nu, \nu), d\mu(x)), d\mu(x) = w(x)dx = (\nu - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

علاوه بر این، فضای هیلبرت $L^{\nu}((-\nu, \nu), d\mu(x))$ با ضرب داخلی زیر را در نظر می گیریم:

$$\langle u, v \rangle_{\circ, \omega} = \int_{-\nu}^{\nu} u(x)v(x)(\nu - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

قضیه ۳.۲ ([۲۷]) فرض کنید \mathbb{P}_M مجموعه ی چند جمله ای های از درجه ی کم تر و مساوی M باشد اگر B_M دنباله ای از چند جمله ای های متعامد روی $(-\nu, \nu)$ از درجه ی کم تر از M باشد، به عبارت دیگر:

$$B_M = \{u \in \mathbb{P}_M | \langle u, v \rangle_{\circ, \omega} = 0, \forall v \in \mathbb{P}_{M-1}\},$$

آن گاه هسته ی باز تولید $K_M : (-\nu, \nu) \times (-\nu, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$u(x) = \langle u, K_M(x, \cdot) \rangle_{\circ, \omega}, \forall u \in \mathbb{P}_M, \forall x \in (-\nu, \nu),$$

9

$$\langle (x + \nu)u, K_M(-\nu, \cdot) \rangle_{\circ, \omega} = \langle (\nu - x)u, K_M(\nu, \cdot) \rangle_{\circ, \omega} = 0, \forall u \in \mathbb{P}_{M-1}.$$

فرض کنیم $\{T_M\}_{M \geq 0}$ مجموعه چند جمله ای های چبیشف متعلق به $L^{\nu}((-\nu, \nu), d\mu(x))$ با درجه M باشد. در این صورت، در نظر می گیریم:

$$q_M(x) = \frac{T_{M+\nu}(x) + c_M T_{M+1}(x) + d_M T_M(x)}{(\nu - x)(x + \nu)} \in \mathbb{P}_M,$$

که در آن

$$c_M = -\frac{[T_{M+\nu}(\nu)T_M(-\nu) + T_{M+\nu}(-\nu)T_M(\nu)]}{[T_M(-\nu)T_{M+1}(\nu) - T_M(\nu)T_{M+1}(-\nu)]}, \quad d_M = -\frac{[T_{M+\nu}(T_{M+1}(-\nu) + T_{M+\nu}(-\nu)T_{M+1}(\nu))]}{[T_M(\nu)T_{M+1}(-\nu) - T_M(-\nu)T_{M+1}(\nu)]}.$$

بنابراین، $\{q_M\}_{M \geq 0}$ دنباله ای از چند جمله ای های متعامد $L^{\nu}((-\nu, \nu), d\tilde{\mu}(x))$ با ضرب داخلی زیر است:

$$\langle u, v \rangle_{\nu, \tilde{\omega}} = \int_{-\nu}^{\nu} u(x)v(x)d\tilde{\mu}(x), \quad d\tilde{\mu}(x) = \tilde{\omega}(x)dx = (\nu - x)(x + \nu)(\nu - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

در نشان داده شده است که

$$K_{M-\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{M-\nu} \frac{q_m(x)q_m(y)}{\|q_m\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2} = \frac{k_M(q_{M-1}(x)q_{M-\nu}(y) - q_{M-\nu}(x)q_{M-1}(y))}{k_{M+1}\|q_{M-\nu}\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2(x - y)}, \quad x \neq y,$$

که در آن $K_{M-\nu}(\cdot, y) \in \mathbb{P}_{M-\nu}$ و $-k_{M+1} < 0$ ضرایب پیش رو x^{M+1} در $q_{M-1}(x)(\nu - x)(x + \nu)$ است. هم چنین داریم:

$$K_{M-\nu}(x, x) = \sum_{m=0}^{M-\nu} \frac{q_m^2(x)}{\|q_m\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2} = \frac{k_M(q'_{M-1}(x)q_{M-\nu}(x) - q'_{M-\nu}(x)q_{M-1}(x))}{k_{M+1}\|q_{M-\nu}\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2}.$$

فرض کنید $\{z_j\}_{j=1}^{M-1}$ شامل صفرهای ساده q_{M-1} در $(-\nu, \nu)$ است، آن گاه داریم:

$$K_{M-\nu}(z_i, z_j) = \sum_{m=0}^{M-\nu} \frac{q_m(z_i)q_m(z_j)}{\|q_m\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \tilde{\omega}_i^{-1} = \frac{k_M q'_{M-1}(z_i)q_{M-\nu}(z_i)}{k_{M+1}\|q_{M-\nu}\|_{\nu, \tilde{\omega}}^2}, & i = j. \end{cases}$$

فرض کنید $\{z_j\}_{j=0}^M$ صفرهای ساده از $q_{M-1}(x)(\nu - x)(x + \nu)$ بر $[-\nu, \nu]$ باشد. با توجه به [۲۷]، مجموعه ای منحصر به فرد از وزن های مربعی $\{\omega_j\}_{j=0}^M$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{-\nu}^{\nu} u(x) \frac{1}{\sqrt{\nu - x^2}} dx = \sum_{j=0}^M \omega_j u(z_j), \quad \forall u \in \mathbb{P}_{M-1}, \quad z_j = -\cos \frac{\pi j}{M}, \quad j = 0, \dots, M,$$

که در آن $\omega_j = \frac{\pi}{\sigma_j M}, j = 0, 1, \dots, M$, و

$$\sigma_j = \begin{cases} 2, & j = 0, M, \\ 1, & 1 \leq j \leq M - 1. \end{cases}$$

تقریب u_M^k برای u^k را می‌توان بر اساس پایه‌های زیر محاسبه کرد:

$$\mathbb{P}_M = \text{span}\{\phi_j(x), j = 0, 1, \dots, M\}, \quad \phi_j(x) = \frac{(x+1)(1-x)q_{M-1}(x)}{((x+1)(1-x)q_{M-1}(x))'|_{x=z_j}(x-z_j)},$$

که در آن

$$u^k(x) \approx u_M^k(x) := \Phi(x)\{v\}^k, \quad \Phi(x) = (\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_M(x)),$$

9

$$\{v\}^k = (v_0^k, v_1^k, \dots, v_M^k)^T.$$

همچنین، $\frac{d^m}{dx^m} \Phi(x)$ را می‌توانیم به شکل ماتریسی زیر نشان دهیم:

$$\frac{d^m}{dx^m} \Phi(x) = \Phi(x)D^m, \quad m \geq 1,$$

که در آن

$$D = [D_{ij}] = [\phi'_j(z_i)], \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad D^m = \underbrace{DD \dots D}_m.$$

مولفه‌های ماتریس مشتق‌پذیر مرتبه‌ی اول D به صورت زیر مشخص می‌شوند [۲۷]:

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{((x-a)(b-x)q_{M-1}(x))'|_{x=z_i}}{((x-a)(b-x)q_{M-1}(x))'|_{x=z_j}(z_i-z_j)}, & i \neq j, \\ \frac{((x-a)(b-x)q_{M-1}(x))''|_{x=z_i}}{2((x-a)(b-x)q_{M-1}(x))''|_{x=z_i}}, & i = j. \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2M^2+1}{6}, & i = j = 0, \\ \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \frac{(-1)^{i+j}}{z_i - z_j}, & i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq M, \\ -\frac{z_i}{2(1-z_i^2)}, & i = j, \quad 1 \leq i, j \leq M-1, \\ \frac{2M^2+1}{6}, & i = j = M. \end{cases}$$

آن‌گاه، عبارت $\partial_x^m u_M^k$ را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\partial_x^m u_M^k(x) := \Phi(x)D^m\{v\}^k, \quad m \geq 1.$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d^m}{dx^m} u_M^k(z_i) = \sum_{j=0}^N (D^m)_{ij} v_j^k, \quad m \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

ضرب داخلی گسسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle u, v \rangle_{M, \omega} = \sum_{j=0}^N \omega_j u(z_j) v(z_j),$$

که دارای نرم القاعده شده $\|u\|_{M, \omega} = (\langle u, u \rangle_{M, \omega})^{\frac{1}{2}}$ است و در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\langle u, v \rangle_{M, \omega} = \langle u, v \rangle_{0, \omega}, \quad \forall u, v : u, v \in \mathbb{P}_{N-1}.$$

فضای سوبولف وزن دار $H^r((-\lambda, \lambda), d\mu(x))$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H^r((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) = \{u \in L^2((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) : \|u\|_{r, \omega} = \left(\sum_{j=0}^r \|\partial_x^j u\|_{0, \omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

علاوه بر این، قرار می‌دهیم:

$$H_0^1((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) = \{u \in L^2((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) : \partial_x u \in L^2((-\lambda, \lambda), d\mu(x)), u(-\lambda) = u(\lambda) = 0\}.$$

همچنین، فرم دو خطی را به صورت زیر می سازیم:

$$a_\omega \langle u, v \rangle = \langle \partial_x u, \omega^{-1} \partial_x (v\omega) \rangle_{\circ, \omega} = \int_{-1}^1 \partial_x u \partial_x (v\omega) dx, \quad \forall u, v \in H^1_\circ((-1, 1), d\mu(x)).$$

اکنون، جواب عددی مسئله‌ی نیمه گسسته (۳.۲) را در فضای \mathbb{P}_M به دست می آوریم. قرار می دهیم $u_M^\circ = I_M^c u^\circ$ و $u_M^{k+1} \in \mathbb{P}_M$ ($k = \circ : M - 1$) را به گونه‌ای پیدا می کنیم که:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} u_M^{k+1}(z_i) - \partial_x^\nu u_M^{k+1}(z_i) \\ = V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^\circ(z_i), \dots, u^k(z_i)) + f^{k+1}(z_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, k \geq \circ, \\ u_M^{k+1}(z_i) = \circ, \quad i = \circ, M, \quad -1 \leq k \leq M-1, \end{cases} \quad (4.2)$$

که در آن

$$V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^\circ(z_i), \dots, u^k(z_i)) = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ(z_i), \dots, u^k(z_i)),$$

$$W^{\alpha_j}(u^\circ(z_i), \dots, u^k(z_i)) = D_{\alpha_j, 1}^{k+1} u^\circ(z_i) + \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) u^i(z_i),$$

و $I_M^c : C[a, b] \rightarrow \mathbb{P}_M$ عملگر درون یابی مرتبط با $\{z_i, \omega_i\}_{j=0}^M$ است به طوری که

$$(I_M^c u)(z_i) = u(z_i), \quad i = \circ, 1, 2, \dots, M.$$

اگر قرار دهیم $\mathbb{P}_M^\circ = \{u \in \mathbb{P}_M, u(-1) = u(1) = \circ\}$ می توانیم طرح (۴.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم: $A(L-I)$: تقریب طیفی چیشف $u_M^{k+1} \in \mathbb{P}_M^\circ$ ($k = \circ : M - 1$) را به گونه‌ای پیدا می کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle &= \langle V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} \\ &+ \langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

اکنون، جواب تقریبی u_M^k را بر اساس پایه‌های $\{\phi_j(x), j = \circ, 1, \dots, M\}$ به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$u^k(x) \approx u_M^k(x) := \Phi(x)\{v\}^k.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sum_{s=\circ}^N \left[\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \delta_{is} - (D^\nu)_{is} \right] v_s^{k+1} = F^{k+1}(z_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ \Phi(z_\circ)\{v\}^{k+1} = \Phi(z_M)\{v\}^{k+1} = \circ. \end{cases} \quad (6.2)$$

که در آن

$$F^{k+1}(z_i) = V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ(z_i), \dots, u_M^k(z_i)) + f^{k+1}(z_i), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

هرگاه

$$(B)_{is} = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \delta_{is} - (D^\nu)_{is}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad \circ \leq s \leq M,$$

$$(B)_{\circ s} = \delta_{\circ s}, \quad (B)_{Ms} = \delta_{Ms}, \quad \circ \leq s \leq M,$$

$$\{c\}^{k+1} = (\circ, F^{k+1}(z_1), F^{k+1}(z_2), \dots, F^{k+1}(z_{M-1}), \circ)^T,$$

$$\{v\}^{k+1} = (v_\circ^{k+1}, v_1^{k+1}, \dots, v_M^{k+1})^T,$$

آن‌گاه، دستگاه خطی (۶.۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$B\{v\}^{k+1} = \{c\}^{k+1}, \quad k = \circ : M - 1.$$

۲.۲.۲ آنالیز پایداری

لم ۴.۲. ([۳۰-۲۸]) برای هر $u \in \mathbb{P}_M$ داریم:

$$\|u\|_{\circ, \omega} \leq \|u\|_{M, \omega} \leq \sqrt{2} \|u\|_{\circ, \omega}.$$

لم ۵.۲. ([۳۰-۲۸]) اگر $u \in H^1_0((-1, 1), d\mu(x))$ آن‌گاه داریم:

$$\|u\|_{\circ, \omega} \leq C \|\partial_x u\|_{\circ, \omega},$$

که در آن C ثابت مثبت مستقل از u است.

لم ۶.۲. ([۳۰-۲۸]) برای هر $u \in H^1_0((-1, 1), d\mu(x))$ داریم:

$$|a_\omega \langle u, u \rangle| \leq C \|\partial_x u\|_{\circ, \omega}^2, \quad a_\omega \langle u, u \rangle \geq \frac{1}{4} \|\partial_x u\|_{\circ, \omega}^2,$$

که در آن C ثابت مثبت مستقل از u است.

لم ۷.۲. ([۳۰-۲۸]) (نامساوی گسسته گرونوالد) فرض کنیم $\{f_n\}_{n \geq 0}$ یک دنباله نامنفی و C یک ثابت نامنفی باشد. اگر

$$f_n \leq C + \sum_{0 \leq k < n} g_k f_k, \quad n \geq 0,$$

آن‌گاه

$$f_n \leq C \prod_{0 \leq k < n} (1 + g_k) \leq C e^{\sum_{0 \leq k < n} g_k}, \quad n \geq 0.$$

لم ۸.۲. فرض کنید $1 - M, \dots, 1, 0, k \in \mathbb{P}_M^\circ$ جواب (۴.۲) باشد. آن‌گاه نامساوی زیر برقرار است:

$$\|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq C_* \|u_M^k\|_{M, \omega}^2 + C_{**}$$

که در آن

$$C_* = \frac{K_*}{\varrho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1}, \quad C_{**} = \frac{K_* \Delta t^\alpha \|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\varrho \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}},$$

و

$$K_* = \exp \left(\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} (D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, k}^{k+1}) \right).$$

اثبات. در (۵.۲) قرار می‌دهیم $v_M = u_M^{k+1}$ لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, u_M^{k+1} \rangle = \langle V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (u_M^0, \dots, u_M^k), u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c f^{k+1}, u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} \quad (۷.۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \langle V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (u_M^0, \dots, u_M^k), u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} &= \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \langle u_M^0, u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} \\ &+ \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \langle u_M^i, u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega}. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی $AB \leq \frac{1}{\varphi} A^2 + \frac{\theta^2}{\varphi} B^2$, $\forall \theta \neq 0$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \langle V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^0, \dots, u_M^k), u_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} &\leq \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \left(\|u_M^0\|_{M, \omega}^2 + \frac{1}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \left(\|u_M^i\|_{M, \omega}^2 + \frac{1}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \right) \leq \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|u_M^i\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} (D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, 1}^{k+1})}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|u_M^i\|_{M, \omega}^2 + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2, \end{aligned}$$

با به کار بردن لم ۶.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \frac{1}{\varphi} \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{\omega}^2 &\leq \langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} \\ &+ \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|u_M^i\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2. \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

می دانیم که

$$\langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} \leq \frac{\|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2. \quad (۹.۲)$$

با استفاده از (۱۰.۲) و (۹.۲)، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \frac{1}{\varphi} \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{\omega}^2 &\leq \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{\|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|u_M^i\|_{M, \omega}^2. \end{aligned}$$

با به کار بردن لم ۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{1}{\lambda} \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{\omega}^2 \leq \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 + \frac{\|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|u_M^i\|_{M, \omega}^2. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\varphi} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \frac{\Delta t}{\lambda} \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{\omega}^2 &\leq \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \|u_M^0\|_{M, \omega}^2 \\ &+ \frac{\Delta t^\nu \|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) (\|u_M^i\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{\omega}^2). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\rho = \min\left\{\frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\gamma}, \frac{1}{\lambda}\right\}$. در این صورت به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 &\leq \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, \lambda}^{k+1} \|u_M^k\|_{M, \omega}^2 + \frac{\Delta t^2 \|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\rho \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} \\ &+ \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) (\|u_M^i\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2). \end{aligned}$$

با به کار بردن لم ۷.۲، نتیجه می‌گیریم:

$$\|u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x u_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq C_* \|u_M^k\|_{M, \omega}^2 + C_{**},$$

که در آن

$$C_* = \frac{K_*}{\rho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, \lambda}^{k+1}, \quad C_{**} = \frac{K_* \Delta t^2 \|I_M^c f^{k+1}\|_{M, \omega}}{\rho \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}},$$

۹

$$K_* = \exp\left(\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} (D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, k}^{k+1})\right).$$

□

قضیه ۹.۲. فرض کنید $u_M^{k+1} \in \mathbb{P}_M^\circ$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ باشد. آن گاه طرح (۴.۲) بدون قید و شرط برای هر $\Delta t > 0$ پای‌دار است.

اثبات. فرض کنید $\tilde{u}_M^{k+1} \in \mathbb{P}_M^\circ$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ جواب تقریبی طرح (۴.۲) با شرط اولیه \tilde{u}_M^0 باشد. با به کار بردن لم ۸.۲ به دست می‌آوریم:

$$\|u_M^{k+1} - \tilde{u}_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \|\partial_x u_M^{k+1} - \partial_x \tilde{u}_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq C_* \|u_M^k - \tilde{u}_M^k\|_{M, \omega}^2.$$

بنابراین نامساوی زیر برقرار است:

$$\|u_M^{k+1} - \tilde{u}_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq C_* \|u_M^k - \tilde{u}_M^k\|_{M, \omega}^2.$$

□

در نتیجه اثبات قضیه ۹.۲ کامل می‌شود.

۳.۲.۲ آنالیز خطا

لم ۱۰.۲. برای هر $u \in H^r((-\lambda, \lambda), d\mu(x))$ ، تخمین‌های زیر برقرارند:

$$\|u - I_M^c u\|_{s, \omega} \leq CM^{\gamma s - r} \|u\|_{r, \omega}, \quad r > \frac{1}{\gamma}, \quad 0 \leq s \leq r.$$

لم ۱۱.۲. فرض کنید Π_M عملگر تصویر و متعامد به صورت زیر باشد:

$$\Pi_M := L^\gamma((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) \rightarrow \mathbb{P}_M, \quad \langle u - \Pi_M u, v \rangle_{\omega} = 0, \quad \forall v \in \mathbb{P}_M,$$

آن گاه تقریب‌های زیر برقرارند:

$$\|u - \Pi_M u\|_{s, \omega} \leq CM^{\frac{\gamma s}{\gamma} - r} \|u\|_{r, \omega}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq s \leq \lambda,$$

که در آن C ثابت مثبت است.

لم ۱۲.۲. فرض کنید $\Pi_M^{1, \circ}$ عملگر تصویر متعامد به صورت زیر باشد:

$$\Pi_M^{1, \circ} := H^1((-\lambda, \lambda), d\mu(x)) \rightarrow \mathbb{P}_M, \quad \langle \Pi_M^{1, \circ} u - u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{P}_M,$$

آن گاه تقریب‌های زیر برقرارند:

$$\|u - \Pi_M^{1, \circ} u\|_{s, \omega} \leq CM^{s-r} \|u\|_{r, \omega}, \quad r \geq 1, \quad 0 \leq s \leq \lambda,$$

که در آن C ثابت مثبت است.

لم ۱۳.۲. $[[28-30]]$ برای هر $r > \frac{1}{4}$ ، $u \in H^r((-1, 1), d\mu(x))$ ، تخمین های زیر برقرارند:

$$|\langle E(u), v \rangle_{\circ, \omega}| = |\langle u, v \rangle_M - \langle u, v \rangle_{\circ, \omega}| \leq C \{ \|u - \Pi_{M^{-1}} u\|_{\circ, \omega} + \|u - I_M^c u\|_{\circ, \omega} \} \|v\|_{\circ, \omega}, \quad \forall v \in \mathbb{P}_M,$$

که در آن C ثابت مثبت است.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید \mathcal{U} جواب دقیق معادله ی انتشار کسری-زمانی چندجمله ای خطی باشد. اگر

$${}^C F \partial_t^\alpha \mathcal{U} \in L^\infty((\circ, T]; H^r((-1, 1), d\mu(x))), \quad r \geq 1,$$

و

$$\mathcal{U} \in L^\infty((\circ, T]; H^r((-1, 1), d\mu(x))), \quad r \geq 1,$$

آن گاه داریم:

$$\|\mathcal{U}^{k+1} - u_M^{k+1}\|_{\circ, \omega} \leq C_*(M^{-r} + \Delta t^r),$$

که در آن C_* ثابت مثبت است.

اثبات. با به کار بردن لم ۱۲.۲، به دست می آوریم:

$$\langle \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}, v_M \rangle = \langle \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1} - \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega} \\ + \langle E(\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}), v_M \rangle_{\circ, \omega} + \langle f^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega} + \langle R^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega}, \quad \forall v_M \in \mathbb{P}_M^{\circ, \circ}, \quad (10.2)$$

که در آن خطاهای R^{k+1} در شرط زیر صدق می کنند:

$$\|R^{k+1}\|_{\circ, \omega} \leq C \Delta t^r.$$

با استفاده از (۵.۲) از (۱۰.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle e_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle e_M^{k+1}, v_M \rangle = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \langle e_M^i, v_M \rangle_{M, \omega} \\ + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \langle e_M^0, v_M \rangle_{M, \omega} + \langle \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1} - \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega} \\ + \langle E(\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}), v_M \rangle_{\circ, \omega} + \langle f^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega} - \langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + \langle R^{k+1}, v_M \rangle_{\circ, \omega}, \quad (11.2)$$

که در آن

$$e_M^{k+1} = \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1} - u_M^{k+1}.$$

قرار می دهیم $v_M = e_M^{k+1}$. اکنون با استفاده از لم های ۶.۲ و ۱۱.۲، نامساوی های زیر را به دست می آوریم:

$$\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \frac{1}{4} \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{\circ, \omega}^2 \leq \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) \|e_M^i\|_{M, \omega}^2 \\ + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} (D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, k}^{k+1})}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \langle e_M^0, e_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} \\ + \langle \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1} - \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega} + \langle E(\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}), e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega} \\ + \langle f^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega} - \langle I_M^c f^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{M, \omega} + \langle R^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega}. \quad (12.2)$$

با به کار بردن لم های ۱۲.۲ و ۱۳.۲ داریم:

$$|\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, 1}^{k+1} \langle e_M^0, e_M^{k+1} \rangle_{M, \omega}| \leq \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} C_V^r M^{-\mathfrak{r}r} + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2, \\ |\langle \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1} - \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \mathcal{U}^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega}| \leq \frac{\mathfrak{r} C_V^r M^{-\mathfrak{r}r}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} \\ + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2, \\ |\langle E(\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\partial_t) \Pi_M^{\circ, \circ} \mathcal{U}^{k+1}), e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega}| \leq \frac{\mathfrak{r} C_V^r M^{-\mathfrak{r}r}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2, \\ |\langle f^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega} - \langle I_M^c f^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{M, \omega}| \leq \frac{\mathfrak{r} C_V^r M^{-\mathfrak{r}r}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2,$$

$$|\langle R^{k+1}, e_M^{k+1} \rangle_{\circ, \omega}| \leq \frac{\mathfrak{r} C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} \Delta t^{\mathfrak{r}}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{12} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2,$$

و بنابراین داریم

$$\frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\mathfrak{r}} \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \frac{\Delta t}{\lambda} \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) (\|e_M^i\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2) \\ + \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} M^{-2r} + \frac{\mathfrak{r} (C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} + C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} + C_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{r}}) M^{-2r}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\mathfrak{r} C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} \Delta t^{\mathfrak{r}}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}.$$

قرار می‌دهیم $\varrho = \min \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}{\mathfrak{r}}, \frac{1}{\lambda} \right\}$ ، لذا داریم:

$$\|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq \mathfrak{r} \varrho^{-1} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) (\|e_M^i\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2) \\ + \mathfrak{r} \varrho^{-1} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} M^{-2r} + \frac{\mathfrak{r} \varrho^{-1} (C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} + C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} + C_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{r}}) M^{-2r}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}} + \frac{\mathfrak{r} \varrho^{-1} C_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{r}} \Delta t^{\mathfrak{r}}}{\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1}}.$$

با به کار بردن لم ۷.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq \|e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 + \Delta t \|\partial_x e_M^{k+1}\|_{M, \omega}^2 \leq C(M^{-2r} + \Delta t^{\mathfrak{r}}), \quad (13.2)$$

با به کار بردن لم‌های ۴.۲ و ۱۲.۲ به دست می‌آوریم:

$$\|U^{k+1} - u_M^{k+1}\|_{\circ, \omega} \leq \|e_M^{k+1}\|_{\circ, \omega} + \|\Pi_M^1 U^{k+1} - U^{k+1}\|_{\circ, \omega} \leq C_*(M^{-r} + \Delta t^{\mathfrak{r}}),$$

□

که اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۳.۲ حالت دوم: معادلات انتشار کسری زمانی چندجمله‌ای شبه‌خطی

با به کار بردن بسط تیلور داریم:

$$\begin{cases} Q(U^1) = Q(U^0) + Q'(U_0) \partial_t U(x, t_{\tau}) \Delta t, & k = 0 \\ Q(U^{k+1}) = \mathfrak{r} Q(U^k) - Q(U^{k-1}) + O(\Delta t^{\mathfrak{r}}), & k \geq 1. \end{cases}$$

با جای‌گزین کردن $U^{k+1}(x)$ با جواب تقریبی $u^{k+1}(x)$ مسئله‌ی نیمه‌گسسته زیر را برای معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای شبه‌خطی به دست می‌آوریم:

طرح QL-II:

فرض کنید $u^0 = h(x)$ اکنون $(k = 0 : M - 1)$ را به‌گونه‌ای پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} u^{k+1}(x) - \partial_x^{\mathfrak{r}} u^{k+1}(x) \\ = V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^0, \dots, u^k) + \begin{cases} Q(u^0) + f^1(x), & k = 0, \\ \mathfrak{r} Q(u^k) - Q(u^{k-1}) + f^{k+1}(x), & k \geq 1, \end{cases} \\ u^{k+1}|_{x \in \partial \Omega} = 0, -1 \leq k \leq M - 1, \end{cases}$$

که در آن

$$V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u^0, \dots, u^k) = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^0, \dots, u^k),$$

$$W^{\alpha_j}(u^0, \dots, u^k) = D_{\alpha_j, 1}^{k+1} u^0 + \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) u^i.$$

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$G^k = \begin{cases} Q(u_M^0) + f^1, & k = 0, \\ \mathfrak{r} Q(u_M^k) - Q(u_M^{k-1}) + f^{k+1}, & k \geq 1, \end{cases}$$

و یک جواب عددی برای مسئله نیمه گسسته (۱.۴.۲) در فضای \mathbb{P}_M° به دست می آوریم. $A(QL-II)$: تقریب طیفی چیشف ($k = 0 : N - 1$) $u_M^{k+1} \in \mathbb{P}_M^\circ$ را به گونه ای پیدا می کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^n d_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle = \langle V^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (u_M^0, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c G^k, v_M \rangle_{M, \omega}.$$

۳ توسیع به معادلات انتشار کسری-زمانی مرتبه ی توزیعی

اکنون، یک روش طیفی، برای معادلات انتشار کسری-زمانی مرتبه ی توزیعی ارائه می دهیم:

$$\begin{cases} D_t^{[\omega]} \mathcal{U}(x, t) = \partial_x^2 \mathcal{U}(x, t) + Q(\mathcal{U}) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times J, \\ \mathcal{U}(x, t)|_{t=0} = h(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ \mathcal{U}(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0, & t \in J, \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن $\mathcal{U} : \bar{\Omega} \times \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$, $J = (0, T]$, $\Omega = (-1, 1)$ در آن شرایط زیر صدق می کند:

• عدد ثابت C وجود دارد به طوری که $|Q(\mathcal{U})| \leq C|\mathcal{U}|$.

• عدد ثابت مثبت C وجود دارد به طوری که $|Q'(\mathcal{U})| \leq C$.

همچنین $D_t^{[\omega]} \mathcal{U}$ نمایش مشتق کسری توزیعی \mathcal{U} با تابع وزن ω به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_t^{[\omega]} \mathcal{U}(x, t) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \omega(\alpha) {}^C F \partial_t^\alpha \mathcal{U}(x, t) d\alpha, \quad 0 < \nu_1, \nu_2 < 1.$$

برای تابع وزن $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$: ω شرایط زیر را داریم:

• $\omega \in C(\Omega)$ و $\omega(\alpha) > 0$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$.

• $\int_0^1 \omega(\alpha) d\alpha = c_0 > 0$.

علاوه بر این، عدد ثابت $0 < \bar{\alpha} \leq 1$ وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1]$ ، $\omega(\alpha) = 0$ و برای هر $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ ، $\omega(\alpha) \neq 0$.

اگر $Q(\mathcal{U}) \neq 0$ ، آن گاه مسئله ی (۱.۳) شبه-خطی است در غیر این صورت خطی است.

۱.۳ حالت اول: معادلات انتشار کسری-زمانی مرتبه ی توزیعی خطی

برای گسسته سازی متغیر زمان، فرض کنید M : $k = 0 : M$ یک افزاز با فاصله های مساوی از $[0, T]$ باشد که در آن $\Delta t = \frac{T}{M}$. ابتدا مشتق مرتبه ی توزیعی را با استفاده از فرمول های دوزنقه ای مرکب (CT) و سیمپسون مرکب (CS) گسسته می کنیم:

$$CT: \int_{\nu_1}^{\nu_2} \omega(\alpha) {}^C F \partial_t^\alpha \mathcal{U}(x, t) d\alpha = \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I (\partial_t) \mathcal{U}(x, t) + \mathcal{E}_\alpha^I = \sum_{j=1}^{2m+1} q_j {}^C F \partial_t^{\alpha_j} \mathcal{U}(x, t) + \mathcal{E}_\alpha^I, \quad \mathcal{E}_\alpha^I = O(\Delta \alpha^2),$$

که در آن

$$q_j = \begin{cases} \frac{\Delta \alpha \omega(\alpha_j)}{3}, & j = 1, 2m + 1, \\ \frac{\Delta \alpha \omega(\alpha_j)}{4}, & j = 2, 3, \dots, 2m, \end{cases}$$

و

$$CS: \int_{\nu_1}^{\nu_2} \omega(\alpha) {}^C F \partial_t^\alpha \mathcal{U}(x, t) d\alpha = \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II} (\partial_t) \mathcal{U}(x, t) + \mathcal{E}_\alpha^{II} = \sum_{j=1}^{2m+1} r_j {}^C F \partial_t^{\alpha_j} \mathcal{U}(x, t) + \mathcal{E}_\alpha^{II}, \quad \mathcal{E}_\alpha^{II} = O(\Delta \alpha^4),$$

که در آن

$$r_j = \begin{cases} \frac{\Delta \alpha \omega(\alpha_j)}{3}, & j = 1, 2m + 1, \\ \frac{4 \Delta \alpha \omega(\alpha_j)}{3}, & j = 2, 4, \dots, 2m, \\ \frac{2 \Delta \alpha \omega(\alpha_j)}{3}, & j = 3, 5, \dots, 2m - 1, \end{cases}$$

که در آن $\alpha_j = \nu_1 + (j-1)\Delta\alpha$, $j = 1, 2, \dots, 2m+1$ و $\Delta\alpha = \frac{\nu_1 - \nu_1}{2m}$ اکنون $\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II}(\partial_t)\mathcal{U}$ و $\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\partial_t)\mathcal{U}$ را با طرح‌های تفاضل متناهی زیر تقریب می‌زنیم:

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\partial_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) = \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) + R_{\mathcal{U}}^{k+1, I}(x),$$

و

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II}(\partial_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) = \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II}(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) + R_{\mathcal{U}}^{k+1, II}(x),$$

که در آن

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{2m+1} q_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{D}_{\alpha_j, i}^{k+1} \delta_t \mathcal{U}^{i-\frac{1}{2}},$$

و

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II}(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}^{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{2m+1} r_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{D}_{\alpha_j, i}^{k+1} \delta_t \mathcal{U}^{i-\frac{1}{2}}.$$

که در آن، خطای برشی $R_{\mathcal{U}}^{k+1, I}(x)$ و $R_{\mathcal{U}}^{k+1, II}(x)$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$R_{\mathcal{U}}^{k+1, I} = O(\Delta t^\nu), \quad R_{\mathcal{U}}^{k+1, II} = O(\Delta t^\nu).$$

آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} D_t^{[\omega]} \mathcal{U}^{k+1}(x) &= \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}(x, t) + R_{\mathcal{U}}^{k+1, I} + \mathcal{E}_\alpha^I = \sum_{j=1}^{2m+1} q_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{D}_{\alpha_j, i}^{k+1} \delta_t \mathcal{U}^{i-\frac{1}{2}} \\ &+ O(\Delta\alpha^\nu + \Delta t^\nu) \end{aligned} \quad (2.3)$$

و

$$\begin{aligned} D_t^{[\omega]} \mathcal{U}^{k+1}(x) &= \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1}}^{II}(\bar{\partial}_t)\mathcal{U}(x, t) + R_{\mathcal{U}}^{k+1, II} + \mathcal{E}_\alpha^{II} = \sum_{j=1}^{2m+1} r_j \alpha_j^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{D}_{\alpha_j, i}^{k+1} \delta_t \mathcal{U}^{i-\frac{1}{2}} \\ &+ O(\Delta\alpha^\nu + \Delta t^\nu) \end{aligned} \quad (3.3)$$

سرانجام، با حذف خطا و جای‌گزین کردن \mathcal{U}^{k+1} با جواب تقریبی u^{k+1} ، مسئله‌ی نیمه-گسسته زیر را به دست می‌آوریم: طرح L-CT-I: فرض کنید $u^\circ = h(x)$ داده شده است، اکنون $(k = \circ : M-1)$ را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}}^I(\bar{\partial}_t)u^{k+1} = \partial_x^\nu u^{k+1} + f^{k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \circ \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \mathcal{L}^I u^{k+1} = \mathcal{F}^{I, k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \circ \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1, \end{cases} \quad (4.3)$$

که در آن

$$\mathcal{L}^I(*) = \left[\sum_{j=1}^{2m+1} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - \partial_x^\nu \right](*), \quad \mathcal{F}^{I, k+1} = V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}}(u^\circ, \dots, u^k) + f^{k+1},$$

که در آن

$$\begin{aligned} V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}}(u^\circ, \dots, u^k) &= \sum_{j=1}^{2m+1} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k), \\ W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k) &= D_{\alpha_j, 1}^{k+1} u^\circ + \sum_{i=1}^k (D_{\alpha_j, i+1}^{k+1} - D_{\alpha_j, i}^{k+1}) u^i. \end{aligned}$$

طرح L-CS-I: فرض کنید $u^\circ = h(x)$ داده شده است، اکنون $(k = \circ : M - 1)$ را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}^{II}(\bar{\partial}_t)u^{k+1} = \partial_x^\nu u^{k+1} + f^{k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \circ \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1, \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{II}u^{k+1} = \mathcal{F}^{II, k+1}, & x \in \bar{\Omega}, \circ \leq k, \\ u^{k+1}|_{\partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1, \end{cases} \quad (5.3)$$

که در آن

$$\mathcal{L}^{II}(\ast) = \left[\sum_{j=1}^{r_{m+1}} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} - \partial_x^\nu \right](\ast), \quad \mathcal{F}^{II, k+1} = V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}(u^\circ, \dots, u^k) + f^{k+1}.$$

بنابراین

$$V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}(u^\circ, \dots, u^k) = \sum_{j=1}^{r_{m+1}} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k).$$

اکنون جواب عددی برای مسئله نیمه گسسته (۴.۳) و (۵.۳) در فضای \mathbb{P}_M به دست می آوریم:
A(L-CT-I): تقریب طیفی چیشف $(k = \circ : N - 1) \in \mathbb{P}_M^\circ$ را به گونه ای پیدا می کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{r_{m+1}} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle = \langle V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega}.$$

A(L-CS-I): تقریب طیفی چیشف $(k = \circ : N - 1) \in \mathbb{P}_M^\circ$ را به گونه ای پیدا می کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{r_{m+1}} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle = \langle V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c f^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega}.$$

۲.۳ حالت دوم: معادله ی انتشار کسری-زمانی از مرتبه ی توزیعی شبه خطی

با استفاده از بسط سری تیلور داریم:

$$\begin{cases} Q(U^1) = Q(U^\circ) + Q'(U_\theta) \partial_t U(x, t_\tau) \Delta t, & k = \circ \\ Q(U^{k+1}) = 2Q(U^k) - Q(U^{k-1}) + O(\Delta t^2), & k \geq 1. \end{cases} \quad (6.3)$$

با جایگزین کردن $\mathcal{U}^{k+1}(x)$ با جواب تقریبی $u^{k+1}(x)$ مسئله نیمه گسسته زیر را به دست می آوریم:
طرح QL-CT-II: فرض کنید $u^\circ = h(x)$ داده شده است. اکنون $(k = \circ : M - 1)$ را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r_{m+1}} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} u^{k+1}(x) - \partial_x^\nu u^{k+1}(x) \\ = V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}(u^\circ, \dots, u^k) + \begin{cases} Q(u^\circ) + f^1(x), & k = \circ, \\ 2Q(u^k) - Q(u^{k-1}) + f^{k+1}(x), & k \geq 1, \end{cases} \\ u^{k+1}|_{x \in \partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1, \end{cases} \quad (7.3)$$

که در آن

$$V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}(u^\circ, \dots, u^k) = \sum_{j=1}^{r_{m+1}} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k).$$

طرح QL-CS-II: فرض کنید $u^\circ = h(x)$ داده شده است. اکنون $(k = \circ : M - 1)$ را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r_{m+1}} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} u^{k+1}(x) - \partial_x^\nu u^{k+1}(x) \\ = V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_{r_{m+1}}}(u^\circ, \dots, u^k) + \begin{cases} Q(u^\circ) + f^1(x), & k = \circ, \\ 2Q(u^k) - Q(u^{k-1}) + f^{k+1}(x), & k \geq 1, \end{cases} \\ u^{k+1}|_{x \in \partial\Omega} = \circ, & -1 \leq k \leq M-1, \end{cases} \quad (8.3)$$

که در آن

$$V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}}(u^\circ, \dots, u^k) = \sum_{j=1}^{2m+1} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} W^{\alpha_j}(u^\circ, \dots, u^k).$$

تعریف می‌کنیم:

$$G^k = \begin{cases} Q(u_M^\circ) + f^\circ, & k = \circ, \\ \gamma Q(u_M^k) - Q(u_M^{k-1}) + f^{k+1}, & k \geq 1. \end{cases}$$

جواب عددی را برای مسئله‌ی نیمه‌گسسته (۷.۳) و (۸.۳) در فضای \mathbb{P}_M° به دست می‌آوریم. جواب عددی $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ تقریب طیفی چیشف (۱) $A(QL-CT-II)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{2m+1} q_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle = \langle V^{I, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c G^k, v_M \rangle_{M, \omega}.$$

جواب عددی $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ تقریب طیفی چیشف (۲) $A(QL-CS-II)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که برای هر $v_M \in \mathbb{P}_M^\circ$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{2m+1} r_j \alpha_j^{-1} \Delta t^{-1} D_{\alpha_j, k+1}^{k+1} \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle_{M, \omega} + a_\omega \langle u_M^{k+1}, v_M \rangle = \langle V^{II, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_M^\circ, \dots, u_M^k), v_M \rangle_{M, \omega} + \langle I_M^c G^k, v_M \rangle_{M, \omega}.$$

۴ مثال‌های آزمایشی

در این بخش چندین مثال عددی برای آزمایش عمل کرد روش پیش‌نهادی ارائه می‌دهیم. برنامه‌ها با استفاده از نرم افزار Maple نوشته شده و روی کامپیوتر $GH - 3/0 @ 9700 \text{MHz} - Cori7$ با مشخصات $16G$ حافظه RAM اجرا شده است. پای‌داری و دقت روش پیش‌نهادی را برای مقادیر متفاوت M و N نشان می‌دهیم. (۱) (معیار اندازه‌گیری خطا) خطای مطلق ماکسیمم $e_\infty^{M,N}$ و خطای مانده $e_{rms}^{M,N}$ را با فرمول‌های زیر اندازه‌گیری می‌کنیم:

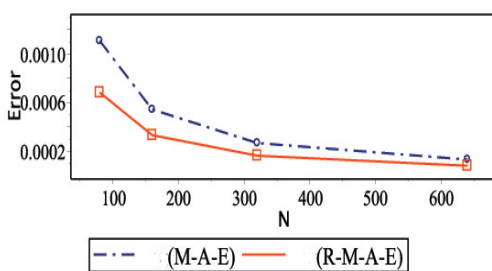
$$e_\infty^{M,N} = \max_{\circ \leq i \leq M} |u^N(z_i) - u_M^N(z_i)|,$$

۹

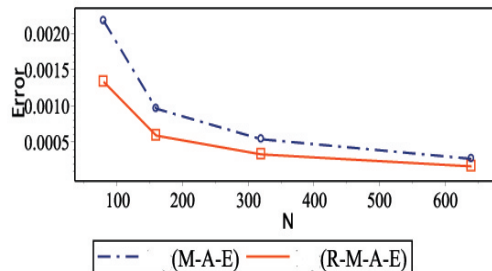
$$e_{rms}^{M,N} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{i=\circ}^M |u^N(z_i) - u_M^N(z_i)|^2}.$$

(۲) (سرعت هم‌گرایی) سرعت هم‌گرایی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\text{Ratio} = \log_\gamma \left[\frac{e_\infty^{M,N/2}}{e_\infty^{M,N}} \right].$$



(a۲) $A(QL-II)$ ($\alpha_1 = 0.22, \alpha_2 = 0.33$)



(a۱) $A(QL-II)$ ($\alpha_1 = 0.33, \alpha_2 = 0.41$)

شکل ۱: تغییرات $e_\infty^{M,N}$ و $e_{rms}^{M,N}$ نسبت به N با $M = 20$ (مثال ۲.۴).

N	$\alpha_1 = 0.31, \alpha_2 = 0.81$		Ratio	CPU time (s)
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$		
۴۰	$1.496104e-5$	$9.833155e-6$	-	۱۰.۱۲
۸۰	$3.740265e-6$	$2.448565e-6$	۲.۰۰۰۰	۱۵.۷۸
۱۶۰	$9.374433e-7$	$5.977709e-7$	۲.۰۰۰۰	۲۷.۵۴
N	$\alpha_1 = 0.71, \alpha_2 = 0.91$		Ratio	CPU time (s)
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$		
۴۰	$4.079099e-5$	$2.680651e-5$	-	
۸۰	$1.020525e-5$	$6.708319e-6$	۱.۹۹۸۹	
۱۶۰	$2.549636e-6$	$1.677646e-6$	۲.۰۰۰۹	

جدول ۱. A(L-I): مقادیر خطای $e_{\infty}^{M,N}$ و $e_{rms}^{M,N}$ با $M = 20$ (مثال ۱.۴).

N	$\nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.6$		Ratio	CPU time (s)
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$		
۴۰	$8.103846e-6$	$4.993480e-6$	-	۱۳.۵۸
۸۰	$2.020309e-6$	$1.247469e-6$	۲.۰۰۴۰	۱۷.۴۳
۱۶۰	$4.990285e-7$	$3.107298e-7$	۲.۰۱۷۴	۳۴.۱۵
۳۲۰	$1.238808e-7$	$7.650169e-8$	۲.۰۱۰۲	۴۳.۰۸
N	$\nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.4$		Ratio	CPU time (s)
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$		
۴۰	$1.477781e-6$	$9.134003e-7$	-	
۸۰	$3.635121e-7$	$2.272867e-7$	۲.۰۲۳۴	
۱۶۰	$9.118364e-8$	$5.580511e-8$	۱.۹۹۵۲	
۳۲۰	$2.485912e-8$	$1.363026e-8$	۱.۸۷۵۰	

جدول ۲. A(L-CT-I): مقادیر خطای $e_{\infty}^{M,N}$ و $e_{rms}^{M,N}$ با $M = 20$ و $N = 2m$ (مثال ۳.۴).

N	$\nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.6$		Ratio
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$	
۴۰	$3.356031e-6$	$2.063308e-6$	-
۸۰	$8.452458e-7$	$5.170424e-7$	۱.۹۸۹۳
۱۶۰	$2.175247e-7$	$1.305322e-7$	۱.۹۵۸۲
۳۲۰	$6.043273e-8$	$3.398115e-8$	۱.۸۴۷۸
N	$\nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.4$		Ratio
	$e_{\infty}^{M,N}$	$e_{rms}^{M,N}$	
۴۰	$4.719594e-7$	$9.134003e-7$	-
۸۰	$1.239782e-7$	$7.295224e-8$	۱.۹۲۸۶
۱۶۰	$3.697856e-8$	$1.914322e-8$	۱.۷۴۵۳
۳۲۰	$1.019452e-8$	$6.109389e-9$	۱.۸۵۸۹

جدول ۳. A(L-CS-I): مقادیر خطای $e_{\infty}^{M,N}$ و $e_{rms}^{M,N}$ با $M = 20$ و $N = 2m$ (مثال ۳.۴).

مثال ۱.۴. معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} {}^{CF}\partial_t^{\alpha_1}\mathcal{U}(x,t) + {}^{CF}\partial_t^{\alpha_2}\mathcal{U}(x,t) = \partial_x^2\mathcal{U}(x,t) + f(x,t), (x,t) \in (-1,1) \times (0,1], \\ \mathcal{U}(x,0) = \sin(2\pi x), x \in (-1,1) \\ \mathcal{U}(-1,t) = \mathcal{U}(1,t) = 0, t \in (0,1]. \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن

$$f(x,t) = +2e^t \sin(2\pi x) + 4e^t \sin(2\pi x)\pi^2 - (e^{\frac{\alpha_1 t}{-1+\alpha_1}} + e^{\frac{\alpha_2 t}{-1+\alpha_2}}) \sin(2\pi x).$$

جواب دقیق مثال ۱.۴ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathcal{U}(x,t) = e^t \sin(2\pi x).$$

نتایج عددی برای A(L-I): جدول ۱ نتایج عددی را برای A(L-I) با مقادیر $\alpha_1 = 0.91$, $\alpha_2 = 0.91$, $\alpha_1 = 0.93$, $\alpha_2 = 0.93$ و $\alpha_1 = 0.97$, $\alpha_2 = 0.97$ نشان می‌دهد. در این جدول مدت زمان اجرای برنامه گزارش شده است.

مثال ۲.۴. معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} {}^{CF}\partial_t^{\alpha_1}\mathcal{U}(x,t) + {}^{CF}\partial_t^{\alpha_2}\mathcal{U}(x,t) = \partial_x^2\mathcal{U}(x,t) - \sin(\mathcal{U}) + f(x,t), (x,t) \in (-1,1) \times (0,1], \\ \mathcal{U}(x,0) = \sin(\pi x), x \in (-1,1), \\ \mathcal{U}(-1,t) = \mathcal{U}(1,t) = 0, t \in (0,1]. \end{cases} \quad (2.4)$$

که در آن

$$f(x,t) = +2e^t \sin(\pi x) + e^t \sin(\pi x)\pi^2 - (e^{\frac{\alpha_1 t}{-1+\alpha_1}} + e^{\frac{\alpha_2 t}{-1+\alpha_2}}) \sin(\pi x) + \sin(e^t \sin(\pi x)).$$

جواب دقیق مثال ۲.۴ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathcal{U}(x,t) = e^t \sin(\pi x).$$

نتیجه عددی برای A(QL-II): تغییرات $e_{rms}^{M,N}$ و $e_{\infty}^{M,N}$ نسبت به N برای $\alpha_1 = 0.92$, $\alpha_2 = 0.92$, $\alpha_1 = 0.93$, $\alpha_2 = 0.93$ و $\alpha_1 = 0.97$, $\alpha_2 = 0.97$ در شکل ۱ (a1 - a2) نشان داده شده است.

مثال ۳.۴. معادلات انتشار کسری-زمانی مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \alpha^2 {}^{CF}\partial_t^{\alpha}\mathcal{U}(x,t) d\alpha = \partial_x^2\mathcal{U}(x,t) + f(x,t), (x,t) \in (-1,1) \times (0,1], \\ \mathcal{U}(x,0) = 0, x \in (-1,1) \\ \mathcal{U}(-1,t) = \mathcal{U}(1,t) = 0, t \in (0,1]. \end{cases}$$

که در آن

$$f(x,t) = (-8 \int_{\nu_1}^{\nu_2} (-\alpha + e^{\frac{-t\alpha}{-1+\alpha}} (\alpha - 1) - t\alpha + 1) d\alpha + 4t^2 \pi^2) \sin(\pi x).$$

جواب دقیق مثال ۳.۴ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathcal{U}(x,t) = 4t^2 \sin(\pi x).$$

نتایج عددی برای A(L-CT-I): جدول ۲ نتایج عددی را برای A(L-CT-I) با مقادیر $\nu_1 = 0.8$, $\nu_2 = 0.8$ و $\nu_1 = 0.8$, $\nu_2 = 0.6$ نشان می‌دهد. در این جدول مدت زمان اجرای برنامه گزارش شده است.

نتایج عددی برای A(L-CS-I): جدول ۳ نتایج عددی را برای A(L-CS-I) با مقادیر $\nu_1 = 0.8$ و $\nu_2 = 0.8$ و $\nu_1 = 0.8$, $\nu_2 = 0.6$ نشان می‌دهد. هم‌چنین عدد وضعیت ماتریس برای مقادیر مختلف N در جدول ۴ گزارش شده است.

N	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
CN	۱۴۰.۸۷	۲۸۵.۳۲	۷۸۱.۷۳	۱۰۲۱.۰۴

جدول ۴. عدد وضعیت ماتریس نهایی برای مقادیر مختلف N .

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا معادله‌ی انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای مبتنی بر یک عمل گر کسری جدید را در نظر گرفتیم و با استفاده از ترکیب روش تفاضل متناهی و روش طیفی چیشف یک جواب عددی برای این معادلات ارائه دادیم. همچنین توسعه‌ی معادلات انتشار کسری-زمانی چندجمله‌ای به معادلات مرتبه‌ی توزیعی را در نظر گرفتیم و یک آنالیز عددی روی این معادلات انجام دادیم. نشان دادیم که طرح‌های تفاضلی پیش‌نهادی بدون قیدوشرط پای‌دارند. تخمین‌هایی برای خطای زمانی-مکانی به دست آوردیم و ثابت کردیم که سرعت همگرایی روش پیش‌نهادی در زمان و مکان به ترتیب ۲ و ۳ است. در پایان، مثال‌های عددی آوردیم که نتایج نظری را تایید می‌کنند.

فهرست منابع

- [1] D. A. Benson, R. Schumer, M. M. Meerschaert, and S. W. Wheatcraft, Fractional dispersion, Levy motion, and the MADE tracer tests, *Transport in porous media*, **42** (2001), 211-240.
- [2] B. OShaughnessy and I. Procaccia, Analytical solutions for diffusion on fractal objects, *Physical review letters*, **54** (1985), 455.
- [3] M. R. Ubriaco, A simple mathematical model for anomalous diffusion via Fisher's information theory, *Physics Letters*, **373** (2009), 4017-4021.
- [4] M. Fardi, A kernel-based pseudo-spectral method for multi-term and distributed order time-fractional diffusion equations, *Numerical Methods Partial Differential Equations*, **39**(2023), 2630-2651.
- [5] M. Fardi, S.-K.-Q. Al-Omari, and S. Araci, S. A pseudo-spectral method based on reproducing kernel for solving the time-fractional diffusion-wave equation, *Advance in Continuous Discrete Models*, **54** (2022), 1-14.
- [6] M. Fardi, M. A. Zaky, and A. S. Hendy, Nonuniform difference schemes for multi-term and distributed-order fractional parabolic equations with fractional Laplacian, *Mathematic and Computers in Simulation*, **206** (2023), 614-635.
- [7] M. Fardi, Y. Khan, A fast difference scheme on a graded mesh for time-fractional and space distributed-order diffusion equation with nonsmooth data, *International Journal of Modern Physics B*, **36** (2022), 2250076.
- [8] M. Fardi, and M. Ghasemi, A numerical solution strategy based on error analysis for time-fractional mobile/immobile transport model, *Soft Computing*, **25** (2021), 11307-11331.
- [9] S. Mohammadi, M. Ghasemi, and M. Fardi, A fast Fourier spectral exponential time-differencing method for solving the time- fractional mobile-immobile advection-dispersion equation, *Computational and Applied Mathematics*, **41** (2022), 264.
- [10] M. Fardi and E. Amini, Numerical investigation of a new difference scheme on a graded mesh for solving the time-space fractional sub-diffusion equations with nonsmooth solutions, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **12** (2022), 212-231.

- [11] E. Amini, Optimal Control Problems: Convergence and Error Analysis in Reproducing Kernel Hilbert Spaces, *Control and Optimization in Applied Mathematics*, **6** (2021), 53-77.
- [12] Z. Hao and W. Cao, An improved algorithm based on finite difference schemes for fractional boundary value problems with nonsmooth solution, *Journal of Scientific Computing*, **73** (2017), 395-415.
- [13] M. M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations, *Journal of computational and applied mathematics*, **172** (2004), 65-77.
- [14] Z. Zhao, Y. Zheng, and P. Guo, A Galerkin finite element method for a class of time-space fractional differential equation with nonsmooth data, *Journal of Scientific Computing*, **70** (2017), 386-406.
- [15] Z. Hao, M. Park, G. Lin and Z. Cai, Finite element method for two-sided fractional differential equations with variable coefficients: Galerkin approach, *Journal of Scientific Computing*, **79** (2019), 700-717.
- [16] F. Zeng, Z. Mao, and G. E. Karniadakis, A generalized spectral collocation method with tunable accuracy for fractional differential equations with end-point singularities, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **39**(2017), A360-A383.
- [17] Z. Zhang, F. Zeng, and G. E. Karniadakis, Optimal error estimates of spectral Petrov-Galerkin and collocation methods for initial value problems of fractional differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53** (2015), 2074-2096.
- [18] Q. Xu and J. S. Hesthaven, Discontinuous Galerkin method for fractional convection-diffusion equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **52**(2014), 405-423.
- [19] A. Simmons, Q. Yang, and T. Moroney, A finite volume method for two-sided fractional diffusion equations on non-uniform meshes, *Journal of Computational Physics*, **335** (2017), 747-759.
- [20] M. Caputo, and M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl*, **1** (2015), 1-13.
- [21] J. Losada, and J. J. Nieto, Properties of a new fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl*, **1** (2015), 87-92.
- [22] M. Caputo, and M. Fabrizio, Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels, *Progr. Fract. Differ. Appl*, **2** (2016), 1-11.
- [23] M. A. Dokuyucu, E. Celik, H. Bulut, and H. M. Baskonus, Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative, *The European Physical Journal Plus*, **133**(2018), 1-6.
- [24] S. Bushnaq, S. A. Khan, K. Shah, and G. Zaman, Mathematical analysis of HIV/AIDS infection model with Caputo-Fabrizio fractional derivative, *Cogent Mathematics & Statistics*, **5** (2018), 1432521.
- [25] D. Baleanu, A. Jajarmi, H. Mohammadi, and S. Rezapour, A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, **134** (2020), 109705.
- [26] L. Zhengguang, A. Cheng, and L. Xiaoli, A second-order finite difference scheme for quasilinear time fractional parabolic equation based on new fractional derivative, *International Journal of Computer Mathematics*, **95** (2018), 396-411.

- [27] J. Shen, T. Tang, and L. Wang, Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications, Springer, 2013.
- [28] C. Canuto, and A. Quarteroni, Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces, Mathematics of Computation, **38** (1982), 67-86.
- [29] A. Quarteroni and A. Valli, Numerical approximation of partial differential equations, Springer Science & Business Media, 2008.
- [30] C. Bernardi and Y. Maday, Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques, Springer, 1992.



Numerical investigation and error estimate for multi-term time-fractional diffusion equations based on a new fractional operator

M. Fardi^{1, †}, E. Amini²

⁽¹⁾ Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, Shahrekord University, Shahrekord, P. O. Box 115, Iran.

⁽²⁾ Department of Mathematics, Payme Noor University, P. O. Box 19395-4697 Tehran, Iran.

Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 2023/1/14

Accepted: 2023/5/6

Abstract: In this paper, a numerical method is provided for solving multi-term time-fractional diffusion equations associated with a new fractional operator. A semi-discrete scheme is obtained in temporal direction based on the finite difference method afterwards, a Chebyshev-spectral method is used for spatial discretization. Also, the stability and error analysis are investigated. Moreover, the multi-term time-fractional diffusion equation is extended to a distributed order diffusion equation and numerical analysis has been done on it. Finally, the theoretical results are confirmed using some numerical examples.

Keywords: Time fractional diffusion equation; Spectral Approximation; Stability analysis; Error analysis.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: m.fardi@sku.ac.ir (M. Fardi).