مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۱، ص ۵۲-۵۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2023.41746.2081

یادداشتی کوتاه بر ویژگی ماروت در حلقه‌ی توابع پیوسته

محمدعلی سیاوشی [×]، فریماه فرخ‌پی

گروه ریاضی، دانشکده علوم کامپیوتر و ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۱۳

چکیده: قرار می‌دهیم $X = Y \cup \{\omega\}$ که $\omega \notin Y$ و توپولوژی روی X را به این صورت در نظر می‌گیریم که Y دارای توپولوژی گسسته است و همسایگی های ω متمم زیرمجموعه‌های بسته و گسسته در توپولوژی رویه ریمانی Yاند. ایدآل I از $C^*(X)$ را که حلقه‌ی توابع پیوسته حقیقی-مقدار کران‌دار روی X است، درنظر می‌گیریم. یک نتیجه از ادلر و ویلیامز نشان می‌دهد که ایدآل I شامل یک عضو منظم است اگر و تنها اگر توسط مجموعه‌ای ازعناصرمنظم تولید شود. با الهام گرفتن از این نتیجه، در این مقاله به بررسی شرایطی روی فضای توپولوژی X می‌پردازیم که تحت آن‌ها حلقه‌ی توابع پیوسته حقیقی-مقدار روی X ماروت باشد. به‌علاوه، در این مقاله یک شرط کافی را برای اینکه یک حلقه‌ی شبه-بزو یک حلقه‌ی جمعی منظم شود، ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌ی جمعی‌منظم، حلقه‌ی ماروت، عنصر منظم، حلقه‌ی توابع پیوسته

رده‌بندی ریاضی: 16U60; 54C40

۱ مقدمه

در این مقاله، همه‌ی حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یک‌دار هستند. فضاهای توپولوژی، هاسدورف و کاملامنظم درنظر گرفته شده‌اند. برای فضای X، $C(X)$ را حلقه‌ی تمام توابع پیوسته حقیقی-مقدار روی X در نظر می‌گیریم. درهمین راستا، از نماد $C^*(X)$ برای حلقه‌ی تمام توابع پیوسته حقیقی-مقدار و کران‌دار روی X استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را با $\mathrm{Zd}(R)$ نمایش می‌دهیم. عناصری از حلقه که مقسوم‌علیه صفر نیستند را منظم می‌نامیم و مجموعه‌ی همه‌ی عناصر منظم حلقه R را با $\mathrm{reg}(R)$ نمایش می‌دهیم. برای هر $f \in C(X)$، مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) = 0\}$ را صفر-مجموعه‌ی f می‌نامیم و با نماد $Z(f)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین متمم $Z(f)$ را متمم صفر-مجموعه f نامیده و آن را با نماد $\operatorname{coz} f$ نمایش می‌دهیم. به‌راحتی دیده می‌شود که $f \in C(X)$ عنصری منظم است اگر و تنها اگر $\operatorname{int}_X Z(f) = \emptyset$. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه‌ی R باشد، در این صورت $S^{-1}R$ حلقه‌ی کسرهای هم‌ارز به صورت $\frac{r}{s}$ است که در آن $r \in R$، $s \in S$ و جمع و ضرب به صورت معمول تعریف می‌شوند. اگر S مجموعه‌ی

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: m.siavoshi@scu.ac.ir (M.A. Siavoshi), farimah-farrokhpay@scu.ac.ir (F. Farrokhpay)

عناصر منظم حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $S^{-1}R$ حلقه‌ی کلاسیک خارج‌قسمت‌های R نامیده شده و با نماد $Q_{cl}(R)$ نمایش داده می‌شود. مطابق معمول، از نماد $q(X)$ برای نمایش حلقه‌ی کلاسیک خارج‌قسمت‌های حلقه‌ی $C(X)$ استفاده می‌کنیم. برای تعاریف، و نمادهای دیگر به مرجع [۶] مراجعه شود.

در ابتدا، باید آنچه به ما انگیزه‌ی نوشتن این مقاله را داده است، بیان کنیم. ادلر و ویلیامز در [۱، گزاره ۴.۲]، برای حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی کران‌دار روی یک فضای توپولوژی خاص، معادل‌هایی برای یک ایدآل را که شامل یک عنصر منظم است ، بیان کرده‌اند که در زیر آن‌ها را بدون اثبات می‌آوریم.

گزاره ۱.۱. اگر قرار دهیم $X = Y \cup \{\omega\}$ که $\omega \notin Y$ و توپولوژی روی X به این صورت تعریف شود که Y دارای توپولوژی گسسته است و همسایگی‌های ω متمم زیرمجموعه‌های بسته و گسسته در توپولوژی رویه ریمانی Y باشند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برای ایدآل I از $C^*(X)$ معادل‌اند.

۱. هر عضو از ایدآل I مضربی از یک عضو منظم در I است.

۲. ایدآل I توسط عناصر منظم تولید می‌شود.

۳. ایدآل I شامل یک عضو منظم است.

با نگاه به گزاره‌ی بالا، به‌راحتی دیده می‌شود که نتیجه‌گیری $(۲) \Leftarrow (۳)$ در هر حلقه‌ای برقرار است. سؤالی که در این‌جا مطرح است به این صورت است که آیا نتیجه‌گیری $(۳) \Leftarrow (۲)$ در هر حلقه‌ای همیشه برقرار است؟ در ادامه با مثالی به این سوال پاسخ منفی خواهیم داد.

مثال ۲.۱. قرار می‌دهیم، $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$. می‌دانیم که D یک حوزه‌ی صحیح و $M = (۱ + \sqrt{-۵})\mathbb{Z} + ۲\mathbb{Z}$ یک ایدآل ماکسیمال از D است. ایدآل M یک ایدآل اصلی نیست ولی $M^۲ = < ۲ >$ یک ایدآل اصلی است. D-مدول $A = \oplus\{D/Q : Q \neq M\}$ است Q یک ایدآل ماکسیمال از D را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم R حلقه‌ی $D(+)A$ باشد که براساس ایدآل‌سازی D-مدول A با جمع و ضرب زیر تعریف می‌شود. برای هر $d, d' \in D$ و هر $a, a' \in A$ داریم:

$$(d, a) + (d', a') = (d + d', a + a'),$$

$$(d, a)(d', a') = (dd', ad' + a'd).$$

برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد ایدآل‌سازی مدول‌ها به [۹] مراجعه شود. به‌راحتی دیده می‌شود که $M(+)A$ یک ایدآل منظم است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که در این حلقه همه‌ی ایدآل‌هایی که توسط عناصر منظم تولید می‌شوند شامل فقط ایدآل‌های اصلی‌اند. ولی ایدآل $M(+)A$ یک ایدآل اصلی نیست، پس توسط عناصر منظم تولید نمی‌شود.

حال که نتیجه‌ی ادلر–ویلیامز و مثال قبل را دیدیم، به نظر می‌رسد بررسی شرایطی که یک ایدآل منظم توسط مجموعه‌ای از عناصر منظم تولید می‌شود، بسیار طبیعی و جالب است. ما در این مقاله تمرکز خود را بر این شرایط در حلقه‌ی توابع پیوسته قرار خواهیم داد.

در این مقاله که به نظر می‌رسد اولین گام در تحقیق سؤال بالا در نظریه‌ی حلقه‌های توابع پیوسته است، ما سعی داریم این سؤال و ویژگی را در برخی از فضاهای متعارفی که مورد توجه پژوهش‌گران این رشته است، بررسی کنیم. امیدواریم که کاری که در این‌جا انجام می‌دهیم زمینه‌ی تحقیقات آینده را در این راستا فراهم کند.

۲ ویژگی جمعی‌منظم در حلقه‌ی توابع پیوسته

در ابتدای این بخش، به یک ویژگی در نظریه‌ی حلقه‌ها اشاره می‌کنیم که به پاس معرفی آن توسط جین ماروت به حلقه‌ای با این خاصیت، حلقه‌ی ماروت می گوییم. شایسته است در این‌جا یادآور شویم که جین ماروت را می‌توان جزو نخستین افرادی نام برد که نظریه‌ی ایدآل‌ها را از حوزه‌های صحیح به حلقه‌های جابه‌جایی با مقسوم‌علیه صفر گسترش دادند. درسال ۱۹۶۸، ماروت به مطالعه‌ی حلقه‌هایی پرداخت که در آن‌ها هر ایدآل منظم توسط یک مجموعه ازعضوهای منظم تولید می‌شوند، او این ویژگی را ویژگی P نامید. امروزه حلقه‌هایی با ویژگی P را حلقه‌ی ماروت می‌نامند.

تعریف ۱.۲. حلقه‌ی R را ماروت می‌گویند هرگاه هر ایدآل منظم آن توسط یک مجموعه از عضوهای منظم تولید شود.

با توجه به آن‌چه تاکنون گفته شد، نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۲.۲. فرض کنیم $X = Y \cup \{\omega\}$ که $\omega \notin Y$ و توپولوژی روی X به این صورت تعریف شود که Y دارای توپولوژی گسسته است و همسایگی‌های ω متمم زیرمجموعه‌های بسته و گسسته در توپولوژی رویه ریمانی Y اند. در این صورت $C^*(X)$ یک حلقه‌ی ماروت است.

در ادامه، تعریف زیرکلاسی از کلاس حلقه‌های ماروت را به نام حلقه‌های جمعی‌منظم، می‌آوریم و سپس به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آن $C(X)$ یا $C^*(X)$ جمعی‌منظم‌اند. حلقه‌های جمعی‌منظم توسط گیلمر و هاکوبا [۷] معرفی شدند.

تعریف ۳.۲. حلقه‌ی R را حلقه‌ی جمعی‌منظم نامیم هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

۱. برای هر عضو $g \in R$ و هر عضو منظم $f \in R$، عضو $t \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g + ft$ منظم باشد.

۲. برای هر $x \in Q_{cl}(R)$، عضو r درحلقه ی R موجود باشد به‌طوری‌که $x + r$ یک عضو منظم در $Q_{cl}(R)$ باشد.

هرچند که نتیجه‌ی زیر جدید نیست، اما برای راحتی خواننده اثباتی از آن را می‌آوریم.

لم ۴.۲. هر حلقه‌ی جمعی‌منظم یک حلقه ماروت است.

اثبات. فرض کنیم I یک ایدآل منظم از حلقه‌ی جمعی‌منظم R است و $g \in I$. بدون این‌که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $g \in \mathrm{Zd}(R)$. چون I یک ایدآل منظم است، پس $f \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $f \in \mathrm{reg}(R)$. با توجه به این که R جمعی‌منظم است، $t \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $g + ft$ منظم است. اکنون قرار می‌دهیم $g + ft = h$. بدیهی است که $h \in I$ و $g = h - tf$. این بدین معنا است که I توسط مجموعه‌ای از عناصرمنظم تولید می‌شود و اثبات تمام است. □

در این‌جا باید حقیقتی تاریخی را بیان کنیم. شروع مطالعه روی حلقه‌های جمعی‌منظم به نتایج ماروت در [۱۳] بر می‌گردد، اما این نام‌گذاری توسط گیلمر و هاکوبا در [۷] انجام شد. درستی یا نادرستی عکس لم ۴.۲ که در سال ۱۹۶۸ بیان شده بود تا سال ۱۹۸۴ بدون پاسخ ماند، تا این که ماتسودا [۱۵] با یک مثال نشان داد که عکس لم ۴.۲ برقرار نیست. درواقع ماتسودا به سؤالی از پورتلی و اشپنگر [۱۶] پاسخ منفی داد مبنی بر اینکه اگر در حلقه‌ای هرایدآل منظم توسط مجموعه‌ای از عناصر منظم تولید شود، لزوما حلقه دارای ویژگی FU نیست. یادآوری می‌کنیم که گوییم حلقه R دارای ویژگی FU است هرگاه در صورتی که برای خانواده‌ای از ایدآل‌های منظم $J_1, \ldots, J_n$ و ایدآل I داشته باشیم $\mathrm{reg}(I) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ آن‌گاه نتیجه شود که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. در این‌جا باید اشاره کنیم که که پورتلی و اشپنگر در سال ۱۹۸۳ نشان داده بودند که هر حلقه‌ی جمعی‌منظم دارای ویژگی FU است.

لم ۵.۲. اگر $C^*(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم باشد، آن‌گاه $C(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

اثبات. فرض کنیم $g, f \in C(X)$ و f عنصری منظم باشد. تمرین $\mathrm{E}1$ در [۶]، ایجاب می‌کند که یکه‌های مثبتی مانند $u, v \in C(X)$ وجود دارند به‌طوری‌که $ug = (-1 \vee g) \wedge 1$ و $vf = (-1 \vee f) \wedge 1$. با توجه به فرض، $t \in C^*(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ug + vft$ یک عنصر منظم در $C^*(X)$ است و در نتیجه $g + fu^{-1}vt$ نیز یک عضو منظم خواهد بود و اثبات تمام است. □

در این لحظه متاسفانه در مورد این‌که آیا برگشت لم قبل درست است یا خیر، ایده‌ای نداریم.

حلقه‌ی R را منظم فون‌نیومن می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $x = x^2y$. حلقه‌ی R را کلاسیک می‌نامیم، اگر با حلقه‌ی کلاسیک خارج‌قسمت‌هایش برابر باشد؛ به‌عبارت دیگر هر یک از عناصر حلقه‌ی کلاسیک، مقسوم‌علیه صفر یا یکه است. برای هر حلقه‌ی R حلقه‌ی کلاسیک خارج‌قسمت‌های آن و حلقه‌های فون‌نیومن، مثال‌هایی از حلقه‌های کلاسیک‌اند.

اکنون یادآوری می‌کنیم که چه زمانی حلقه‌ی توابع پیوسته، یک حلقه‌ی کلاسیک است، برای این منظور ما به تعریف زیر و قضیه‌ی بعدی نیاز داریم.

تعریف ۶.۲. فضای توپولوژی X را تقریبا P-فضا گوییم هرگاه هر G_δ-مجموعه‌ی ناتهی در آن دارای درون ناتهی باشد.

قضیه ۷.۲. برای فضای توپولوژی X احکام زیر معادل‌اند:

۱. X تقریبا P-فضا است.

۲. هر صفر-مجموعه ناتهی، دارای درون ناتهی است.

۳. حلقه‌ی $C(X)$ یک حلقه‌ی کلاسیک است.

اثبات. برای برهان به مراجع [۳] و [۱۱] مراجعه شود. □

گزاره **۸.۲.** هر حلقه‌ی کلاسیک، یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

اثبات. فرض کنیم $f, g \in R$ و f منظم باشد. باتوجه به فرض f وارون پذیرخواهد بود. عضو $t = f^{-1}(-g + 1) \in R$ را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که $g + ft = 1$ و این بدین معنی است که R یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است. □

با کمک قضیه ۷.۲ و گزاره ۸.۲، نتیجه‌ی زیر را بیان می کنیم.

نتیجه **۹.۲.** اگر X یک تقریبا P–فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

حلقه‌ی R را تکمیل شده گوییم هرگاه برای هر $a \in R$، عضو $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ab = 0$ و $a + b$ منظم باشد. برای مثال، حلقه‌های بئرضعیف حلقه‌هایی تکمیل شده‌اند (حلقه‌ی R را بئرضعیف گویند هرگاه پوچساز هر عضو آن توسط یک خودتوان تولید شود). به آسانی می‌توان دید که حلقه‌های تکمیل شده، کاهش‌یافته‌اند.
حلقه‌ی R را کاهش‌یافته می‌نامیم هرگاه عضو پوچتوان نابدیهی نداشته باشد. با توجه به [۹، نتیجه ۳.۳] و [۱۰، قضیه ۵.۲] حلقه‌ی R تکمیل شده است اگر و تنها اگر حلقه‌ی کلاسیک خارج قسمت های آن، $Q_{cl}(R)$، یک حلقه‌ی فون‌نیومن منظم باشد.
گزاره‌ی زیر برای محققین مربوطه شناخته شده است، اما برای تکمیل ارائه‌ی خود برهانی از آن را ذکر می‌کنیم.

گزاره **۱۰.۲.** اگر R یک حلقه‌ی تکمیل شده باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

اثبات. فرض کنیم $f \in \operatorname{reg}(R)$ و $g \in \operatorname{Zd}(R)$. با توجه به فرض، $t \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $gt = 0$ و $g + t$ منظم است. کافی است نشان دهیم که $g + tf$ منظم است. فرض می‌کنیم $x \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $x(g + tf) = 0$. بنابراین $xg = -xtf$ و داریم $xg^2 = -xtfg = 0$ و در نتیجه $(xg)^2 = 0$. از آن‌جا که R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته است، نتیجه می‌شود $xg = 0$. با توجه به این که $x(g + tf) = 0$، پس داریم $xtf = 0$. اما f منظم است، پس $xt = 0$. بنابراین $x(g + t) = 0$ که یک تناقض است. پس $g + tf$ منظم و کار تمام است. □

حال توجه خود را به شرایطی که باعث شود حلقه‌ی توابع پیوسته یک حلقه‌ی تکمیل شده باشد، جلب می‌کنیم. برای ورود به این مسیر تعریف و قضیه‌ی بعد را یادآور می‌شویم.

تعریف **۱۱.۲.** فضای توپولوژی X را cc–فضا نامند هرگاه برای هر متمم صفر–مجموعه‌ی V از X، یک متمم صفر–مجموعه‌ی مجزایی مانند V' وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V \cup V'$ در X چگال باشد.

قضیه **۱۲.۲.** برای فضای توپولوژی X احکام زیر معادل‌اند:

۱. X یک cc–فضا است.

۲. $\operatorname{Min}(C(X))$ فشرده است.

۳. $Q_{cl}(C(X))$ یک حلقه‌ی فون نیومن منظم است.

۴. برای هر $f \in C(X)$، $f' \in C(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ff' = 0$ و $|f| + |f'|$ یک عضو منظم است.

اثبات. برای برهان به مراجع [۴] و [۸] مراجعه شود. □

به عنوان یک کاربرد از گزاره ۱۰.۲ و قضیه ۱۲.۲ نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه **۱۳.۲.** اگر X یک cc–فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

در زیر تعمیمی از نتیجه‌ی قبل را بیان می‌کنیم. ابتدا کلاسی از فضاهای توپولوژی را یادآوری می‌کنیم که شامل کلاس cc–فضاها می‌باشند. تعریف زیر از مرجع [۱۰] گرفته شده است.

تعریف **۱۴.۲.** فضای X را به‌طورضعیف cc–فضا گوییم هرگاه اگر C_1, C_2 دو متمم‌صفرمجموعه‌ی جدا از هم در X باشند آن‌گاه دو متمم‌صفرمجموعه مانند D_1, D_2 از X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $C_1 \subseteq D_1$، $C_2 \subseteq D_2$ و $D_1 \cup D_2$ یک زیرمجموعه‌ی چگال در X باشد.

گزاره **۱۵.۲.** اگر X یک فضای به‌طورضعیف cc–فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

اثبات. اثبات ما مبتنی بر نتیجه‌ای است که در [۱۰، قضیه ۴.۵] آمده است و بیان می‌کند که فضای X به‌طورضعیف cc–فضا است اگر و تنها اگر برای هر $f \in q(X)$، عضو وارون‌پذیر $u \in q(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f = u\,|f|$. حال به اثبات گزاره برمی‌گردیم. فرض می‌کنیم $f \in q(X)$. با توجه به آن‌چه بیان شد، عضو وارون‌پذیر $u = \frac{r}{s} \in q(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f = \frac{r}{s}\,|f|$. داریم

$$f + rs = \frac{r}{s}\,|f| + rs = rs(\frac{۱}{s^۲}\,|f| + ۱).$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\frac{۱}{s^۲}\,|f| + ۱$ یک عضو وارون‌پذیر است و درنتیجه $f + rs$ یک عضو منظم در $q(X)$ است. بنابراین با کمک بند دوم از تعریف ۳.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $C(X)$ یک حلقه‌ی جمعی‌منظم است.

□

حلقه‌ی R را شبه–بزو گوییم هرگاه هر ایدآل منظم متناهیا تولید شده‌ی آن، اصلی باشد. حلقه‌های شبه–بزو را گاهی بزو منظم نیز می نامند [۱۲]. بدیهی است که هر حلقه‌ی بزو، یک حلقه‌ی شبه–بزو است ولی عکس این مطلب درست نیست.

گزاره زیر را می‌توان از قضیه ۱.۷ در [۹] نتیجه گرفت.

گزاره ۱۶.۲. هر حلقه‌ی شبه–بزو یک حلقه‌ی ماروت است.

قبل از بیان نتیجه‌ی بعد، یادآور می‌شویم که فضای X را F–فضا می‌نامیم هرگاه هر متمم صفر–مجموعه‌ی از X، C^*–نشانده در X باشد. فضای X را شبه–F–فضا می‌نامند هرگاه هر متمم صفر–مجموعه‌ی چگال از X، C^*–نشانده در X باشد. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد شبه–F–فضاها به منبع [۵] مراجعه شود. بدیهی است که هر F–فضا یک شبه–F–فضا است ولی عکس آن برقرار نیست. برای مثال فضای فشرده‌ساخت تک‌نقطه‌ای از یک فضای گسسته ناشمارا یک شبه–F–فضا است که F–فضا نیست. در [۱۴] نشان داده شده است که فضای X یک شبه–F–فضا است اگر و تنها اگر $C(X)$ یک حلقه‌ی شبه–بزو باشد.

نتیجه ۱۷.۲. اگر X یک شبه–F–فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ یک حلقه‌ی ماروت است.

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، ویژگی ماروت‌بودن ضعیف‌تر از ویژگی جمعی منظم است. با نگاه به گزاره ۱۶.۲ ممکن است، حدس زده شود که با جای‌گذاری عبارت "جمعی منظم" به جای "ماروت"، باز گزاره برقرار است، اما مثالی از لوکاس در منبع [۱۲] این حدس را رد می‌کند. درنتیجه، طبیعی به نظر می‌رسد که پرسیده شود چه زمانی یک حلقه‌ی شبه–بزو ویژگی جمعی منظم را دارا است. اگر چه ما نتوانستیم به این سؤال به طور کامل پاسخ دهیم، اما یک شرط کافی در این مسیر پیدا کردیم که تعمیمی از گزاره ۱۳ در منبع [۱۷] است. قبل از بیان این نتیجه، ابتدا یادآوری می‌کنیم که گوییم حلقه‌ی R دارای محدوده منظم ۱ است هرگاه، برای $a, b \in R$ اگر $Ra + Rb = R$، آنگاه عضوی مانند $x \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که عضو $a + bx$ منظم باشد، برای اطلاعات بیش‌تر به منبع [۱۷] مراجعه شود.

قضیه ۱۸.۲. هر حلقه‌ی شبه–بزو که دارای محدوده منظم ۱ باشد، یک حلقه‌ی جمعی منظم است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شبه–بزو با محدوده منظم ۱، $a, b \in R$ و همچنین b یک عضو منظم باشد. با توجه به فرض، ایدآل $< a, b >$ یک ایدآل اصلی است. درنتیجه عضو منظمی مانند $c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $< a, b >=< c >$. پس عضوهایی مانند $x, y \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $a = cx$ و $b = cy$. هم‌چنین، عضوهایی مانند $d, t \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $ad + bt = c$. بنابراین $cxd + cyt = c$ و درنتیجه داریم $(xd + yt - ۱)c = ۰$. با توجه به این‌که c یک عضو منظم است، می‌توان نتیجه گرفت که $xd + yt = ۱$. این بدین معنا است که $Rx + Ry = R$. با توجه به اینکه حلقه‌ی R دارای ویژگی محدوده منظم ۱ است، پس عضوی مانند $z \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $x + yz$ یک عضو منظم است. قرار می‌دهیم $x + yz = r$. درنتیجه داریم $cx + cyz = cr$ و بنابراین $a + bz = cr$ یک عضو منظم است. □

این یادداشت را با مثال زیر که نشان می‌دهد عکس قضیه ۱۸.۲ درحالت کلی برقرار نیست، به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱۹.۲. فرض کنیم $\mathbb{H} = \beta[۰, \infty) \setminus [۰, \infty)$. به‌آسانی می‌توان دید که $[۰, \infty)$ موضعا فشرده و فشرده حقیقی است. درنتیجه با کمک [۱۱، مثال ۴]، $\mathbb{H}$ تقریبا P–فضا است و ازاین‌رو $C(\mathbb{H})$ یک حلقه‌ی کلاسیک است. بنابراین با کمک گزاره ۸.۲، $C(\mathbb{H})$ یک حلقه با محدوده منظم ۱ است.

به‌آسانی دیده می‌شود که یک حلقه‌ی کلاسیک دارای محدوده منظم ۱ است اگر و تنها اگر دارای محدوده پایدار ۱ باشد. یادآوری می‌کنیم که حلقه‌ی R را دارای محدوده پایدار ۱ گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$، $Ra + Rb = R$ نتیجه شود که $x \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a + bx$ یک عضو وارون‌پذیر در R است. می‌دانیم که فضای X قویا صفربعدی است اگر و تنها اگر $C(X)$ یک حلقه با محدوده پایدار ۱ باشد. برای اطلاع بیشتر به منبع [۲] مراجعه شود. با توجه به [۶، صفحه ۲۱۱]، فضای $\mathbb{H}$ یک F–فضای فشرده همبند است. بنابراین فضای $\mathbb{H}$ قویا صفربعدی نیست، درنتیجه $C(\mathbb{H})$ دارای محدوده پایدار ۱ نیست. از طرف دیگر، همان‌گونه که بیان شد $C(\mathbb{H})$ یک حلقه‌ی کلاسیک است، پس $C(\mathbb{H})$ دارای محدوده منظم ۱ نیست.

سپاسگزاری

نویسندگان بر خود لازم می‌دانند از داوران محترم به‌خاطر مطالعه‌ی دقیق این مقاله و نظرات ارزشمند ایشان که به بهبود مقاله کمک شایانی کرد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را داشته باشند. شماره گرنت: (محمد علی سیاوشی SCU.MM۱۴۰۱.۸۱۳).

فهرست منابع

[1] A. Adler and R.D. Williams, *Transferring results from rings of continuous functions to rings of analytic functions*, Canadian J. Math. **27** (1975) 75-87.

[2] F. Azarpanah, F. Farokhpay and E. Ghashghaei, *Annihilator-stability and unique generation in $C(X)$*, J. Algebra Appl. **18** (2019) 1950122, 16 pp.

[3] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezai Aliabad, *On z°-ideals in $C(X)$*, Fund. Math. **160** (1999) 15-25.

[4] F. Azarpanah and A.R. Salehi, *Ideal structure of the classical ring of quotients of $C(X)$*, Topology Appl. **209** (2016) 170-180.

[5] F. Dashiell, A. Hager and M. Henriksen, *Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions*, Can. J. Math. **32** (1980) 657-685.

[6] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, The University Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[7] R. Gilmer and J. Huckaba, *Δ-Rings*, J. Algebra **28** (1974) 414-432.

[8] M. Henriksen and R.G. Woods, *Cozero complemented spaces; when the space of minimal prime ideals of a $C(X)$ is compact*, Topology Appl. **141** (2004) 147-170.

[9] J.A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero divisors*, Monographs and Text-books in Pure and Applied Mathematics 117, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[10] M. L. Knox, R. Levy, W. Wm. McGovern and J. Shapiro, *Generalizations of complemented rings with applications to rings of functions*, J. Alg. Appl. **8** (2009) 17-40.

[11] R. Levy, *Almost-P-spaces*, Canadian J. Math. **29** (1977) 284-288.

[12] T.G. Lucas, *Weakly additively regular rings and special families of prime ideals*, Palest. J. Math. **7** (2018) 14-31.

[13] J. Marot, *Extension de la notion d'anneau valuation*, Dept. Math. Faculte des Sci. de Brest (1968), 46 pp. et 39 pp. de complements.

[14] J. Martinez and S. Woodward, *Bézout and Prüfer f-rings*, Comm. Algebra **20** (1992) 2975-2989.

[15] R. Matsuda, *On Marot rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **60** (1984) 134-137.

[16] D. Portelli and W. Spangher, *Krull rings with zero divisors*, Comm. Algebra **11** (1983) 1817-1851.

[17] B.V. Zabavsky, *Type conditions of stable range for identification of qualitative generalized classes of rings*, Algebra Discrete Math. **26** (2018) 144-152.

A short note on the Marot property in rings of continuous functions

F. Farrokhpay . , M.A. Siavoshi †

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 2022/9/25 Accepted: 2023/5/3

Abstract: Let $X = Y \cup \{\omega\}$ where $\omega \notin Y$, topologized by equipping Y with the discrete topology, and by letting deleted neighborhoods of ω consist of complements of closed discrete subsets of Y in its Riemann surface topology. Assume that I is an ideal of $C^*(X)$ where $C^*(X)$ is the ring of all bounded real-valued continuous functions on X. A result of Adler and Williams showed that I contains a regular element if and only if a set of regular elements generates I. In this note, we obtain some conditions on X for which the rings of continuous functions on X are Marot. Moreover, this paper gives a sufficient condition for a quasi-Bézout ring to be additively regular.

Keywords: Additively regular ring, Marot ring, regular element, ring of continuous functions.

†Corresponding author.

E-mail addresses: farimah-farrokhpay@scu.ac.ir (F. Farrokhpay), m.siavoshi@scu.ac.ir (M.A. Siavoshi)