مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۱، ص ۷۹-۹۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.42660.2122

ساختار نگه‌دارنده‌های خطی قوی مهتری درجه

یامین سیاری [×]، احمد محمدحسنی ، مهدی دهقانیان

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

دبیر مسئول: غلام‌رضا آقامولائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۲۱

چکیده: ماتریس مربعی D را تصادفی دوگانه گوییم هرگاه همه درایه‌های آن نامنفی باشند و مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر با مجموع درایه‌های هر ستون آن و برابر با یک باشد. برای هر بردار سطری و ناصفر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ درجه بردار را بزرگ‌ترین عدد i تعریف می‌کنیم که x_i ناصفر باشد و درجه بردار صفر را برابر با صفر در نظر می‌گیریم. گوییم بردار سطری y مهتری درجه نسبت به x دارد و با نماد $y \prec_{deg} x$ نمایش می‌دهیم، هرگاه درجه x از درجه y کوچک‌تر یا مساوی باشد و ماتریس تصادفی دوگانه D یافت شود که $x = yD$. در این مقاله ساختار نگه‌دارنده‌های خطی مهتری درجه را روی فضای $\mathbb{R}^2$ به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین ساختار نگه‌دارنده‌های خطی قوی رابطه مهتری درجه را روی فضاهای برداری حقیقی $\mathbb{R}^n$ پیدا می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مهتری، مهتری چندگانه ، مهتری درجه، نگه‌دارنده خطی قوی

رده‌بندی ریاضی: 15A04; 15A21

۱ مقدمه

نظریه مهتری یکی از مهم‌ترین موضوعات در جبر خطی است و کاربردهای زیادی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی و آمار دارد، در سال‌های اخیر محققین مقالات زیادی در این زمینه چاپ کرده‌اند (دیده شود [۱–۵]).

هم‌چنین ساختار نگه‌دارنده‌های خطی مفهوم مهم و پرکاربردی در نظریه مهتری است که توسط ریاضی‌دانان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [۷، ۱۳–۱۶، ۱۸].

برای عدد طبیعی n مجموعه ماتریس‌های مربعی و حقیقی با n سطر و n ستون را با M_n نشان می‌دهیم. فضای برداری بردارهای $1 \times n$ را با $\mathbb{R}_n$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ برای نمایش پایه استاندارد فضای $\mathbb{R}_n$ استفاده می‌شود. ماتریس J ماتریسی

[×]نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: y.sayyaari@sirjantech.ac.ir (Y. Sayyari), a.mohammadhasani@gmail.com (A. Mohammadhasani), mdehghanian@sirjantech.ac.ir (M. Dehghanian)

است که همه درایه‌های آن برابر با یک می‌باشد. برای هر زیر مجموعه W از بردارهای حقیقی، غلاف محدب W را با $\mathrm{conv(W)}$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{conv(W)} = \left\{ \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_i v_i} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{v_i} \in \mathrm{W}, 0 \leq \mathrm{r_i}, \mathrm{i} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n} \text{ و } \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_i} = 1 \right\}.$$

ماتریس جای‌گشتی، ماتریسی مربعی است که در هر سطر و در هر ستون آن یک درایه ۱ وجود دارد و مابقی درایه‌ها صفرند. مجموعه همه ماتریس‌های جای‌گشتی $n \times n$ را با نماد $\mathbf{P_n}$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{R}$ یک رابطه روی فضای $\mathbb{R}_n$ باشد و $x, y \in \mathbb{R}_n$. گوییم تبدیل خطی $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ نگه‌دارنده خطی رابطه $\mathcal{R}$ است هرگاه $x\mathcal{R}y$ نتیجه دهد $T(x)\mathcal{R}T(y)$ و گوییم تبدیل خطی T نگه‌دارنده خطی قوی رابطه $\mathcal{R}$ است هرگاه علاوه بر این‌که نگه‌دارنده خطی باشد بتوان از $T(x)\mathcal{R}T(y)$ نتیجه گرفت $x\mathcal{R}y$.

ماتریس مربعی $D_{n\times n} = [d_{ij}]$ را تصادفی دوگانه گوییم هرگاه $\circ \leq d_{ij}$ برای هر i, j $(۱ \leq i, j \leq n)$، $\sum_{i=۱}^{n} d_{ij} = ۱$ و $\sum_{j=۱}^{n} d_{ij} = ۱$. مجموعه همه ماتریس‌های تصادفی $n \times n$ دوگانه را با نماد $\mathbf{D_n}$ نمایش می‌دهیم. اگر $x, y \in \mathbb{R}_n$ دو بردار باشند گوییم y مهتری چندگانه نسبت به x دارد و می‌نویسیم $x \prec_m y$ هرگاه ماتریس تصادفی دوگانه D چنان باشد که $x = yD$. در صورتی که $y \prec_m x$ و $x \prec_m y$ می‌نویسیم $x \sim_m y$.

در [۸–۱۰] نویسندگان مجموعه‌ای از ماتریس‌های تصادفی دوگانه مرتبط با یک مهتری داده‌شده را مورد بحث قرار می‌دهند. برای مطالعه بیش‌تر به [۱، ۱۱، ۱۲، ۱۷] مراجعه شود.

برای هر بردار $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ بردار $x^{\downarrow} = (x^{\downarrow}_۱, \ldots, x^{\downarrow}_n)$ بردار به‌دست آمده با مولفه‌های x است که به‌صورت نزولی مرتب شده‌اند، یعنی $x^{\downarrow}_۱ \geq x^{\downarrow}_۲ \geq \ldots \geq x^{\downarrow}_n$. هم‌چنین مجموع مولفه‌های x را با نماد $\mathrm{tr(x)}$ نشان می‌دهیم یعنی $\mathrm{tr(x)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}$.

قضیه ۱.۱. [۶] فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. $x \prec_m y$

۲. $\mathrm{tr(x)} = \mathrm{tr(y)}$ و $\sum_{i=۱}^{k} x^{\downarrow}_i \leq \sum_{i=۱}^{k} y^{\downarrow}_i$ برای همه $k = ۱, ۲, \ldots, n$.

قضیه ۲.۱. [۶] (قضیه بیرخوف) یک ماتریس تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر ترکیب محدبی از ماتریس‌های جای‌گشتی باشد.

در این مقاله ابتدا مهتری درجه را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هم‌چنین ساختار نگه‌دارنده‌های خطی مهتری درجه روی $\mathbb{R}_۲$ را مشخص می‌کنیم. سپس، ساختار نگه‌دارنده‌های خطی قوی مهتری درجه را روی فضای $\mathbb{R}_n$ به‌دست می‌آوریم.

۲ نتایج اصلی

فرض کنیم $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ برداری $n \times ۱$ و ناصفر باشد. درجه بردار x را بزرگ‌ترین عدد i تعریف می‌کنیم که x_i ناصفر باشد و درجه بردار صفر را برابر با صفر در نظر می‌گیریم. فرض کنیم x و y دو بردار سطری با n مولفه باشند، گوییم بردار سطری y مهتری درجه نسبت به x دارد، هرگاه y مهتر چندگانه نسبت به x باشد و درجه x از درجه y کوچک‌تر یا مساوی باشد. در این بخش همه نگه‌دارنده‌های خطی قوی رابطه مهتری درجه روی فضای بردارهای سطری را پیدا کردیم.

ماتریس نمایش‌گر عمل‌گر خطی T در پایه استاندارد را همواره با $A = [a_{ij}]$ نمایش می‌دهیم (یعنی $A := [T]$). هم‌چنین برای هر ماتریس B، منظور از عمل‌گر خطی B، عمل‌گر خطی S است که ماتریس نمایش‌گر آن در پایه استاندارد برابر با B است. اگر $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_m)$ دو بردار باشند، آن‌گاه برای نمایش بردار $n + m$ بعدی $(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m)$ از نماد (x, y) می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ یک بردار باشد. درجه بردار x را با $deg(x)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$deg(x) := \begin{cases} \max\{i : ۱ \leq i \leq n, x_i \neq \circ\}, & x \neq o \text{ اگر} \\ \circ, & x = o \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$ دو بردار باشند. گوییم بردار y مهتری درجه نسبت به x دارد و می‌نویسیم $x \prec_{deg} y$ هرگاه $x \prec_m y$ و $deg(x) \leq deg(y)$.

در لم زیر مشخص می‌کنیم که یک بردار در چه صورت نسبت به بردار دیگر مهتری درجه دارد.

لم ۳.۲. فرض کنیم $y = (y_۱, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$ برداری ناصفر با درجه k باشد و

$$y_D = \{(y_۱, \dots, y_k)P : P \in \mathbf{P_k}\}.$$

در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱. $\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{deg} y\} = \{(z, \underbrace{\circ, \dots, \circ}_{n-k}) : z \in \mathrm{conv(y_D)}\}$.

۲. $x \prec_{deg} y$ اگر و تنها اگر

$$x \in \left\{ y \begin{bmatrix} D_k & o \\ o & I_{n-k} \end{bmatrix} : D_k \in \mathbf{D_k} \right\}.$$

اثبات. ۱. فرض کنیم y برداری ناصفر باشد و $deg(y) = k$ و $y = (y_۱, \dots, y_n)$. بردار $\overline{y}$ را برابر با بردار k-بعدی $(y_۱, \dots, y_k)$ تعریف می‌کنیم. لذا اگر $x \prec_{deg} y$ و $x = (x_۱, \dots, x_n)$، آن‌گاه طبق قضیه بیرخوف

$$\begin{aligned} x &= \sum_i r_i y P_i \\ &= \sum_i r_i (y_۱, \dots, y_k, \circ, \dots, \circ) P_i \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی و نامنفی r_i و ماتریس‌های جای‌گشت $P_i = [p_{ij}] \in \mathbf{P_n}$ که $\sum_i r_i = ۱$. ازآن‌جایی‌که $x_i = \circ$ برای هر i $(i \geq k)$ پس،

$$x = \sum_i (r_i \overline{y} P'_i, \underbrace{\circ, \dots, \circ}_{n-k})$$

که در آن P'_i ماتریس جای‌گشت وابسته به P_i تعریف‌شده با $P'_i = [p_{ij}] \in \mathbf{P_k}$ است. پس،

$$x \in \{(z, \underbrace{\circ, \dots, \circ}_{n-k}) : z \in \mathrm{conv(y_D)}\}.$$

۲. با استفاده از قسمت قبل و تساوی

$$\{(z, \underbrace{\circ, \dots, \circ}_{n-k}) : z \in \mathrm{conv(y_D)}\} = \left\{ \mathrm{y} \begin{bmatrix} D_k & o \\ o & I_{n-k} \end{bmatrix} : \mathrm{D_k} \in \mathbf{D_k} \right\}.$$

اثبات به‌راحتی به‌دست می‌آید.

□

در زیر ارتباط بین مهتری چندگانه و مهتری درجه را نشان می‌دهیم.

لم ۴.۲. فرض کنیم $y = (y_۱, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$ برداری ناصفر باشد، آن‌گاه

۱. $\{x : x \prec_{deg} y\} = \{x : x \prec_m y\}$ اگر و تنها اگر $y_n \neq \circ$؛

۲. $\{x : x \sim_{deg} y\} = \{x : x \sim_m y\}$ اگر و تنها اگر $\prod_{i=۱}^{n} y_i \neq \circ$.

اثبات. ۱. فرض کنیم $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}_n$ برداری ناصفر باشد، $y_n=0$ و $deg(y)=k$ $(1\le k<n)$ در این صورت اگر

$$x=\sum_{i\neq k,n} y_ie_i+y_ke_n,$$

آن‌گاه $y\prec_m x$ ولی $y\not\prec_{deg} x$. پس، $\{x: x\prec_m y\}\neq\{x:x\prec_{deg} y\}$.

برعکس: فرض کنیم $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}_n$ برداری ناصفر باشد و $y_n\neq 0$. بدیهی است که اگر $y\prec_{deg} x$، آن‌گاه $y\prec_m x$. چون $deg(y)=n$، پس، اگر $y\prec_m x$، آن‌گاه $y\prec_{deg} x$. لذا

$$\{x: x\prec_m y\}=\{x:x\prec_{deg} y\}.$$

۲. فرض کنیم $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}_n$ برداری ناصفر باشد و $\prod_{i=1}^n y_i=0$. پس، $y_j=0$ برای یک j $(1\le j\le n)$، و چون $y\neq o$ لذا $y_k\neq 0$ برای یک k $(1\le k\le n)$. بنابراین اگر

$$x:=\begin{cases}\sum_{i\neq j,n} y_ie_i+y_ne_j, & \text{اگر } y_n\neq 0\\ \sum_{i\neq k,n} y_ie_i+y_ke_n, & \text{اگر } y_n=0\end{cases}$$

آن‌گاه $y\sim_m x$ ولی $y\nsim_{deg} x$. پس، $\{x: x\sim_m y\}\neq\{x:x\sim_{deg} y\}$.

برعکس: فرض کنیم $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}_n$ و $\prod_{i=1}^n y_i\neq 0$. بدیهی است که اگر $y\sim_{deg} x$، آن‌گاه $y\sim_m x$. چون $deg(yP)=n$ برای هر $P\in\mathbf{P_n}$، پس، اگر $y\sim_m x$، آن‌گاه $x=yP$ برای ماتریس جای‌گشت P، لذا $deg(x)=deg(y)=n$ و بنابراین $y\sim_{deg} x$. درنتیجه

$$\{x: x\sim_m y\}=\{x:x\sim_{deg} y\}.$$

این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۵.۲. فرض کنیم y برداری از $\mathbb{R}_n$ باشد و $\{x: x\sim_m y\}=\{x:x\sim_{deg} y\}$، آن‌گاه

$$\{x: x\prec_m y\}=\{x:x\prec_{deg} y\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\{x: x\sim_m y\}=\{x:x\sim_{deg} y\}$. اگر $y=o$، آن‌گاه بدیهی است. اگر $y\neq o$، آن‌گاه قسمت دوم لم ۴.۲ نتیجه می‌دهد که $y_i\neq 0$ برای هر i $(1\le i\le n)$، پس، $y_n\neq 0$ و بنابه قسمت اول لم ۴.۲، نتیجه به‌دست می‌آید. □

لم ۶.۲. فرض کنیم y برداری از $\mathbb{R}_n$ باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

۱. $\{x: x\sim_m yP\}=\{x:x\sim_{deg} yP\}$، برای یک P $(P\in\mathbf{P_n})$.

۲. $\{x: x\prec_m yQ\}=\{x:x\prec_{deg} yQ\}$، برای هر Q $(Q\in\mathbf{P_n})$.

۳. $\{x: x\sim_m yP\}=\{x:x\sim_{deg} yP\}$، برای هر P $(P\in\mathbf{P_n})$.

اثبات. اگر $y=o$، آن‌گاه

$$\{x: x\sim_m yP\}=\{x:x\sim_{deg} yP\}=\{x: x\prec_m yP\}=\{x:x\prec_{deg} yP\}=\{o\}$$

برای هر ماتریس جای‌گشت P، لذا لم برقرار است. حال فرض کنیم $y\neq o$.

۱. ۱: $\Longrightarrow$ ۲ اگر $\{x: x\sim_m yP\}=\{x:x\sim_{deg} yP\}$، برای یک P $(P\in\mathbf{P_n})$، آن‌گاه بنا بر قسمت دوم لم ۴.۲، همه مولفه‌های بردار yP ناصفرند. لذا همه مولفه‌های بردار yQ ناصفرند، به‌ویژه مولفه n-ام yQ ناصفر است، برای هر ماتریس جای‌گشت Q. پس، بنا بر قسمت اول لم ۴.۲

$$\{x: x\prec_m yQ\}=\{x:x\prec_{deg} yQ\},$$

برای هر Q $(Q\in\mathbf{P_n})$.

۲. ۳ $\Longrightarrow$ ۲: اگر $\{x : x \prec_{deg} yQ\} = \{x : x \prec_m yQ\}$، برای هر Q $(Q \in \mathbf{P_n})$، آن‌گاه بنا بر قسمت اول لم ۴.۲، مولفه n–ام بردار yQ ناصفر است برای هر Q $(Q \in \mathbf{P_n})$، پس، همه مولفه‌های بردار y ناصفرند و ازآن‌جا همه مولفه‌های بردار yP ناصفرند برای هر ماتریس جای‌گشت P. پس، بنا بر قسمت دوم لم ۴.۲، $\{x : x \sim_{deg} yP\} = \{x : x \sim_m yP\}$، برای هر P $(P \in \mathbf{P_n})$.

۳. ۱ $\Longrightarrow$ ۳: واضح است.

□

لم ۷.۲ اگر $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ نگه‌دارنده خطی رابطه $\prec_{deg}$ باشد و ماتریس نمایش‌گر T در پایه استاندارد به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

باشد، آن‌گاه $a_i \prec_{deg} a_j$، برای هر i, j $(۱ \leq i \leq j \leq n)$.

اثبات. اگر $i \leq j$، از این‌که $e_i \prec_{deg} e_j$ و T نگه‌دارنده خطی رابطه $\prec_{deg}$ است پس،

$$a_i = e_i A \prec_{deg} e_j A = a_j.$$

این اثبات را تمام خواهد کرد. □

در قضیه زیر ساختار نگه‌دارنده‌های خطی مهتری درجه را روی فضای سطری $\mathbb{R}_۲$ مشخص می‌کنیم.

قضیه ۸.۲ فرض کنیم $T : \mathbb{R}_۲ \longrightarrow \mathbb{R}_۲$ یک عمل‌گر خطی باشد. در این صورت T نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند:

۱. $T = \alpha I$، برای یک عدد حقیقی α.

۲. $T(x) = \mathrm{tr(x)a}$، برای یک بردار $a \in \mathbb{R}_۲$.

۳. $T = ۲\alpha I - \alpha J$، برای یک عدد حقیقی α.

اثبات. فقط شرط لازم را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم T نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ و ماتریس نمایش‌گر T در پایه استاندارد به‌صورت $A = [a_{ij}]$ باشد. سه حالت را در نظر می‌گیریم:

- حالت اول: اگر $a_{۲۲} = ۰$، چون $(a_{۲۱}, ۰) \prec_{deg} (a_{۱۱}, a_{۱۲})$، پس، $a_{۱۲} = ۰$. از طرفی $(۲, ۱) \sim_{deg} (۱, ۲)$ نتیجه می‌دهد

$$(a_{۱۱} + ۲a_{۲۱}, ۰) \sim_{deg} (۲a_{۱۱} + a_{۲۱}, ۰),$$

لذا $a_{۲۱} = a_{۱۱}$، و $T(x) = \mathrm{tr(x)}(\mathrm{a}_{11}, 0)$.

- حالت دوم: اگر $a_{۲۲} \neq ۰$ و $a_{۱۲} = ۰$، چون

$$(a_{۱۱}, ۰) \prec_{deg} (a_{۲۱}, a_{۲۲})$$

پس، $a_{۱۱} = a_{۲۱} + a_{۲۲}$. از طرفی $(۲, ۱) \sim_{deg} (۱, ۲)$ نتیجه می‌دهد

$$(۳a_{۲۱} + ۲a_{۲۲}, a_{۲۲}) \sim_{deg} (۳a_{۲۱} + a_{۲۲}, ۲a_{۲۲}),$$

لذا $۳a_{۲۱} + ۲a_{۲۲} = ۲a_{۲۲}$ پس، $a_{۲۱} = ۰$ و $T = a_{۱۱}I$.

- حالت سوم: اگر $a_{۲۲} \neq ۰$ و $a_{۱۲} \neq ۰$، آن‌گاه با فرض

$$y = \left(\frac{-a_{۱۲}}{a_{۲۲}}, ۱\right) \quad \text{و} \quad x = \left(۱, \frac{-a_{۱۲}}{a_{۲۲}}\right)$$

داریم $x \sim_{deg} y$ لذا

$$yA = \left(\frac{-a_{۱۲}a_{۱۱}}{a_{۲۲}} + a_{۲۱}, \frac{-a_{۱۲}^{۲}}{a_{۲۲}} + a_{۲۲}\right) \sim_{deg} xA = \left(a_{۱۱} - \frac{a_{۱۲}a_{۲۱}}{a_{۲۲}}, ۰\right)$$

بنابراین $a_{۱۲} = \pm a_{۲۲}$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $a_{۱۲} = -a_{۲۲}$، آن‌گاه چون $(۲,۱) \sim_{deg} (۱,۲)$ پس،

$$(a_{۱۱} + ۲a_{۲۱}, -a_{۱۲}) = (۱,۲)A \sim_{deg} (۲,۱)A = (۲a_{۱۱} + a_{۲۱}, a_{۱۲}), \tag{۱.۲}$$

درنتیجه

$$a_{۱۱} + ۲a_{۲۱} - a_{۱۲} = ۲a_{۱۱} + a_{۲۱} + a_{۱۲},$$

بنابراین $a_{۲۱} = a_{۱۱} + ۲a_{۱۲}$. همچنین از رابطه (۱.۲) داریم:

$$(۳a_{۱۱} + ۴a_{۱۲}, -a_{۱۲}) \sim_{deg} (۳a_{۱۱} + ۲a_{۱۱}, a_{۱۲}),$$

و چون $a_{۱۲} \neq ۰$، پس، $۳a_{۱۱} + ۴a_{۱۲} = a_{۱۲}$، لذا $a_{۱۱} = -a_{۱۲}$. درنتیجه

$$T = ۲a_{۱۱}I - a_{۱۱}J.$$

حالت دوم: اگر $a_{۱۲} = a_{۲۲}$. از این‌که $(۲,۱) \sim_{deg} (۱,۲)$ پس،

$$(۱,۲)A = (a_{۱۱} + ۲a_{۲۱}, ۳a_{۱۲}) \sim_{deg} (۲,۱)A = (۲a_{۱۱} + a_{۲۱}, ۳a_{۱۲}),$$

بنابراین $a_{۱۱} + ۲a_{۲۱} = ۲a_{۱۱} + a_{۲۱}$ و لذا $a_{۱۱} = a_{۲۱}$. درنتیجه $T(x) = \mathrm{tr(x)(a_{11}, a_{12})}$.

□

فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد و $۱ \leq k \leq n$. ماتریس مربعی $\mathcal{A}_k$ را به‌صورت $\mathcal{A}_k = [a_{ij}]_{۱\leq i,j \leq k}$ تعریف می‌کنیم.

لم ۹.۲. فرض کنیم $n \geq ۳$ و $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ یک عمل‌گر خطی نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ باشد و k بزرگ‌ترین عددی باشد با این خاصیت که $a_{ik} \neq ۰$ برای یک i $(۱ \leq i < k)$. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱. $\mathcal{A}_k$ نگه‌دارنده خطی $\prec_{deg}$ روی $\mathbb{R}_k$ است.

۲. اگر $۳ \leq k \leq n$، آن‌گاه $(a_{۱k}, \ldots, a_{kk})^t \in span(e)$.

اثبات. ۱. فرض کنیم $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ باشد و k $(k \leq n)$ بزرگ‌ترین عددی باشد با این خاصیت که $a_{ik} \neq ۰$ برای یک i $(۱ \leq i < k)$ و $x, y \in \mathbb{R}_k$ دو بردار باشند که

$$x := (x_۱, \ldots, x_k) \prec_{deg} y := (y_۱, \ldots, y_k).$$

بردارهای n بعدی $\overline{x}$ و $\overline{y}$ را به‌صورت

$$\overline{x} := (x_۱, \ldots, x_k, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k}) \text{ و } \overline{y} := (y_۱, \ldots, y_k, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k}).$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $\overline{x} \prec_{deg} \overline{y}$ پس، $\overline{x}A \prec_{deg} \overline{y}A$. از طرفی

$$\overline{x}A = (x\mathcal{A}_k, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k}) \text{ و } \overline{y}A = (y\mathcal{A}_k, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k}).$$

که در آن منظور از $(z, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k})$ بردار $(z_۱, \ldots, z_k, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{n-k})$ است برای هر بردار $z = (z_۱, \ldots, z_k)$. لذا از این‌که $\overline{x}A \prec_{deg} \overline{y}A$ نتیجه می‌گیریم که $x\mathcal{A}_k \prec_{deg} y\mathcal{A}_k$.

۲. فرض کنیم T نگه‌دارنده خطی رابطه $\prec_{deg}$ باشد و ماتریس نمایش‌گر T در پایه استاندارد به‌صورت

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

باشد. بنا به لم ۷.۲ اگر $i \leq j$، آن‌گاه $a_i \prec_{deg} a_j$. اثبات را در سه حالت زیر کامل می‌کنیم.

حالت اول: اگر $a_{kk} = 0$، آن‌گاه $a_{ik} = 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq k)$، و این تناقض است.

حالت دوم: اگر $a_{kk} \neq 0$ و $a_{k-1k} = 0$، آن‌گاه چون $a_i \prec_{deg} a_{k-1}$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$، پس، $a_{ik} = 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$، و این تناقض است.

حالت سوم: در صورتی که $a_{kk} \neq 0$ و $a_{k-1k} \neq 0$، آن‌گاه با انتخاب

$$\alpha = \frac{-a_{k-1k}}{a_{kk}}, \quad x = e_i + \alpha e_k \quad \text{و} \quad y = e_{k-1} + \alpha e_k,$$

داریم $y \sim_{deg} x$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. پس،

$$a_i + \alpha a_k = xA \sim_{deg} yA = a_{k-1} + \alpha a_k.$$

از طرفی $a_{k-1k} + \alpha a_{kk} = 0$، لذا $a_{ik} + \alpha a_{kk} = 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. فرض کنیم

$$a := a_{1k} = \ldots = a_{k-1k}.$$

اگر $a = 0$، آن‌گاه حکم برقرار است. در صورتی که $a \neq 0$ نشان می‌دهیم $a_{ik} = a$. فرض کنیم $a \neq 0$ و $\beta = \frac{-a}{a_{kk}}$، بدیهی است که

$$e_i + \beta e_k \sim_{deg} \beta e_i + e_k$$

برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. لذا $a_i + \beta a_k \sim_{deg} \beta a_i + a_k$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. از طرفی $\beta a_{kk} + a = 0$، لذا $\beta a_{ik} + a_{kk} = 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. بنابراین $a_{kk} = \pm a$. برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم $a_{kk} \neq -a$. به‌فرض خلاف که $a_{kk} = -a$. بردار های x و y را به‌صورت

$$x = e_1 + e_2 + 2e_k \quad \text{و} \quad y = 2e_1 + e_2 + e_k,$$

تعریف می‌کنیم. چون $k \geq 3$، پس، $y \sim_{deg} x$ و لذا $xA \sim_{deg} yA$. ازآن‌جایی‌که $a \neq 0$ به‌راحتی می‌توان دید که $deg(yA) = k$ و $deg(xA) \leq k-1$، که تناقض است. بنابراین $a_{kk} = a$ و قضیه اثبات می‌شود.
□

نتیجه ۱۰.۲. اگر $n \geq 3$ و $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ یک عمل‌گر خطی نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ باشد و

$$[T] = [c_1 | \ldots | c_n],$$

آن‌گاه ستون $c_n = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})^t$ در یکی از شرایط زیر صدق کند:

۱. $a_{in} = 0$، $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

۲. $c_n \in span(e)$.

لم ۱۱.۲. اگر $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر خطی نگه‌دارنده رابطه $\prec_{deg}$ باشد و ماتریس نمایش‌گر T در پایه استاندارد به‌صورت

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

باشد، آن‌گاه برای هر i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ ماتریس جای‌گشتی $P \in P_n$ وجود دارد که $a_i = a_j P$، علاوه بر آن $a_{ik} = a_{jl}$ نتیجه می‌دهد که $a_{il} = a_{jk}$.

اثبات. اگر m عددی حقیقی و ناصفر باشد، آن‌گاه

$$x := e_i + me_j \sim_{deg} e_i + me_j := y$$

برای هر i, j $(۱ \leq i, j \leq n)$. پس،

$$xA = a_i + ma_j \sim_{deg} a_i + ma_j = yA$$

برای هر i, j $(۱ \leq i, j \leq n)$. لذا برای هر l $(۱ \leq l \leq n)$ وجود دارد k $(۱ \leq k \leq n)$ که

$$a_{il} + ma_{jl} = a_{ik} + ma_{jk}$$

برای تعداد نامتناهی عدد حقیقی m. بنابراین $a_{ik} = a_{jl}$ و $a_{il} = a_{jk}$. □

لم ۱۲.۲. اگر $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر خطی نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ باشد، آن‌گاه T وارون‌پذیر است.

اثبات. به‌فرض خلاف اگر بردار ناصفر $b \neq o$ وجود داشته باشد که $bA = o$، آن‌گاه چون $oA \sim_{deg} o = bA$ لذا $b \sim_{deg} o$ که تناقض است، لذا T وارون‌پذیر است. □

لم ۱۳.۲. اگر $n \geq ۳$ و $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر خطی نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ باشد و k $(۳ \leq k \leq n)$ بزرگ‌ترین عددی باشد با این خاصیت که $a_{ik} \neq ۰$ برای یک i $(۱ \leq i < k)$، آن‌گاه

$$(a_{۱k}, a_{۲k}, \ldots, a_{kk})^t \notin span\{e\}.$$

اثبات. به‌فرض خلاف که T نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ باشد و k بزرگ‌ترین عددی باشد که $a_{ik} \neq ۰$ و $r := a_{۱k} = a_{۲k} = \ldots = a_{kk}$ برای یک i $(۱ \leq i < k)$، لذا A به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \ldots & a_{۱k} & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i۱} & \ldots & a_{ik} & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k۱} & \ldots & a_{kk} & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ a_{k+۱۱} & \ldots & a_{k+۱k} & a_{k+۱k+۱} & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & \ldots & a_{nk} & a_{nk+۱} & a_{nk+۲} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \ldots & r & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i۱} & \ldots & r & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k۱} & \ldots & r & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ a_{k+۱۱} & \ldots & a_{k+۱k} & a_{k+۱k+۱} & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & \ldots & a_{nk} & a_{nk+۱} & a_{nk+۲} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $\mathcal{A}_k = [a_{ij}]_{۱\leq i,j\leq k}$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

- حالت اول: اگر $a_{kk-۱} = a_{k-۱k-۱}$، آن‌گاه چون $e_{k-۱} - e_k \sim_{deg} e_i - e_k$ برای هر i $(۱ \leq i < k)$، پس، $a_{k-۱} - a_k \sim_{deg} a_i - a_k$ برای هر i $(۱ \leq i < k)$. بنابراین $a_{ik-۱} = a_{kk-۱}$ برای هر i $(۱ \leq i \leq k)$. لذا ستون های k-ام و $k - ۱$-ام ماتریس $\mathcal{A}_k$ مضرب‌های بردار e اند، پس، $det(\mathcal{A}_k) = ۰$ و درنتیجه $det(A) = ۰$. این با وارون‌پذیری A تناقض دارد.

• حالت دوم: $a_{kk-1} \neq a_{k-1k-1}$.

ادعا: اگر $a_{kk-1} \neq a_{k-1k-1}$، آن‌گاه

$$a_{1k-1} = a_{2k-1} = \ldots = a_{k-1k-1}$$

برای هر i $(1 \leq i < k)$ و $a_{kk-1} = -a_{k-1k-1}$.

اثبات ادعا: برای هر عدد حقیقی α داریم:

$$y := \alpha e_i + e_{k-1} - (\alpha+1)e_k \sim_{deg} e_i + \alpha e_{k-1} - (\alpha+1)e_k := x$$

برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. درنتیجه

$$yA = \alpha a_i + a_{k-1} - (\alpha+1)a_k \sim_{deg} a_i + \alpha a_{k-1} - (\alpha+1)a_k = xA.$$

با انتخاب $\alpha = \frac{a_{kk-1} - a_{ik-1}}{a_{k-1k-1} - a_{kk-1}}$ مشاهده می‌شود:

$$xA = \sum_{j=1}^{k-2} t_j e_j,$$
$$yA = \sum_{j=1}^{k-2} t'_j e_j + (\alpha a_{ik-1} + a_{k-1k-1} - (\alpha+1)a_{kk-1})e_{k-1}$$

برای بعضی اعداد حقیقی $t_1, \ldots, t_{k-2}, t'_1, \ldots, t'_{k-2}$.

از طرفی $deg(xA) < k-1$، بنابراین $deg(yA) < k-1$. این نتیجه می‌دهد که

$$\alpha a_{ik-1} + a_{k-1k-1} - (\alpha+1)a_{kk-1} = 0, \ \forall\, i\ (1 \leq i \leq k-1). \tag{2.2}$$

همچنین با جایگزینی α در رابطه ۲.۲ و ساده‌کردن

$$2a_{ik-1}a_{kk-1} - 2a_{k-1k-1}a_{kk-1} + a_{k-1k-1}^2 - a_{ik-1}^2 = 0, \ \forall\, i\ (1 \leq i \leq k-1).$$

درنتیجه

$$a_{ik-1} = a_{k-1k-1} \quad \text{یا} \quad a_{ik-1} = 2a_{kk-1} - a_{k-1k-1},$$

برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. اکنون نشان می‌دهیم که

$$a_{ik-1} \neq 2a_{kk-1} - a_{k-1k-1},$$

برای هر i $(1 \leq i \leq k-1)$. چون $a_{kk-1} \neq a_{k-1k-1}$، پس، برای $i = k-1$ بدیهی است. به‌فرض خلاف، گیریم $a_{tk-1} = 2a_{kk-1} - a_{k-1k-1}$ برای یک t $(1 \leq t < k-1)$. بردارهای x، y و z را به‌صورت

$$x := e_t + e_{k-1} - 2e_k,\ y := -2e_t + e_{k-1} + e_k, z := e_t - 2e_{k-1} + e_k$$

تعریف می‌کنیم. داریم $z \sim_{deg} y \sim_{deg} x$. همچنین

$$xA = \sum_{j=1}^{k-2} t_j e_j$$
$$\sim_{deg} yA = \sum_{j=1}^{k-2} t'_j e_j + (-2a_{tk-1} + a_{k-1k-1} + a_{kk-1})e_{k-1}$$
$$\sim_{deg} zA = \sum_{j=1}^{k-2} t''_j e_j + (a_{tk-1} - 2a_{k-1k-1} + a_{kk-1})e_{k-1}$$

برای یک اعداد حقیقی $t'_{۱}, \dots, t'_{k-۲}, t_{۱}, \dots, t_{k-۲}, t''_{۱}, \dots, t''_{k-۲}$. بنابراین

$$-۲a_{tk-۱} + a_{k-۱k-۱} + a_{kk-۱} = ۰, \; a_{tk-۱} - ۲a_{k-۱k-۱} + a_{kk-۱} = ۰. \qquad (۳.۲)$$

بنابراین $a_{tk-۱} = a_{k-۱k-۱} = a_{kk-۱}$ و این یک تناقض است. پس، $a_{ik-۱} = a_{k-۱k-۱} := s$ برای هر $(۱ \leq i \leq k-۱)\, i$. اکنون برای اتمام اثبات ادعا کافی است نشان دهیم $a_{kk-۱} = -s$، و این کار را در سه حالت انجام می‌دهیم:

حالت (۱): اگر $a_{kk-۱} = ۰$، آن‌گاه بنا برلم (۱۱.۲) ماتریس $\mathcal{A}_k$ دارای یک ستون به‌صورت $(۰, \dots, ۰, s)^t$ است، و لذا با استفاده از نتیجه (۱۰.۲)، $\mathcal{A}_k$ به‌صورت

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} \dots & ۰ & \dots & s & r \\ \dots & ۰ & \dots & s & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & ۰ & \dots & s & r \\ \dots & s & \dots & ۰ & r \end{bmatrix}$$

است، بنابراین $det(\mathcal{A}_k) = ۰$، پس $det(A) = ۰$ و این یک تناقض است.

حالت (۲): اگر $a_{k-۱k-۱} = ۰$، آن‌گاه بنابرلم (۱۱.۲) ماتریس $\mathcal{A}_k$ دارای یک ستون به‌صورت $(a_{kk-۱}, \dots, a_{kk-۱}, ۰)^t$ می‌باشد، و لذا با استفاده از نتیجه (۱۰.۲)، $\mathcal{A}_k$ به‌صورت

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} \dots & a_{kk-۱} & \dots & ۰ & r \\ \dots & a_{kk-۱} & \dots & ۰ & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{kk-۱} & \dots & ۰ & r \\ \dots & ۰ & \dots & a_{kk-۱} & r \end{bmatrix}$$

است، بنابراین $det(\mathcal{A}_k) = ۰$ و در نتیجه $det(A) = ۰$ که یک تناقض است.

حالت (۳): اگر $a_{kk-۱} \neq ۰ \neq a_{k-۱k-۱}$، آن‌گاه عدد حقیقی γ و بردارهای x و y را به‌صورت

$$\gamma := \frac{-a_{kk-۱}}{a_{k-۱k-۱}}, \quad x := \gamma e_{k-۱} + e_k \quad \text{و} \quad y := e_{k-۱} + \gamma e_k$$

تعریف می‌کنیم. لذا داریم $y \sim_{deg} x$، پس $yA \sim_{deg} xA$. از طرفی با محاسبه xA ، yA داریم:

$$xA = \sum_{j=۱}^{k-۲} t_j e_j,$$

$$yA = \sum_{j=۱}^{k-۲} t'_j e_j + \left(\frac{a^{۲}_{k-۱k-۱} - a^{۲}_{kk-۱}}{a_{k-۱k-۱}} \right) e_{k-۱}$$

برای اعداد حقیقی $t'_{۱}, \dots, t'_{k-۲}, t_{۱}, \dots, t_{k-۲}$. چون $deg(xA) = deg(yA)$، پس،

$$a^{۲}_{k-۱k-۱} - a^{۲}_{kk-۱} = ۰$$

و از آن‌جایی‌که $a_{kk-۱} \neq a_{k-۱k-۱}$، بنابراین $a_{kk-۱} = -a_{k-۱k-۱}$. لذا برهان ادعا تمام است.

اکنون اثبات لم را تکمیل می‌کنیم. فرض کنیم $a_{kk-۱} \neq a_{k-۱k-۱}$ و

$$s := a_{۱k-۱} = a_{۲k-۱} = \dots = a_{k-۱k-۱}$$

برای هر i $(1 \leq i < k)$ و $a_{kk-1} = -a_{k-1k-1}$، بنا به لم (۱۱.۲) ماتریس $\mathcal{A}_k$ دارای یک ستون به‌صورت $(-s, -s, \dots, -s, s)^t$ است و لذا با استفاده از نتیجه (۱۰.۲)، $\mathcal{A}_k$ به‌صورت

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} \dots & -s & \dots & s & r \\ \dots & -s & \dots & s & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -s & \dots & s & r \\ \dots & s & \dots & -s & r \end{bmatrix}$$

است، بنابراین $det(\mathcal{A}_k) = 0$ و در نتیجه $det(A) = 0$ که یک تناقض است. پس اگر T عمل‌گر خطی نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ باشد و k $(1 \leq k \leq n)$ بزرگ‌ترین عددی باشد با این خاصیت که $a_{ik} \neq 0$ برای یک i $(1 \leq i < k)$، آن‌گاه

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{kk})^t \notin span\{e\}.$$

□

نتیجه ۱۴.۲. اگر $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر خطی نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ باشد، آن‌گاه

$$(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) \notin span\{e\}.$$

اثبات. در صورتی که $a_{nn} = 0$، داریم $a_{in} = 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq n)$، که تناقض با وارون‌پذیری T دارد و در غیر این صورت از لم ۱۳.۲ نتیجه براحتی به‌دست می‌آید. □

در قضیه زیر ساختار نگه‌دارنده‌های خطی قوی مهتری درجه را روی فضای سطری $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنیم $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر خطی باشد. در این‌صورت T نگه‌دارنده قوی رابطه $\prec_{deg}$ است اگر و تنها اگر $T = \alpha I$ برای یک عدد حقیقی و ناصفر α.

اثبات. به‌دلیل ساده‌بودن شرط کفایت، فقط شرط لازم را اثبات می‌کنیم. بدیهی است که اگر T نگه‌دارنده خطی (قوی) رابطه $\prec_{deg}$ باشد، آن‌گاه نگه‌دارنده خطی (قوی) رابطه $\sim_{deg}$ نیز است.

ابتدا فرض کنیم $n = 2$ و $T : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ عمل‌گر نگه‌دارنده قوی رابطه $\sim_{deg}$ باشد، در این صورت T نگه‌دارنده خطی رابطه $\sim_{deg}$ است و از قضیه ۸.۲ و لم ۱۲.۲ نتیجه می‌شود $T = \alpha I$ برای یک $\alpha \neq 0$.

اکنون فرض کنیم $n \geq 3$ و $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ عمل‌گر نگه‌دارنده قوی رابطه $\sim_{deg}$ باشد.

- حالت اول: فرض کنیم $a_{ik} = 0$ برای هر i, k $(1 \leq i < k \leq n)$. در این صورت با استفاده از لم (۱۲.۲) $a_{ii} \neq 0$ برای هر i $(1 \leq i \leq n)$، و بنابر لم (۱۱.۲) داریم $a_{ii} = a_{jj}$ برای هر i, j $(1 \leq i, j \leq n)$. بنابراین $T = a_{11} I$.

- حالت دوم: فرض کنیم $a_{ik} \neq 0$ برای یک i $(1 \leq i < k)$ و عدد k $(3 \leq k \leq n)$ بزرگ‌ترین عدد با این خاصیت باشد. در این صورت چون T نگه‌دارنده خطی $\sim_{deg}$ است بنابر لم ۹.۲ داریم $(a_{1k}, \dots, a_{kk})^t \in span(e)$، و این با لم ۱۳.۲ تناقض دارد.

- حالت سوم: فرض کنیم $a_{ik} \neq 0$ برای یک i $(1 \leq i < k)$ و عدد $k = 2$ بزرگ‌ترین عدد با این خاصیت باشد. بنابر لم ۹.۲، عمل‌گر $\mathcal{A}_2$ نگه‌دارنده خطی $\prec_{deg}$ روی $\mathbb{R}_2$ است، پس، $\mathcal{A}_2$ یکی از سه حالت قضیه ۸.۲ می‌باشد که در ادامه آنها را بررسی می‌کنیم.

  ۱) فرض کنیم $\mathcal{A}_2 = \alpha I_2$، برای یک $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت بنا بر لم‌های ۱۱.۲ و ۱۲.۲، $\alpha \neq 0$ و $T = \alpha I$.

  ۲) فرض کنیم $x\mathcal{A}_2 = \mathrm{tr(x)a}$، برای یک $a \in \mathbb{R}_2$. در این صورت $det(\mathcal{A}_2) = 0$، بنابراین $det(A) = 0$ و این با لم ۱۲.۲ تناقض دارد.

  ۳) فرض کنیم $\mathcal{A}_2 = 2\alpha I - \alpha J$، برای یک $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت $det(\mathcal{A}_2) = 0$، بنابراین $det(A) = 0$ و این با لم ۱۲.۲ تناقض دارد. لذا قضیه برای $n \geq 3$ نیز اثبات شد.

□

فهرست منابع

[۱] ع. آرمندنژاد، مروری بر مهتری‌های عادی و تعمیم یافته و بررسی ساختار نگه‌دارنده‌های خطی آن‌ها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۵** (۱۳۸۹)، ۳۱–۴۰.

[۲] ا. محمدحسنی، ی. سیاری، ماتریس‌های زیر تصادفی سطری تعمیم‌یافته و مهتری، مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، **۱۲** (۴) (۱۴۰۱)، ۵۲۳–۵۳۴.

[۳] ا. محمدحسنی، ی. سیاری، م. سبزواری، نگه‌دارنده های خطی مهتر راست–چپ ماتریسی، موجک‌ها و جبرخطی، **۸** (۳) (۱۴۰۱)، ۳۷–۵۹.

[4] A. Armandnejad and Z. Gashool, Strong linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$, Elec. J. Linear Algeb. **123** (2012), 115–121.

[5] A. Armandnejad and A. Salemi, The structure of linear preservers of gs-majorization, Bull. Iranian Math. Soc. **32** (2) (2006), 31–42.

[6] R. Bahatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] L. B. Beasley, S.G. Lee and Y.H. Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization, Linear Algebra Appl. **367** (2003), 341–346.

[8] R. A. Brualdi and G. Dahl, An extension of the polytope of doubly stochastic matrices, Linear and Multilinear Algebra, **6**(3) (2013), 393–408.

[9] G.S. Cheon and Y.H. Lee, The doubly stochastic matrices of a multivariate majorization, J. Kor. Math. Soc. **32** (1995), 857–867.

[10] H. Chiang and C.K. Li, Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers, Linear and Multilinear Algebra, **53** (2005), 1–11.

[11] G. Dahl, Matrix majorization, Linear Algebra Appl. **288** (1999), 53–73.

[12] M. Dehghanian and A. Mohammadhasani, A note on multivariate majorization, J. Mahani Math. Res. Cent. **11**(2) (2022), 119–126.

[13] M.H. Hadian and A. Armandnejad, B-majorization and its linear preservers, Linear Algebra Appl. **478** (2015), 218–227.

[14] A. M. Hasani and A. Ilkhanizadeh Manesh, Linear preservers of two-sided right matrix majorization on $\mathbb{R}_n$, Adv. Oper. Theory, **3** (3) (2018), 1–8.

[15] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, The structure of linear operators strongly preserving majorizations of matrices, Elec. J. Linear Algeb. **15** (2006), 260–268.

[16] A. M. Hasani, Y. Sayyari and M. Sabzvari, G-tridiagonal majorization on $M_{n,m}$, Communications in Mathematics, **29** (3 (2021), 395 – 405.

[17] A. W. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of majorization and its applications*, Springer, New York, 2011.

[18] Y. Sayyari, A. Mohammadhasani and M. Dehghanian, Linear maps preserving signed permutation and substochastic matrices, Indian J. Pure Appl. Math. **54** (2023), 219–223.

The structure of strongly linear preservers of degree majorization

Yamin Sayyari †, **Ahmad Mohammadhasani, Mehdi Dehghanian**

Department of Mathematics, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 2023/1/1 Accepted: 2023/6/11

Abstract: A square matrix D is called a doubly stochastic matrix if all its entries are non-negative and the sum of the entries of each row is equal to the sum of the entries of each column and is equal to one. For each linear and non-zero vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, we define the degree of x as the largest number i such that x_i is non-zero and the degree of vector zero is zero. We say that a vector x is degree majorized by y and denote by $x \prec_{deg} y$ if the degree of x is greater than or equal to the degree of y and $x = yD$ for some doubly stochastic matrix D. In this paper, we obtain the structure of all linear preservers of degree majorization on space $\mathbb{R}^2$. Also, we find the structure of all strong linear preservers of degree majorization on real vector spaces $\mathbb{R}^n$.

Keywords: Majorization, multivariate majorization, degree majorization, strongly linear preserver.

†Corresponding author.

E-mail addresses: y.sayyari@sirjantech.ac.ir (Y. Sayyari), a.mohammadhasani@gmail.com (A. Mohammadhasani), mdehghanian@sirjantech.ac.ir (M. Dehghanian).