



تقریب تابع مجهول وابسته به زمان در مسئله معکوس تلگراف یک‌بعدی

کمال راشدی، علی طهماسبی، اکبر هاشمی برزآبادی *

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۲۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۱

چکیده: در این مقاله، مسئله معکوس خطی جهت تقریب تابع وابسته به زمان در متن معادله هذلولوی مرتبه دوم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. جهت حل مسئله، شرایط مرزی نیومان به‌همراه یک شرط انتگرالی و هم‌چنین وضعیت تابع موج در لحظه‌های آغازین و پایانی معلوم فرض شده است. در گام نخست، نشان داده شده که این مسئله دارای جواب یکتا است. سپس با استفاده از تبدیلاتی مناسب، مسئله معکوس اولیه با مسئله جدیدی جای‌گزین شده و یک تقریب طیفی بر اساس روش ریتز جهت بازیابی توابع مجهول ارائه گردیده است. گسسته‌سازی مسئله با استفاده از ره‌یافت ارائه شده، به یک دستگاه معادلات خطی منتهی می‌شود که از روش منظم‌سازی تیخونوف جهت حل آن استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی که حاصل از حل چند مثال عددی است، موید دقت بالا و پایداری جواب تقریبی‌اند.

واژه‌های کلیدی: مسئله معکوس تلگراف، وجود و یکتایی جواب، منظم‌سازی تیخونوف، روش طیفی، گسسته‌سازی.

رده‌بندی ریاضی: 45M32; 65N59; 65F22

۱ مقدمه

معادله تلگراف یکی از مناسب‌ترین معادله‌های شناخته‌شده در مدل‌سازی و توصیف فرآیندهای واکنش-انتشار می‌باشد. به‌همین دلیل در مطالعه بسیاری از معادلات مهم مهندسی و علوم دیده می‌شود که از جمله آن‌ها می‌توان به پدیده انتشار امواج، انتقال و انتشار سیگنال‌های الکتریکی، پردازش تصویر دیجیتال، ترمودینامیک و هیدرودینامیک اشاره کرد [۹]، [۱]، [۱۱]، [۴]، [۳]، [۲]. در مطالعه برخی از پدیده‌های فیزیکی پارامترهای ناشناخته‌ای وجود دارند که برای تعیین آن‌ها باید با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برخورد کنیم که قالبی متفاوت از شکل سنتی دارند، زیرا این پارامترهای مجهول در متن معادله حاکم و یا شرایط مرزی ظاهر می‌شوند. به‌عنوان مثال می‌توان به پدیده‌هایی مانند هدایت گرما و انتشار موج اشاره کرد که در طی آن برخی ویژگی‌های یک محیط رسانا، مانند ظرفیت ویژه گرمایی، ضریب انتشار یا سرعت جبهه‌ی موج را نمی‌توان مستقیماً تعیین کرد، چراکه تعیین آن‌ها از نظر محاسباتی هزینه‌بردار است. بنابراین، رویکرد صحیح برای بازیابی این مجهولات، ایجاد یک مدل ریاضی معکوس و استفاده از داده‌های قابل دسترس‌تر جهت تقریب مجهولات موردنظر است. در این راستا، معادله معکوس موج

*نویسنده مسئول مقاله

مرتبه دوم از پرکاربردترین و اساسی‌ترین معادلات در ریاضی-فیزیک و علوم مهندسی است و پژوهش‌های متنوعی در این زمینه با محوریت معادله معکوس موج برای تعیین ضریب یا پارامتر مجهول، بازیابی منبع موج و تقریب شرایط مرزی انجام شده است [۱۷]، [۱۵]، [۱۰]، [۸]، [۷].

در این مقاله، مسئله بازیابی توابع $(u(x, t), G(t))$ در معادله خطی تلگراف یک‌بعدی در دستگاه معادلات زیر در نظر گرفته شده است:

$$u_{tt}(x, t) + 2\alpha u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \beta^2 u(x, t) = G(t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_1(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.1)$$

$$u_x(0, t) = b_1(t), \quad u_x(L, t) = b_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$\int_0^L \gamma(x, t) u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

که در آن فرض می‌کنیم شرایط زیر برای داده‌های مسئله برقرار باشد:

$$u'_0(x), u'_1(x) \in C^2[0, L], \quad b_1(t), b_2(t) \in C^2[0, T], \quad z(t) := \int_0^L \gamma(x, t) dx \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.1)$$

$$u'_0(0) = b_1(0), \quad u'_0(L) = b_2(0), \quad u'_1(0) = b_1(T), \quad u'_1(L) = b_2(T), \quad (6.1)$$

$$\int_0^L \gamma(x, 0) u_0(x) dx = E(0), \quad \int_0^L \gamma(x, T) u_1(x) dx = E(T). \quad (7.1)$$

در ادامه با استفاده از روش فوریه و به کارگیری فرض‌های مسئله، یکتایی جواب برای مسئله معکوس بیان شده در معادله‌های (۱.۱)-(۴.۱) اثبات می‌گردد. سپس ره‌یافت عددی دقیقی برای بازیابی توابع مجهول مسئله ارائه شده و در پایان نتایج شبیه‌سازی عددی حاصل از کاربرد روش، در حل چندین مثال عددی ارائه خواهد شد.

۲ یکتایی جواب

در این بخش نشان داده می‌شود تحت شرایطی مناسب، مسئله معکوس داده‌شده در معادلات (۱.۱)-(۴.۱) دارای جواب یکتا است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم شرایط موجود در معادله‌های (۵.۱)-(۷.۱) برقرار باشند و به علاوه داشته باشیم:

$$\alpha^2 - \beta^2 \leq \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2 T} \notin \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}, \quad s.t. \quad \lambda_n^2 := \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \beta^2, \quad (1.2)$$

در این صورت مسئله معکوس (۱.۱)-(۴.۱) دارای جواب یکتا در $C^{2,2}([0, L] \times [0, T])$ است.

اثبات. در گام نخست با معرفی تبدیل

$$v(x, t) = u_x(x, t), \quad (2.2)$$

و استفاده از آن در معادلات (۱.۱)-(۴.۱)، به مسئله جدیدی از معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی به صورت زیر دست می‌یابیم:

$$v_{tt}(x, t) + 2\alpha v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) + \beta^2 v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$v(x, 0) = u'_0(x), \quad v(x, T) = u'_1(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.2)$$

$$v(0, t) = b_1(t), \quad v(L, t) = b_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.2)$$

اکنون فرض کنیم دستگاه معادلات (۳.۲)-(۵.۲) دارای دو دسته جواب به شکل $(v_1(x, t), v_2(x, t))$ باشد به قسمی که

$$\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad v_1(x, t) \neq v_2(x, t),$$

سپس با تعریف $w(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$ و استفاده از آن در معادلات (۳.۲)-(۵.۲) داریم:

$$w_{tt}(x, t) + 2\alpha w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) + \beta^2 w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$w(x, 0) = w(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (7.2)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (8.2)$$

جواب فوریه برای دستگاه معادلات (۶.۲)-(۸.۲) را به صورت زیر پیش نهاد می کنیم:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(t), \quad (9.2)$$

به قسمی که توابع $X_n(x)$ جواب های غیربدیهی معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی همگن زیراند:

$$\begin{cases} X''(x) + (\lambda^2 - \beta^2)X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (10.2)$$

با انجام محاسباتی مختصر می توان نشان داد که معادله (۱۰.۲) دارای توابع ویژه و مقادیر ویژه زیراند:

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \beta^2, \quad X_n(x) = \sin(\lambda_n x). \quad (11.2)$$

از جای گذاری رابطه (۹.۲) در معادله (۶.۲) و استفاده از معادلات (۷.۲) و (۱۰.۲)-(۱۱.۲)، به این نتیجه می رسیم که توابع $Y_n(t)$ در معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} Y_n''(t) + 2\alpha Y_n'(t) + \lambda_n^2 Y_n(t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_n(0) = Y_n(T) = 0. \end{cases} \quad (12.2)$$

جواب نابدیهی معادله دیفرانسیل (۱۲.۲) به شرطی که $\alpha^2 - \beta^2 \leq \frac{\pi^2}{L^2}$ عبارت است از:

$$Y_n(t) = e^{-\alpha t} \left\{ A_n \cos(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} t) \right\},$$

که با اعمال شرایط مرزی همگن موجود در معادله (۱۲.۲) و همچنین با این فرض که عبارت $\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} T$ به ازای هر عدد طبیعی n مضربی صحیح از π نباشد، داریم $A_n = B_n = 0$. با احتساب این امر، جواب یکتای مسئله (۶.۲) برابر است با

$$w(x, t) = 0. \quad (13.2)$$

بنابراین از (۱۳.۲) خواهیم داشت $v_1(x, t) = v_2(x, t)$. اکنون یکتایی جواب برای مسئله (۳.۲)-(۵.۲) به اثبات می رسد و از این جا با در نظر گرفتن $v(x, t)$ به عنوان جواب یکتای (۳.۲)-(۵.۲) و انتگرال گیری از معادله (۲.۲) داریم:

$$u(x, t) = \int_0^x v(y, t) dy + H(t), \quad (14.2)$$

که با بهره‌گیری از شرط (۴.۱) با تعریف

$$\int_0^x v(y, t) dy := \Gamma(x, t),$$

داریم:

$$H(t) = \frac{E(t) - \int_0^L \gamma(x, t) \Gamma(x, t) dx}{z(t)}.$$

بنابراین تابع $u(x, t)$ به صورت یکتا از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$u(x, t) = \Gamma(x, t) + \frac{E(t) - \int_0^L \gamma(x, t) \Gamma(x, t) dx}{z(t)}. \quad (۱۵.۲)$$

در نهایت با در نظر گرفتن $u(x, t)$ حاصل از رابطه (۱۵.۲) به عنوان جواب یکتای مسئله (۱.۱)-(۴.۱) و ترکیب شرایط (۱.۱) و (۴.۱) به این نتیجه می‌رسیم که تابع $G(t)$ به صورت یکتا از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

$$G(t) = \frac{\int_0^L \gamma(x, t) u_{tt}(x, t) dx + 2\alpha \int_0^L \gamma(x, t) u_t(x, t) dx - \int_0^L \gamma(x, t) u_{xx}(x, t) dx + \beta^2 E(t)}{z(t)}. \quad (۱۶.۲)$$

□

۳ راه‌یافت عددی

نخست، فرض کنیم $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ و $\{\psi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ مجموعه‌هایی از پایه‌های یکا-متعامد تعریف شده به ترتیب بر بازه‌های $[0, L]$ و $[0, T]$ باشند که در خاصیت دلتای کرونگر به صورت زیر صدق کنند:

$$\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad \int_0^T \psi_i(t) \psi_j(t) dt = \delta_{ij}. \quad (۱.۳)$$

هم‌چنین فرض کنیم توابع برداری زیر شامل توابع یکا-متعامد مذکور، به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\Phi(x) := [\phi_0(x), \dots, \phi_m(x)]^{tr}, \quad \Psi(t) := [\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)]^{tr}. \quad (۲.۳)$$

در این صورت مشتق این توابع برداری را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی مشتق به صورت زیر تعیین کرد:

$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = D_{m,L} \Phi(x), \quad \frac{d}{dt} \Psi(t) = D_{n,T} \Psi(t). \quad (۳.۳)$$

با در نظر گرفتن درایه ماتریس‌های $D_{m,L}$ و $D_{n,T}$ به ترتیب با نمادهای $D_{m,L}^{ij}$ و $D_{n,T}^{ij}$ داریم:

$$D_{m,L}^{ij} = \int_0^L \Delta_i(x) \phi_j(x) dx, \quad \Delta_i(x) = \frac{d}{dx} \phi_i(x), \quad i, j = \overline{0, m},$$

$$D_{n,T}^{ij} = \int_0^T \Delta_i^*(t) \psi_j(t) dt, \quad \Delta_i^*(t) = \frac{d}{dt} \psi_i(t), \quad i, j = \overline{0, n}.$$

حال کافی است حل تقریبی تابع مجهول $v(x, t)$ موجود در معادلات (۳.۲)-(۵.۲) ارائه گردد. در این راستا تقریب ریتز [۱۲، ۱۴، ۲۱] با استفاده از پایه‌های یکا-متعامد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_{m,n}(x, t) = x(x-L)t(t-T)\Phi^{tr}(x)C\Psi(t) + S(x, t), \quad (۴.۳)$$

که در آن C ماتریس شامل درایه های مجهول به صورت زیر است:

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m0} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (۵.۳)$$

و $S(x, t)$ تابع برآورنده [۱۵، ۲۱] شرایط (۴.۲)-(۵.۲) است که به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$S(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t) - \left(g_2(0, t) + \frac{x}{L}(g_2(L, t) - g_2(0, t)) \right), \quad (۶.۳)$$

$$g_1(x, t) = b_1(t) + \frac{x}{L}(b_2(t) - b_1(t)), \quad g_2(x, t) = u'_0(x) + \frac{t}{T}(u'_1(x) - u'_0(x)). \quad (۷.۳)$$

در گام بعدی تقریب توابع مجهول $v_t(x, t)$, $v_{tt}(x, t)$, $v_{xx}(x, t)$ را با استفاده از رابطه (۴.۳) و به کارگیری ماتریس های عملیاتی مشتق به صورت زیر ارائه می دهیم:

$$v_{tt}(x, t) \simeq x(x - L)\Phi^{tr}(x)C \left(2\Psi(t) + (4t - 2T)D_{n,T}\Psi(t) + t(t - T)D_{n,T}^2\Psi(t) \right) + b''_2(t) + \frac{x}{L}(b''_2(t) - b''_1(t)), \quad (۸.۳)$$

$$v_{xx}(x, t) \simeq t(t - T) \left(2\Phi^{tr}(x) + (4x - 2L)\phi^{tr}(x)D_{m,L}^{tr} + x(x - L)\Phi^{tr}(x)(D_{m,L}^{tr})^2 \right) C\Psi(t) + u''_0(x) + \frac{t}{T}(u'''_1(x) - u'''_0(x)), \quad (۹.۳)$$

$$v_t(x, t) \simeq x(x - L)\Phi^{tr}(x)C \left((2t - T)\Psi(t) + t(t - T)D_{n,T}\Psi(t) \right) + \frac{u'_1(x) - u'_0(x)}{T} + b'_2(t) + \frac{x}{L}(b'_2(t) - b'_1(t)) - \left\{ \frac{1 - \frac{x}{L}}{T}(u'_1(0) - u'_0(0)) + \frac{x}{TL}(u'_1(L) - u'_0(L)) \right\}. \quad (۱۰.۳)$$

قابل ذکر است که تقریب (۴.۳) شرایط (۴.۲)-(۵.۲) را دقیقاً برآورده می کند. بنابراین کافی است این تقریب در معادله (۳.۲) جای گذاری شده و این معادله به صورت تقریبی برآورده گردد. در این راستا تابع باقی مانده $R(x, t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(x, t, v(x, t)) := v_{tt}(x, t) + 2\alpha v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) + \beta^2 v(x, t) \quad (۱۱.۳)$$

و از جای گذاری $v_{m,n}(x, t)$ به جای $v(x, t)$ و همچنین تقریب های (۸.۳)-(۱۰.۳) در تابع (۱۱.۳) داریم:

$$R(x, t, v_{m,n}(x, t)) = x(x - L)\Phi^{tr}(x)C \left(2\Psi(t) + (4t - 2T)D_{n,T}\Psi(t) + t(t - T)D_{n,T}^2\Psi(t) \right) + b''_2(t) + \frac{x}{L}(b''_2(t) - b''_1(t)) - \left\{ u'''_0(x) + \frac{t}{T}(u'''_1(x) - u'''_0(x)) \right\} + \beta^2 \left\{ x(x - L)t(t - T)\Phi^{tr}(x)C\Psi(t) \right\} - t(t - T) \left(2\Phi^{tr}(x) + (4x - 2L)\phi^{tr}(x)D_{m,L}^{tr} + x(x - L)\Phi^{tr}(x)(D_{m,L}^{tr})^2 \right) C\Psi(t) + \beta^2 S(x, t)$$

$$+2\alpha \left\{ x(x-L)\Phi^{tr}(x)C \left((2t-T)\Psi(t) + t(t-T)D_{n,T}\Psi(t) \right) + \frac{u'_1(x) - u'_0(x)}{T} \right. \\ \left. + b'_2(t) + \frac{x}{L}(b'_2(t) - b'_1(t)) - \left\{ \frac{1-\frac{x}{L}}{T}(u'_1(0) - u'_0(0)) + \frac{x}{TL}(u'_1(L) - u'_0(L)) \right\} \right\} \simeq 0. \quad (۱۲.۳)$$

با جای‌گذاری نقاط هم‌مکانی زیر

$$x_i = \frac{iL}{m+2}, \quad t_j = \frac{jT}{n+2}, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (۱۳.۳)$$

در تابع (۱۲.۳) داریم:

$$R(x_i, t_j, v_{m,n}(x_i, t_j)) = 0, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (۱۴.۳)$$

که این هم‌ارز با دستگاهی از معادلات جبری خطی به‌صورت زیر است:

$$Ac = g, \quad c = [c_{00}, \dots, c_{0n}, c_{10}, \dots, c_{1n}, \dots, c_{m0}, \dots, c_{mn}]^{tr}. \quad (۱۵.۳)$$

با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف [۵، ۶، ۱۶، ۱۹]، جواب دستگاه (۱۵.۳) به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$c = (A^{tr}A + \mu I)^{-1}A^{tr}g,$$

که در آن $\mu > 0$ پارامتر منظم‌سازی نامیده می‌شود. سپس با استفاده از روابط (۱۵.۲)–(۱۶.۲) و در نظر گرفتن رابطه

$$\Gamma(x, t) \simeq \Gamma_{m,n}(x, t) = \int_0^x v_{m,n}(y, t)dy,$$

خواهیم داشت:

$$u_{m,n}(x, t) = \Gamma_{m,n}(x, t) + \frac{E(t) - \int_0^L \gamma(x, t)\Gamma_{m,n}(x, t)dx}{z(t)}. \quad (۱۶.۳)$$

$$G_{m,n}(t) = \frac{\int_0^L \gamma(x, t) \frac{\partial^2 u_{m,n}(x, t)}{\partial t^2} dx + 2\alpha \int_0^L \gamma(x, t) \frac{\partial u_{m,n}(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^L \gamma(x, t) \frac{\partial^2 u_{m,n}(x, t)}{\partial x^2} dx + \beta^2 E(t)}{z(t)}. \quad (۱۷.۳)$$

با تمرکز بر فرمول (۱۷.۳)، محاسبه تقریب پایدار برای توابع $E'(t)$ ، $E''(t)$ ، به‌ویژه اگر تابع $E(t)$ با نویز همراه باشد، نیازمند استفاده از روشی مناسب برای محاسبه مشتق عددی پایدار است. در این راستا فرض کنیم تابع $E_\sigma(t)$ تابع آغشته به نویز باشد [۲۰]، طوری که

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (E(t_k) - E_\sigma(t_k))^2 \leq \sigma^2, \quad t_k \in [0, T], \quad M \in \mathbb{N}.$$

با استفاده از نتایج ارائه‌شده در [۱۸]، جواب مسئله بهینه‌سازی زیر:

$$(۱۸.۳)$$

$$\min_{E \in \Gamma_k} \Omega(E) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M (E(t_r) - E_\sigma(t_r))^2 + \mu^* \left\| \frac{d^k E}{dt^k} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad s.t \Gamma_k = \{E | E \in C^{k-1}(\mathbb{R}), E^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

عبارت است از

$$E_{\mu^*}(t) = \sum_{j=1}^M \Theta_j |t - t_j|^{2k-1} + \sum_{j=1}^k d_j t^{j-1}. \quad (۱۹.۳)$$

جدول ۱: جدول زیر مربوط به نرم-۲ خطای مطلق توابع $G(t)$, $u(x, t)$, $R(x, t, v(x, t))$ است که به ازای پارامترهای مختلف m, n و با احتساب داده‌های مرزی دقیق (عاری از نویز) در مثال ۱، مورد بررسی قرار گرفته است.

μ	$\ R(x, t, v_{m,n}(x, t))\ _2$	$\ E(u)\ _2$	$\ E(G)\ _2$	(m, n)
10^{-6}	0.05	0.0018	0.0048	(3, 3)
10^{-6}	0.00012	7.39×10^{-8}	1.52×10^{-7}	(5, 5)
10^{-8}	6.68×10^{-7}	2.42×10^{-10}	8.35×10^{-9}	(7, 7)

در رابطه (۱۹.۳)، ضرایب $\{\Theta_j\}_{j=1}^M$ و $\{d_j\}_{j=1}^k$ در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$E_{\mu^*}(t_i) + 2(2k - 1)!(-1)^k \mu^* M \Theta_i - E_{\sigma}(t_i) = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad (20.3)$$

$$\sum_{j=1}^k d_j t_j^i = 0, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (21.3)$$

که در آن μ^* پارامتر منظم سازی است و یک انتخاب مناسب برای این پارامتر $\mu^* = \sigma^2$ معرفی شده است. بنابراین برای محاسبه تقریب $E'(t)$ و $E''(t)$ کافی است در روابط (۱۹.۳)-(۲۱.۳) به ترتیب قرار دهیم $k = 2$ و $k = 3$. در پایان، پس از محاسبه $E_{\mu^*}(t)$ خواهیم داشت:

$$E'(t) \simeq \frac{dE_{\mu^*}(t)}{dt}, \quad E''(t) \simeq \frac{d^2E_{\mu^*}(t)}{dt^2}.$$

۴ نتایج عددی

در این بخش روش ارائه شده در بخش قبلی برای حل سه مثال عددی مورد استفاده قرار گرفته است. پایه‌های مورد استفاده در این مقاله توابع پایه‌ای برنشتاین یکا-متعامداند که نحوه به دست آوردن آنها به طور مفصل در مراجع [۱۳، ۱۴] مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمایش دقت تقریب‌های ارائه شده، توابع خطای مطلق و همچنین خطای نسبی به صورت زیر

$$E(G) = |G(t) - G_{m,n}(t)|, \quad E(u) = |u(x, t) - u_{m,n}(x, t)|,$$

$$\delta(G) = \frac{E(G)}{|G(t)|}, \quad \delta(u) = \frac{E(u)}{|u(x, t)|},$$

در نظر گرفته می‌شوند. محاسبات با استفاده از نرم افزار متاتیکا نسخه 12.3 انجام شده است. ضمناً از دستور *LinearSolve* برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده شده است.

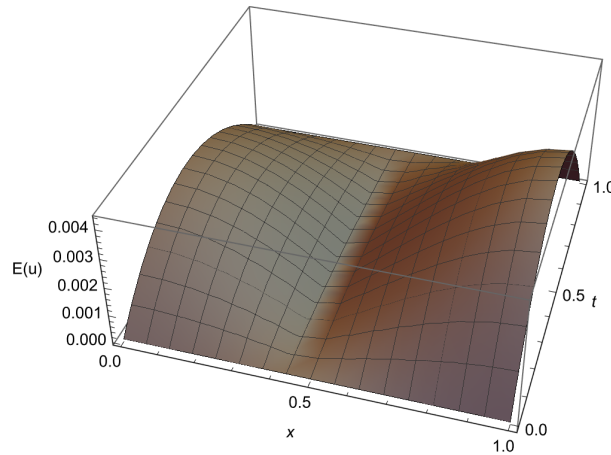
مثال ۱. مسئله معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t) - u_{xx}(x, t) = G(t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

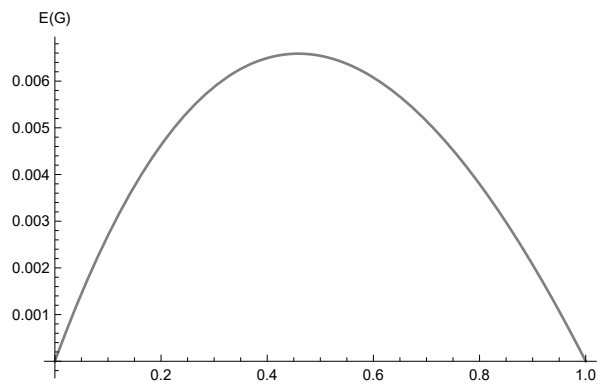
$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = \sinh(1)e^{-t}, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = \cosh(x) + 1, \quad u(x, 1) = e^{-1}(e^2 + \cosh(x)), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 e^{-x} u(x, t) dx = e^{t^2-1}(e-1) + \frac{3e^2-1}{4} e^{-t-2}, \quad t \in [0, 1].$$



شکل ۱: این نمودار مربوط به خطای مطلق تابع $u(x, t)$ است که به‌ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۱، مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۲: این نمودار مربوط به خطای مطلق تابع $G(t)$ است که به‌ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۱، مورد بحث قرار گرفته است.

جواب دقیق مسئله عبارت است از

$$u(x, t) = e^{-t} \cosh(x) + e^{t^2}, \quad G(t) = (4t^2 + 2t + 3)e^{t^2}.$$

مسئله فوق را با استفاده از روش ارائه‌شده در بخش ۳ و به‌کارگیری پارامترهای $m = n = 3$, $\mu = 10^{-6}$ حل کرده و نتایج حاصل را در شکل‌های ۱-۴ ارائه می‌دهیم. سپس محاسبات عددی را با تاکید بر افزایش تعداد پایه‌های استفاده‌شده در تقریب‌ها تکرار کرده و نتایج حاصل را نیز در جدول ۱ نمایش می‌دهیم. از مقایسه نتایج، مشاهده می‌شود که هم‌زمان با افزایش پارامترهای m, n دقت در تقریب‌های عددی نیز بهبود می‌یابد.

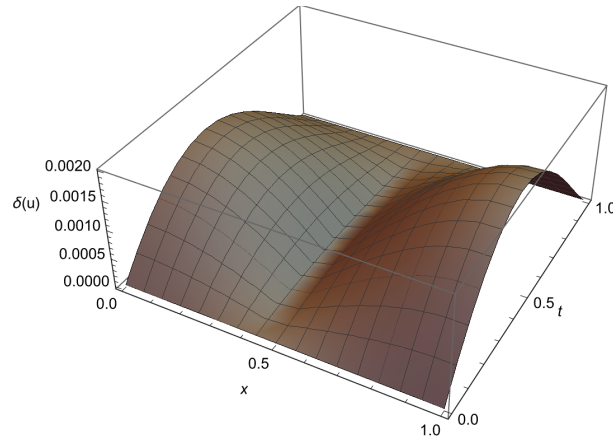
مثال ۲. مسئله معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{tt}(x, t) + 4u_t(x, t) + 2u(x, t) - u_{xx}(x, t) = G(t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

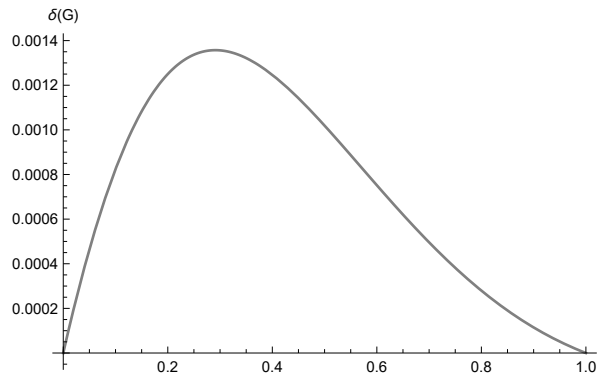
$$u_x(0, t) = e^{-t}, \quad u_x(1, t) = e^{-t} \cos(1), \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u(x, 1) = \frac{\sin(x) + \sin(1)}{e}, \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 (x^2 + t^2)u(x, t)dx = e^{-t} \left(-2 + \cos(1) + 2(t \sin(\frac{1}{2}))^2 + 2 \sin(1) + (t^2 + \frac{1}{3}) \sin(t) \right), \quad t \in [0, 1].$$



شکل ۳: این نمودار مربوط به خطای نسبی تابع $u(x, t)$ است که به ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۱، مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۴: این نمودار مربوط به خطای نسبی تابع $G(t)$ است که به ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۱، مورد بحث قرار گرفته است.

را در نظر می‌گیریم که در آن هدف تقریب جواب‌های دقیق مسئله به صورت زیر است:

$$u(x, t) = e^{-t} \left(\sin(x) + \sin(t) \right), \quad G(t) = 2e^{-t} \left(\cos(t) - \sin(t) \right).$$

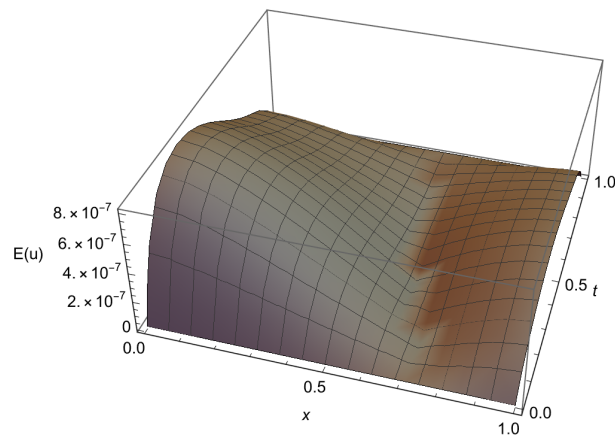
با به کارگیری روش پیشنهاد شده در بخش ۳ و استفاده از پارامترهای $m = n = 3$ ، $\mu = 10^{-6}$ نتایج عددی نمایش داده شده در شکل‌های ۵-۶ به دست آمده است که موید رسیدن به دقت‌های مناسب برای توابع مجهول‌اند. در گام بعدی، کارکرد روش پیشنهاد شده را در حالتی که داده‌های مرزی در معرض نویز قرار داشته باشند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا، شرایط مرزی غیردقیق (همراه با خطا) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$E_{\sigma}(t_i) = E(t_i) + \sigma \text{RandomReal}[\{-1, 1\}], \quad t_i = \frac{i-1}{19}, \quad i = \overline{1, 19}, \quad (1.4)$$

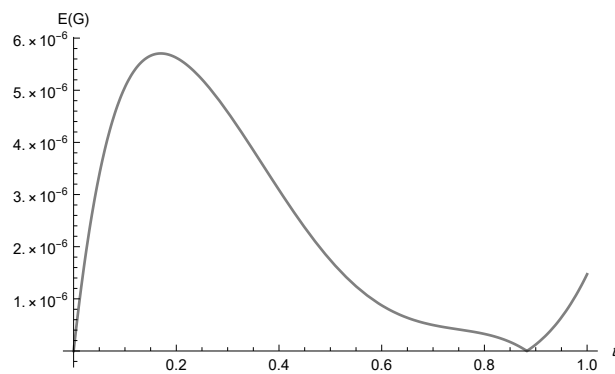
که در آن σ ضریب اختلال نامیده می‌شود و تابع $\text{RandomReal}[\{-1, 1\}]$ یک عدد حقیقی تصادفی در بازه $[-1, 1]$ را تولید می‌کند. مسئله را به ازای مقادیر مختلف $\sigma \in \{10^{-3}, 3 \times 10^{-3}, 6 \times 10^{-3}\}$ حل می‌کنیم. نتایج حاصل از این مطالعه در شکل ۷ گزارش شده است که نشان می‌دهد کارکرد روش در تعامل با این مقادیر نسبتاً کوچک قابل قبول است، زیرا میزان خطا در داده‌های ورودی و خروجی تقریباً متناسب‌اند.

مثال ۳. به عنوان آخرین مثال، مسئله معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

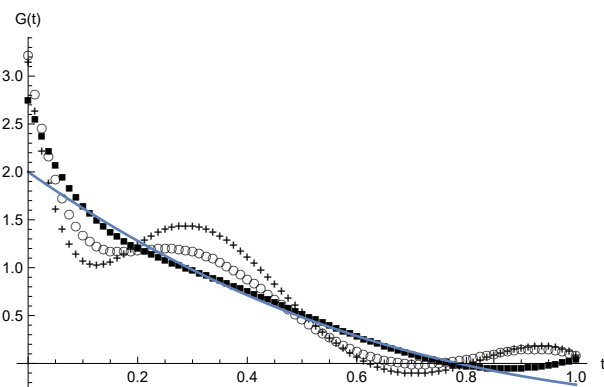
$$u_{tt}(x, t) + 6u_t(x, t) + 4u(x, t) - u_{xx}(x, t) = G(t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1),$$



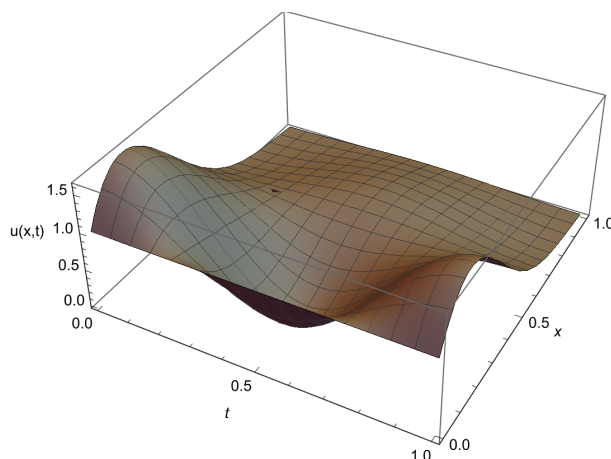
شکل ۵: این نمودار مربوط به خطای مطلق تابع $u(x, t)$ است که به‌ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۲، مورد بحث قرار گرفته است.



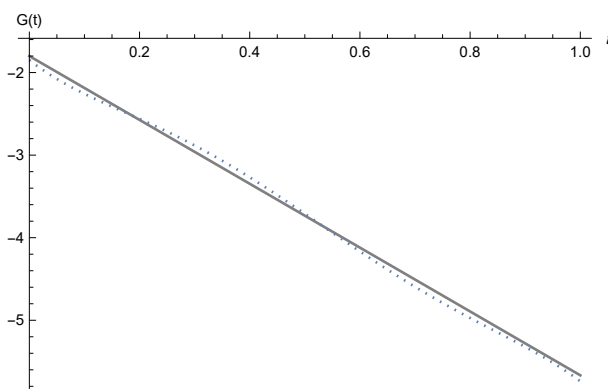
شکل ۶: این نمودار مربوط به خطای مطلق تابع $G(t)$ است که به‌ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۲، مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۷: این نمودار تقریب‌های بدست‌آمده برای تابع مجهول $G(t)$ را نمایش می‌دهد که در مثال ۲، به‌ازای ضرایب اختلال مختلف مورد بحث قرار گرفته است: ■■■ نمایان‌گر تابع مجهول مربوط به حالتی است که $\sigma = 10^{-3}$ است؛ ○○○ مربوط به حالتی است که $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ است؛ +++ نمایان‌گر تابع مجهول مربوط به حالتی است که $\sigma = 6 \times 10^{-3}$ است.



شکل ۸: این نمودار مربوط به جواب تقریبی تابع $u(x, t)$ است که به ازای پارامترهای $m = n = 3$ و داده‌های مرزی دقیق در مثال ۳، مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۹: این نمودار مربوط به جواب‌های تقریبی تابع $G(t)$ است که به ازای پارامترهای $m = n = 3$ در مثال ۳، مورد بحث قرار گرفته است. لازم به ذکر است که نمودار مشخص شده با علامت ... مربوط به حالتی است که داده‌های مرزی در معرض نویز باشند و دیگری مربوط به شرایط مرزی دقیق است.

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = x^2(x-1)^2, \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 1 - \frac{29t}{30}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

برخلاف مثال‌های قبلی جواب دقیق برای این مسئله در دسترس نیست. شرط (۲.۴) را هم در حالتی که عاری از هرگونه خطا باشد و هم در حالتی که در معرض نویز تعریف شده در رابطه (۱.۴) با ضریب اختلال $\sigma = 4 \times 10^{-3}$ قرار گرفته باشد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از روش پیشنهاد شده در بخش ۳ و استفاده از پارامترهای $m = n = 3$, $\mu = 10^{-5}$ مسئله را حل کرده و به نتایج عددی نمایش داده شده در شکل‌های ۸-۹ دست می‌یابیم.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله معکوس خطی جهت تقریب تابع وابسته به زمان در متن معادله هذلولوی مرتبه دوم مورد مطالعه قرار گرفته است. در گام نخست، یکتایی جواب برای مسئله معکوس به اثبات رسیده است. سپس مسئله اولیه با استفاده از تبدیلاتی مناسب به یک مسئله جدید تبدیل

شده و در گام بعدی، یک تقریب طیفی بر اساس روش ریتز برای بازیابی توابع مجهول ارائه شده است. گسسته‌سازی مسئله با استفاده از روش ارائه شده به یک دستگاه معادلات خطی منتهی می‌شود که برای حل آن از روش منظم‌سازی تیخونوف استفاده شده است. نتیجه شبیه‌سازی عددی برای سه مثال حل شده موید دقت قابل قبول و پایداری جواب تقریبی‌اند.

فهرست منابع

- [1] W. Alharbi, S. Petrovskii, Critical domain problem for the reaction-telegraph equation model of population dynamics, *Mathematics*, 6(4) (2018) 59, <https://doi.org/10.3390/math6040059>.
- [2] N. Berwal, D. Panchal and C. L. Parihar, Haar wavelet method for numerical solution of telegraph equations, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33 (2013) 317-328.
- [3] M. Dehghan, A. Shokri, A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24 (2008) 1080-1093.
- [4] T. M. Elzaki, E. Hilal and J. S. Arabia, Analytical solution for telegraph equation by modified of Sumudu transform “Elzaki transform”, *Mathematical Theory and Modeling*, 2 (2012) 104-111.
- [5] P. C. Hansen, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Review*, 34 (1992) 561-580.
- [6] B. T. Johanson, D. Lesnic and T. Reeve, A method of fundamental solutions for the one-dimensional inverse Stefan problem, *Applied Mathematical Modelling*, 35 (2011) 4367-4378.
- [7] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, 2011.
- [8] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, 2006.
- [9] A. I. Kozhanov, R. Safiullova, Determination of parameters in telegraph equation, *Ufa Mathematical Journal*, 9 (2017) 62-74.
- [10] W. Liao, A computational method to estimate the unknown coefficient in a wave equation using boundary measurements, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19 (2011) 855-887.
- [11] R. C. Mittal, R. Bhatia, Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 220 (2011) 496-506.
- [12] K. Rashedi, A spectral method based on Bernstein orthonormal basis functions for solving an inverse Roseneau equation, *Computational & applied Mathematics*, 41 (2022) (In Press).
- [13] K. Rashedi, Reconstruction of a time-dependent coefficient in nonlinear Klein–Gordon equation using Bernstein spectral method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46 (2023) 1752-1771.
- [14] K. Rashedi, A numerical solution of an inverse diffusion problem based on operational matrices of orthonormal polynomials, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44 (2021) 12980-12997.
- [15] K. Rashedi and H. Adibi and M. Dehghan, Application of the Ritz-Galerkin method for recovering the spacewise-coefficients in the wave equation, *Computer and Mathematics with Applications*, 65 (2013) 1990-2008.

- [16] K. Rashedi and F. Baharifard and A. Sarraf, Stable recovery of a space-dependent force function in a one-dimensional wave equation via Ritz collocation method, *Journal of Mathematical Modeling*, 10 (2022) 463-480.
- [17] F. Torabi, R. Pourgholi, Numerical solution for solving inverse telegraph equation by extended cubic B-spline, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, (2022) In Press, *https : //ijnaa.semnan.ac.ir/article7016.html*
- [18] T. Wei, M. Li, High order numerical derivatives for one-dimensional scattered noisy data, *Applied Mathematics and Computation*, 175 (2006) 1744-1759.
- [19] J. Wen, M. Yamamoto, Reconstruction of a moving boundary from Cauchy data in one-dimensional heat equation, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 17 (2009) 551–567.
- [20] J. Wen and M. Yamamoto and T. Wei, Simultaneous determination of a time-dependent heat source and the initial temperature in an inverse heat conduction problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 21 (2013) 485-499.
- [21] S. A. Yousefi, Finding a control parameter in a onedimensional parabolic inverse problem by using the Bernstein Galerkin method, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 17 (2009) 821-828.



Approximation of a timewise dependent function in the inverse one-dimensional telegraph equation

Kamal Rashedi, Ali Tahmasbi, Akbar Hashemi Borzabadi [†],

Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2023/3/12

Accepted: 2023/6/19

Abstract: In this article, we study the linear inverse problem for approximating a timewise-dependent function in the second-order hyperbolic equation. To solve the problem, information such as Neumann boundary conditions along with an integral condition and the situation of the wave function at the initial and the final instants have been provided. In the first step, we show that this problem has a unique solution. Then, we change the main problem into a new one and then we present the spectral approximation based on the Ritz method to recover the unknown functions. Discretization of the problem by using the presented technique leads to a linear system of algebraic equations, which Tikhonov's regularization method is used to obtain stable solutions. The results of the numerical simulation confirm the high accuracy and stability of the approximate solution.

Keywords: Inverse telegraph problem; Existence and uniqueness of solution; Tikhonov regularization; Spectral method; Discretization.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: borzabadi@mazust.ac.ir