



ارائه روشی جدید برای جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر با به‌کارگیری برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی

محمدسعید علمداری^{*}، مسعود فاطمی

دانشکده ریاضی کاربردی، دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران

دبیر مسئول: علی‌رضا فخارزاده چهارمی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۳۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۴

چکیده: یکی از شایع‌ترین دلایل مرگ و میر در هنگام تولد نوزادان نارسایی‌های قلبی است. تشخیص این بیماری نیازمند مشاهده فعالیت قلب است. از آنجایی که سیگنال‌های الکتریکی ثبت‌شده‌ی شکم مادر، حاوی اطلاعات زیادی از قبیل: سیگنال قلب مادر، فعالیت ماهیچه‌ای مادر و جنین، فعالیت مغزی جنین و نویزهای محیط است، از این رو محققان به دنبال روش‌هایی جهت جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادرند.

این مقاله، روشی را مبتنی بر برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی برای جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر ارائه می‌کند. روش پیشنهادی دارای هم‌گرایی زبرخطی است که نتایج هم‌گرایی سراسری آن ارائه و راه حل دقیقی برای حل مشکل فرعی فراهم می‌کند. عمل‌کرد اجرای روش پیشنهادی با بهترین روش‌های موجود مقایسه و نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر در مقایسه با سایر روش‌ها، کم‌ترین میزان خطا و بیش‌ترین سرعت را دارا است.

واژه‌های کلیدی: سیگنال قلب جنین، نمایش تُنک سیگنال، حس‌گری فشرده، نرم صفر هموار شده.

رده‌بندی ریاضی: 65K10; 78M50; 90C20

مقدمه ۱

نارسایی قلبی ممکن است از بدو تولد، نوزاد را تحت تأثیر قرار دهد یا ممکن است تا سال‌ها بعد به‌صورت ناشناخته در بدن او باقی بماند. از این رو، مشاهده سیگنال قلب جنین می‌تواند به پزشکان در تشخیص زودهنگام بیماری‌های قلبی کمک کند. الکتروکاردیوگرام یا نوار قلب به نمودار تغییرات پتانسیل الکتریکی ناشی از تحریک عضله قلب گفته می‌شود و یکی از قدیمی‌ترین و بادوام‌ترین ابزارهایی است که اطلاعات ارزشمندی را در اختیار متخصصین قرار می‌دهد. اطلاعاتی که روی الکتروکاردیوگرام ضبط می‌شود نشان‌دهنده امواج الکتریکی محرک قلب است. این امواج مراحل مختلف تحریک‌های قلبی را نشان داده و پزشکان می‌توانند از روی منحنی‌های ترسیم‌شده به نحوه عمل‌کرد قلب

^{*}نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (M.S. Alamdari) m.s.alamdari@email.kntu.ac.ir

پی‌بیرند.

هر منحنی مربوط به یک بار تپش قلب شامل سه موج مهم است: موج P فعالیت الکتریکی دهلیزها، موج QRS فعالیت الکتریکی بطن‌ها و موج T استراحت بطن‌های قلب را نمایش می‌دهند. به فاصله میان دو موج R متوالی فاصله «RR» گفته می‌شود و در تشخیص‌های پزشکی اهمیت زیادی دارد. نمونه یک سیگنال الکتروکاردیوگرام فرد سالم در شکل ۱ به‌نمایش درآمده است. به‌صورت اولین قدم برای پردازش سیگنال‌های الکتروکاردیوگرام، شناسایی موج‌های R به‌منظور بررسی سیکل‌های متوالی و فاصله RR



شکل ۱: نمونه‌ای از یک سیگنال الکتروکاردیوگرام فرد سالم با دو بار تپش قلب

است. برای مشاهده فعالیت قلب جنین، استخراج سیگنال الکتروکاردیوگرام همیشه یک کار چالش‌برانگیز بوده است؛ چرا که در ثبت‌های شکمی مادر علاوه بر سیگنال قلب جنین، انواع نویزها و سیگنال‌های مصنوعی از جمله سیگنال قلب مادر که دامنه آن خیلی بیش‌تر از الکتروکاردیوگرام جنین است، وجود دارد.

الکتروکاردیوگرام جنینی فعالیت‌های الکتروفیزیولوژی قلب جنین را نشان می‌دهد. این بیوسیگنال می‌تواند اطلاعات مهمی درباره وضع سلامت جنین ارائه دهد و به نظارت و کنترل سلامتی جنین و مادر کمک شایانی کند.

سیگنال الکتروکاردیوگرام جنین به دو شیوه اخذ می‌شود. در روش اول تهاجم الکتروودی به‌صورت مستقیم بر روی سر جنین قرار داده می‌شود و خطراتی برای مادر و جنین دارد. در روش دوم، چندین الکتروود بر روی شکم مادر قرار می‌گیرد تا سیگنال تهاجمی دریافت شود. این روش نسبت به روش اول کم‌خطرتر و دارای محبوبیت بیش‌تری است، اما دقت بالای روش اول را ندارد. سیگنال الکتروکاردیوگرام جنین بسیار ضعیف است و از طرفی توسط الکتروکاردیوگرام مادر و دیگر عوامل هم‌چون نویزهای تولیدشده‌ی ناشی از تنفس، تداخل‌های الکترومیوگرافی و نویزهای تصادفی غرق می‌شوند. مهم‌ترین عاملی که می‌تواند بر روی الکتروکاردیوگرام جنین تاثیر بگذارد و استخراج آن را دشوار کند، تداخل سیگنال الکتروکاردیوگرام مادر است [۱].

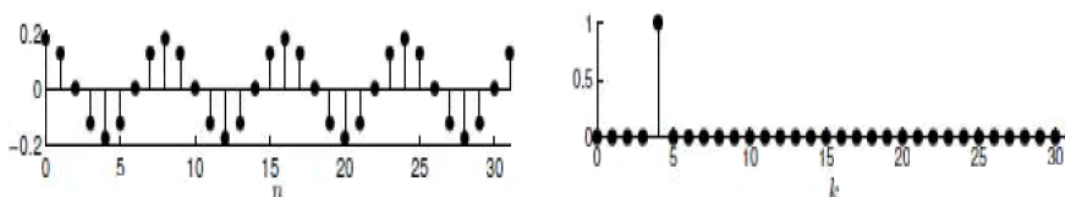
استفاده از روش‌های سنتی برای استخراج ویژگی از الکتروکاردیوگرام غیرتهاجمی جنین کار بسیار دشواری است. از این‌رو استخراج سیگنال شکم مادر که همراه با سیگنال‌های مزاحم دیگری است مورد توجه محققان قرار گرفته تا راه‌کارهای مؤثرتری برای جداسازی آن ارائه کنند. برای این منظور از روش‌های مختلفی هم‌چون آنالیز مؤلفه مستقل (ICA)، آنالیز مؤلفه مستقل اصلی (PCA)، تبدیل موجک، تبدیل فوریه استفاده کرده‌اند. مقایسه بین دو روش ICA و PCA اثبات می‌کند روش ICA در استخراج سیگنال قلب جنین عمل کرد بهتری نسبت به PCA دارد. در [۲] روشی ترکیبی مبتنی بر ICA و شبکه‌های عصبی به‌منظور استخراج سیگنال قلب جنین معرفی شده است. استفاده از شبکه‌های عصبی و روش بیزین، از دیگر روش‌هایی است که برای استخراج این سیگنال به کار گرفته شده است.

۲ مفهوم تنگی و حس‌گری فشرده

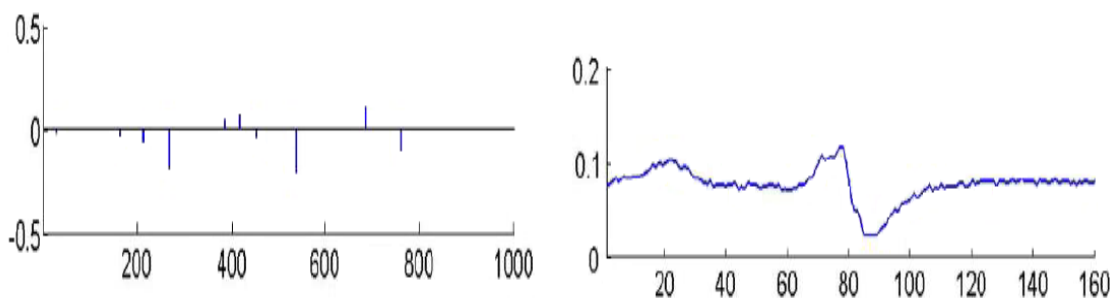
نمایش تنگ سیگنال که اولین بار در [۳] با الهام‌گرفتن از ساختار بینایی انسان معرفی شد در سال‌های اخیر به‌عنوان مدلی مناسب برای نمایش سیگنال‌ها در زمینه‌های مختلف استفاده شده است. اغلب روش‌های پردازش سیگنال کلاسیک بر پایه این فرضیه بنا شده‌اند که بر اساس آن می‌توان سیگنال‌ها را با بردارهایی در یک فضای برداری مناسب مدل نمود. در یک فضای بزرگ‌تر این فرض که هر بردار ممکن می‌تواند یک سیگنال معتبر و قابل قبول باشد، موجب افزایش بسیار زیادی در ابعاد داده‌ای که باید نمونه‌برداری و پردازش گردد، می‌شود و از این‌رو زمان و حجم محاسبات را به‌صورت نمائی افزایش می‌دهد. از طرفی غالباً این مدل‌های خطی ساده در استخراج ساختارهای موجود در بسیاری از کلاس‌های معمولی سیگنال به شکست منتهی می‌شوند و می‌توان مشاهده نمود که در اغلب موارد همه بردارهای موجود در آن فضا، یک سیگنال قابل قبول نمی‌باشند. در پاسخ به این چالش در سال‌های اخیر تمایل زیادی در میان حوزه‌های مختلف ایجاد شده است تا از مدل‌های کم‌بعد سیگنال گوناگون استفاده شود. این مدل‌ها غیرخطی بوده و بر این مفهوم استوارند که عدد درجه آزادی سیگنال‌های با

ابعاد بالا، در مقایسه با محدوده ابعادی آنها در فضای برداری کاملاً کوچک‌تر است. از جمله می‌توان به مدل تُنک، مدل ماتریس کم‌رتبه و مدل‌های پارامتری اشاره نمود.

در جبرخطی به ماتریسی که اکثر درایه‌های آن صفر باشند ماتریس تُنک گفته می‌شود و در صورت داشتن حداکثر k درایه غیرصفر، k -تُنک نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد بسیاری از سیگنال‌های طبیعی و یا مصنوعی چنان‌چه به صورت بردار یا ماتریس مدل شده باشند در حوزه تبدیلات فرکانسی ساختار تُنکی دارند. برای مثال شکل ۲ تبدیل DFT یک سیگنال سینوسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشهود است برخلاف سیگنال در حوزه زمان که به‌ازای هر واحد از زمان دارای مقدار است، تبدیل‌یافته آن در حوزه فرکانس فقط دارای تعداد اندکی ضریب فوریه غیرصفر است و از این رو نمایش سیگنال سینوسی در پایه این تبدیل، تُنک است. در شکل ۳ یک سیگنال قلبی و تبدیل فوریه آن به‌نمایش درآمده که دارای ضرایب فوریه غیرصفر محدودی است و از این رو می‌توان فرض نمود که نمایش سیگنال قلبی در پایه ضرایب تبدیل فوریه، تُنک خواهد بود.



شکل ۲: سیگنال سینوسی و سری ضرایب فوریه تُنک آن



شکل ۳: سیگنال قلب (سمت راست) و تبدیل فوریه آن (سمت چپ).

حس‌گری فشرده یا سنجش فشرده [۴]، یک روش جدید برای اخذ و بازسازی سیگنال‌های دیجیتالی است که امروزه در بسیاری از کاربردها از آن استفاده می‌شود. در این روش از خاصیت تُنک بودن سیگنال‌ها در یک حوزه خاص استفاده می‌شود و نمونه‌های لازم برای بازسازی سیگنال اصلی به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. در روش حس‌گری فشرده، تعداد اندکی از نمونه‌های یک سیگنال تُنک انتخاب می‌شوند و از این رو سیگنال فشرده می‌شود و با استفاده از روش‌هایی هم‌چون بهینه‌سازی نُرم یک، سیگنال اصلی بازسازی می‌شود. اخیراً این روش در مهندسی پزشکی مورد توجه زیادی قرار گرفته است؛ زیرا توسط روش حس‌گری فشرده، نظارت مداوم بر سیگنال‌های بیولوژیکی بیماران در داخل و یا حتی خارج از مراکز پزشکی تسهیل پیدا کرده است. به‌کمک این روش می‌توان داده‌های حجیم ناشی از ثبت طولانی‌مدت سیگنال‌های حیاتی بیمار را با حجم اندک ذخیره کرد و یا آنها را برای کاربردهای مختلفی هم‌چون دورپزشکی انتقال داد، در حالی که اطلاعات و ویژگی‌های لازم بیوسیگنال برای کنترل و نظارت حفظ شوند. در حس‌گری فشرده، بردار سیگنال اصلی \mathbf{x} توسط ماتریس حس‌گر \mathbf{A} با ابعاد $m \times n$ ($m < n$) طبق معادله خطی (۱.۲) فشرده می‌شود.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.2)$$

که در آن بردار اندازه‌گیری تصادفی است. اگر \mathbf{x} یک سیگنال تُنک باشد، برای بازیابی آن فقط به سیگنال فشرده \mathbf{y} و ماتریس حس‌گری \mathbf{A} نیاز داریم. در حس‌گری فشرده برای بازیابی دقیق سیگنال‌ها از روی داده‌های فشرده‌شده، داشتن یک سری اطلاعات اولیه در مورد سیگنال اصلی، از جمله حوزه تُنکی آن حیاتی است. به‌منظور نمایش تُنک سیگنال‌های قلبی می‌توان از دیکشنری تبدیل موجک گسسته یا

تبدیل کسینوسی گسسته بهره‌مند شد. برای بازیابی سیگنال‌های پزشکی از روی اندازه‌گیری‌های فشرده برای حل معادله (۱.۲) از روش‌های حل نمایش تُنک استفاده می‌شود [۵].

۳ روش‌های حل نمایش تُنک

به روش‌های که برای یافتن x با مشاهده y و A به کار می‌روند، روش‌های بازیابی تُنک گفته می‌شود که در دسته‌های گوناگونی از قبیل روش‌های حریصانه، آستانه‌گذاری، محدب و نامحدب دسته‌بندی می‌شوند. ماتریس A در بردارنده تمام پایه‌هایی است که برای نمایش داده‌ها استفاده می‌شود. این ماتریس دیکشنری نامیده می‌شود و تمام فضای برداری مربوط به داده‌ها را پوشش می‌دهد. هر کدام از ستون‌های ماتریس دیکشنری را یک اتم می‌نامند. در صورتی که تعداد اتم‌های دیکشنری برابر بعد فضای برداری باشد آن‌گاه آن دیکشنری را یک دیکشنری کامل و در این صورت هر کدام از داده‌ها، نمایشی یکتا با استفاده از اتم‌های دیکشنری خواهند داشت. اگر تعداد اتم‌های یک دیکشنری کامل را بیش‌تر کنیم، به آن دیکشنری فراکامل گفته می‌شود که نمایش سیگنال با آن دارای جواب یکتا نخواهد بود. برای درک بهتر این موضوع دستگاه معادله خطی (۱.۲) را در نظر بگیرید. به دلیل اینکه ماتریس دیکشنری فراکامل است دستگاه معادله خطی در پیدا کردن y نامعین است و دارای بی‌شمار جواب خواهد بود. از آنجایی که به دنبال تُنک‌ترین پاسخ برای این دستگاه هستیم، می‌توانیم مسئله را به فرم یک مسئله بهینه‌سازی به فرم (۱.۳) بیان کنیم.

$$P_0 : \min_x \|x\|, \quad s.t. \quad y = Ax \quad (1.3)$$

که در آن $\|x\|$ معرف تعداد درایه‌های غیرصفر بردار x است و به طور کلی مسئله بالا به معنی یافتن بردار x است که دارای کم‌ترین مؤلفه غیرصفر باشد و یا به عبارت دیگر تُنک‌ترین x ممکن به دست آید. در [۶] نشان داده شده است که پاسخ مسئله نُرم صفر را می‌توان با استفاده از نُرم یک نیز به دست آورد که به آن مسئله بهینه‌سازی P_1 گفته می‌شود. در بسیاری از مسائل کاربردی پاسخ مسائل P_0 و P_1 معادل هستند و مسئله P_1 می‌تواند تقریب قابل‌قبولی برای یافتن نمایش تُنک سیگنال باشد که به صورت (۲.۳) تعریف می‌گردد.

$$P_1 : \min_x \|x\|_1, \quad s.t. \quad y = Ax \quad (2.3)$$

در این بخش چهار روش پرکاربرد در حل نمایش تُنک به صورت مختصر بیان می‌شوند.

۱.۳ روش جست‌وجوی پایه

یکی از معروف‌ترین ابزارها برای یافتن پاسخ تُنک، الگوریتم جست‌وجوی پایه (BP) است که در آن به جای نرم صفر، از حداقل کردن نرم یک، مطابق معادله (۲.۳) استفاده می‌شود [۷]. مسئله بهینه‌سازی (۲.۳) به راحتی قابل تبدیل به یک مسئله خطی است. به همین دلیل با روش‌های مختلفی که برای مسائل خطی پیشنهاد شده، قابل حل است. ثابت شده است که اگر تعداد عناصر مخالف صفر در پاسخ تُنک از حدی که به همبستگی میان اتم‌ها (ستون‌های) دیکشنری A وابسته است کم‌تر باشد، پاسخ رابطه (۲.۳) به‌طور دقیق برابر با پاسخ تُنک با حداقل‌سازی نرم صفر است.

۲.۳ روش جست‌وجوی تطابقی

یکی از مهم‌ترین ایرادهای روش جست‌وجوی پایه، زمان مورد نیاز آن است که به‌طور معمول با زیاد شدن ابعاد مسئله، مشکل‌ساز می‌شود. یکی از سریع‌ترین روش‌ها برای تخمین پاسخ تُنک، الگوریتم جست‌وجوی تطابق (MP) نام دارد [۸]. این روش ابتدا توسط ژانگ[†] و ملت[‡] مطرح شد. ذات این روش حریصانه است و تلاش می‌کند تا در هر گام تنها ضریب یکی از اتم‌ها را مشخص کند. منظور از اتم‌ها ستون‌های ماتریس دیکشنری است. به عبارت دیگر، در گام اول اتمی که بیش‌ترین مشابهت با سیگنال آزمون را دارد، انتخاب و ضریب آن محاسبه می‌شود. در گام بعد، باقی‌مانده سیگنال آزمون و اتم اول با بقیه اتم‌ها مقایسه و مشابه‌ترین اتم انتخاب می‌شود. به همین ترتیب در هر گام، ضریب یکی از اتم‌ها تعیین می‌شود تا جایی که خطای بازنمایی سیگنال آزمون از حدی کم‌تر شود یا آن که تعداد مشخصی از اتم‌ها دارای ضریب مخالف صفر شوند. این روش به سبب آن که در هر گام به یک جست‌وجوی ساده نیاز دارد، به‌طور معمول بسیار سریع است اما به دلیل حریص بودن، تضمینی وجود ندارد که پاسخ نهایی مشابه با پاسخ تُنک باشد و به جواب بهینه هم‌گرا شود.

[†]Zhang

[‡]Malat

۳.۳ روش جستجوی تطابقی متعامد

به منظور بهبود روش جستجوی تطابقی با حفظ سرعت بالای آن، روش‌های متنوعی پیشنهاد شده که معروف‌ترین آن روش جستجوی تطابقی متعامد (OMP) نام دارد [۹]. در روش جستجوی تطابقی متعامد در هر مرحله ضرایب ستون‌های فعال از ماتریس دیکشنری به صورت مستقل از نتایج مراحل قبل انتخاب می‌شوند و از نتایج قبلی تنها در یافتن مکان مولفه‌های غیرصفر استفاده می‌شود. یعنی در هر مرحله بعد از مشخص شدن اتم جدید، از تمام ضرایب قبلی صرف‌نظر شده و ترکیبی خطی از تمام اتم‌های انتخاب شده تا این مرحله، محاسبه می‌شود که کم‌ترین خطا را برای بازسازی سیگنال آزمون داشته باشد. در واقع در این روش بر خلاف روش جستجوی تطابقی برای به‌روز کردن نمایش تُنک، سیگنال روی زیرفضای تولید شده توسط اتم‌های انتخاب شده تا آن مرحله، تصویر می‌شود.

۴.۳ روش نرم صفر هموار شده

یکی دیگر از روش‌های مناسب برای یافتن پاسخ تُنک، نرم صفر هموار شده (SLO) نام دارد که توسط بابایی‌زاده معرفی شده است [۱۰]. در این روش تلاش بر آن است تا از حداقل کردن خود نرم صفر استفاده شود. ایرادی که برای حداقل کردن نرم صفر وجود دارد آن است که تابع نرم صفر، پیوسته نیست. به همین دلیل، پیشنهاد شده است تا به جای نرم صفر از تابع همواری استفاده شود که تقریبی از نرم صفر را نتیجه می‌دهد. نرم صفر بردار $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ تعداد مؤلفه‌های غیرصفر این بردار است. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم:

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x \neq 0; \\ 0 & x = 0; \end{cases} \quad (۳.۳)$$

آن‌گاه نرم صفر s برابر است با $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{i=1}^n V(x_i)$ ، از این رو ناپیوستگی نرم صفر معلول ناپیوستگی تابع $V(\mathbf{x})$ است. اگر این تابع با تابعی هموار جای‌گزین شود، آن‌گاه تخمین هموار نرم صفر به دست می‌آید. از توابع گوناگونی برای این منظور می‌توان استفاده نمود که مناسب‌ترین انتخاب، قرینه تابع گوسی با میانگین صفر به فرم رابطه (۴.۳) است:

$$f_\sigma(x_i) = \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right), \quad (۴.۳)$$

به وضوح مشخص است که اگر σ خیلی کوچک باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i = 0; \\ 0 & x_i \neq 0; \end{cases} \quad (۵.۳)$$

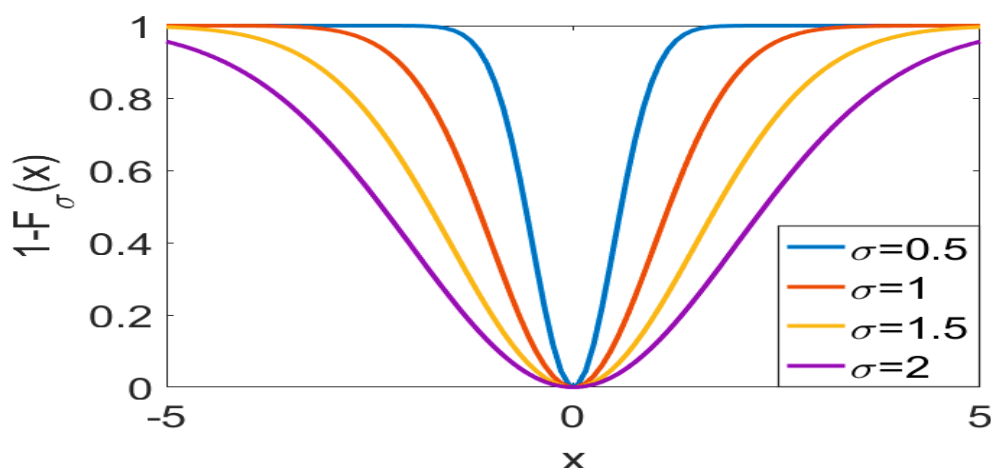
و در نتیجه نرم صفر هموار شده بردار \mathbf{x} به صورت (۶.۳) تعریف می‌گردد:

$$F_\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_\sigma(x_i) \quad (۶.۳)$$

حال اگر σ در رابطه (۶.۳) به سمت صفر میل دهیم، داریم:

$$\|\mathbf{x}\|_0 = n - \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\mathbf{x}) \quad (۷.۳)$$

از این رو براساس (۷.۳) حداکثر کردن تابع $F_\sigma(\mathbf{x})$ برای σ کوچک، معادل با حداقل کردن نرم صفر خواهد بود که در آن پارامتر هموارسازی است. تابع به‌ازای مقادیر کوچک σ تخمین مناسب‌تری ارائه می‌کند ولی به شدت ناهموار و دارای تعداد زیادی بیشینه محلی خواهد بود. از طرفی به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر σ تابع هموارتر و دارای تعداد کمتری بیشینه محلی خواهد بود، به این سبب برای جلوگیری از به تله افتادن روش در بیشینه محلی، دنباله کاهشی از مقادیر σ را انتخاب و در هر مرحله بیشینه تابع $F_\sigma(\mathbf{x})$ را می‌یابند. شکل ۴ تابع هموار $1 - F_\sigma(\mathbf{x})$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴: نمودار تابع هموار $1 - F_\sigma(x)$ برای مقادیر مختلف σ .

۴ روش پیش‌نهادی برای جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر

روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی (SQP) یک روش شناخته شده و کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی، غیرمحدب و هموار است. این روش اولین بار توسط ویلسون [۱۱] در سال ۱۹۶۳ پیشنهاد و در ادامه توسط هان [۱۲] و پاول [۱۳] رایج شد. رویکرد این روش به این صورت است که در هر تکرار، برای محاسبه جهت جدید d مسئله بهینه‌سازی درجه دوم حل می‌گردد و در آن از تقریب درجه دوم تابع هدف و تقریب خطی درجه اول قیود مسئله اصلی استفاده می‌شود. سرعت هم‌گرایی زبرخطی و نتایج هم‌گرایی قوی آن، پژوهشگران زیادی را به تحقیقات گسترده در این زمینه سوق داده است. مسئله بهینه‌سازی مقید (۱.۴) را در نظر بگیرید:

$$P \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & -F_\sigma(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^n f_\sigma(x_i) \\ s.t. & c(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.4)$$

برای محاسبه جهت جدید d زیرمسئله ناحیه اعتماد درجه دوم (۲.۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$QP(\mathbf{x}, \delta) \begin{cases} \min_{\mathbf{d}} & q(\mathbf{d}) := \mathbf{g}^t \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} \\ s.t. & \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ & \|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta; \end{cases} \quad (2.4)$$

که در آن شعاع ناحیه اعتماد، $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n]^t$ گرادیان و \mathbf{H} هسین تابع هدف می‌باشند. به صورت دقیق‌تر داریم:

$$\mathbf{g}_i = \frac{2x_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right), \quad \text{و} \quad \mathbf{H} = \text{Diag}\left(\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right), \quad (3.4)$$

که در آن $\text{Diag}(\omega_i)$ ماتریس قطری با عناصر ω_i است. نمادهای Δq به‌عنوان کاهش پیش‌بینی شده و Δf به‌عنوان کاهش واقعی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\Delta q := q(\mathbf{0}) - q(\mathbf{d}) = -\mathbf{g}^t \mathbf{d} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d}, \quad (4.4)$$

$$\Delta f := f_\sigma(\mathbf{x}) - f_\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{d}), \quad (5.4)$$

شرط (۶.۴) کاهش کافی در تابع هدف نامیده می‌شود که در آن $\alpha \in (0, 1)$.

$$\Delta f \geq \alpha \Delta q \quad (6.4)$$

در این مقاله روشی جدید و کارا جهت جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر و به منظور بهینه‌سازی نمایش تَنگ سیگنال‌ها ارائه می‌گردد. در روش پیش‌نهادی برای حل مسئله بهینه‌سازی، به جای نرم صفر از نرم صفر هموار شده استفاده می‌کنیم و به جای حل مسئله ناهموار (۱.۳) تقریب همواری از آن به فرم (۱.۴) را در نظر می‌گیریم که به جای آن، زیرمسئله (۲.۴) حل می‌گردد.

ابتکار روش پیش‌نهادی در این است که مسئله (۲.۴) به یک مسئله بهینه‌سازی با قیود برابری تبدیل و از این رو قید نابرابری $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta$ حذف و به تابع هدف منتقل می‌گردد و در نتیجه رویکرد جدیدی برای حل زیرمسائل در زمان کمتر براساس تخمین جواب دقیق‌تر و با سرعت هم‌گرایی بالاتری فراهم می‌آید و در نهایت زیرمسئله (۲.۴) به صورت فرم (۷.۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$QP(\mathbf{x}, \delta) \begin{cases} \min_{\mathbf{d}} & \mathbf{g}^t \mathbf{d} + \frac{1}{\nu} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} + \frac{\lambda}{\nu} \mathbf{d}^t \mathbf{d} \\ s.t. & \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7.4)$$

لم ۱.۴. اگر فرض کنیم $\mathcal{H} = \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}$ باشد که در آن \mathbf{H} هسین تابع هدف و λ پارامتر جریمه و اسکالر مثبت دلخواهی است، می‌توان ثابت کرد رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} = \mathbf{I}. \quad (8.4)$$

اثبات. از آن جایی که هسین تابع هدف \mathbf{H} ، به صورت ماتریس قطری است از این رو برای $\mathcal{H} = \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}$ داریم:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 + \lambda & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \mathbf{H}_n + \lambda \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

وارون ماتریس \mathcal{H} ارائه شده در رابطه (۹.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{H}_1 + \lambda} & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \frac{1}{\mathbf{H}_n + \lambda} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

بر اساس رابطه (۱۰.۴) مقدار $\|\mathcal{H}^{-1}\|_2$ بزرگ‌ترین عنصر روی قطر اصلی خواهد بود که آن را برابر $\frac{1}{\mathbf{H}_i + \lambda}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا تمامی عناصر قطر اصلی ماتریس \mathcal{H}^{-1} را به $\frac{1}{\mathbf{H}_i + \lambda}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{H}_1 + \lambda} & \dots & \circ \\ \frac{1}{\mathbf{H}_i + \lambda} & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \frac{1}{\mathbf{H}_n + \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{H}_1 + \lambda}{\mathbf{H}_1 + \lambda} & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \frac{\mathbf{H}_n + \lambda}{\mathbf{H}_n + \lambda} \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

پس از آن تمامی عناصر ماتریس ارائه شده در رابطه (۱۱.۴) را بر λ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\mathbf{H}_1}{\lambda} & \dots & \circ \\ 1 + \frac{\mathbf{H}_i}{\lambda} & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & 1 + \frac{\mathbf{H}_n}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

سپس با میل دادن $\lambda \rightarrow \infty$ رابطه (۱۲.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (13.4)$$

با به کارگیری روابط (۱۱.۴)، (۱۲.۴) و (۱۳.۴) خواهیم داشت:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} = \mathbf{I}.$$

□

لم ۲.۴. مسئله (۷.۴) را در نظر بگیرید که در آن پارامتر جریمه و اسکالر مثبت دلخواهی است، آن گاه جواب مسئله برابر است با $\mathbf{d}^* = -\mathcal{H}^{-1}(\mathbf{A}^t \Lambda^* + \mathbf{g})$ که در آن $\Lambda^* = (-\mathbf{A}\mathcal{H}^{-1}\mathbf{A}^t)^{-1}(\mathbf{A}\mathcal{H}^{-1}\mathbf{g})$. علاوه بر آن $\mathcal{H} = \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}$ و $\delta_1 \leq \delta < \infty$ وجود دارد به طوری که \mathbf{d}^* جواب بهینه (۲.۴) است اگر رابطه زیر برقرار باشد که در آن M کران بالایی برای Λ^* است.

$$\lambda \geq \frac{\|\mathbf{A}\|_2 M + \|\mathbf{g}\|_2}{\delta_1} - \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma_i^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma_i^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) \right|$$

اثبات. ابتدا تابع لاگرانژین مسئله (۷.۴) را که به صورت $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathcal{H} \mathbf{d} + \mathbf{g}^t \mathbf{d} + \Lambda^t \mathbf{A} \mathbf{d}$ است در نظر می گیریم، حال بر اساس شرایط KKT داریم:

$$\mathcal{H} \mathbf{d} + \mathbf{g} + \mathbf{A}^t \Lambda = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (14.4)$$

با استفاده از (۱۴.۴) داریم:

$$\mathbf{d}^* = -\mathcal{H}^{-1}(\mathbf{A}^t \Lambda^* + \mathbf{g}) \quad \text{و} \quad \Lambda^* = (-\mathbf{A}\mathcal{H}^{-1}\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A}\mathcal{H}^{-1} \mathbf{g}. \quad (15.4)$$

در ادامه نشان می دهیم که برای هر $\lambda \geq 0$ ، $\|\Lambda^*\|_2$ کراندار است. در ابتدا از رابطه (۱۵.۴) داریم:

$$(-\mathbf{A}\mathcal{H}^{-1}\mathbf{A}^t) \Lambda^* = \mathbf{A}\mathcal{H}^{-1} \mathbf{g}. \quad (16.4)$$

با تقسیم رابطه (۱۶.۴) بر $\|\mathcal{H}^{-1}\|_2$ داریم:

$$\frac{-\mathbf{A}\mathcal{H}^{-1}\mathbf{A}^t \Lambda^*}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} = \mathbf{A} \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} \mathbf{g}. \quad (17.4)$$

از طرفی طبق رابطه (۸.۴) ارائه شده در لم ۱.۴ می دانیم:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|_2} = \mathbf{I}. \quad (18.4)$$

با حد گرفتن از دو طرف رابطه (۱۷.۴) و به کارگیری (۱۸.۴) داریم:

$$-\mathbf{A} \mathbf{A}^t \Lambda^* = \mathbf{A} \mathbf{g}, \quad (19.4)$$

و از (۱۹.۴) نتیجه می گیریم:

$$\Lambda^* = (-\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g}.$$

به عنوان یک نتیجه از هم گرایی، $M > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\lambda \geq 0$ ، $\|\Lambda^*\|_2 \leq M$. از این رو در جهت یافتن کران بالای M سه فرمول زیر ارائه می گردد:

$$\|\mathbf{d}^*\|_2 \leq \frac{\|\mathbf{A}^t \Lambda^* + \mathbf{g}\|_2}{\|\mathcal{H}\|_2} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_2 M + \|\mathbf{g}\|_2}{\|\mathcal{H}\|_2},$$

جایی که:

$$\|\mathcal{H}\|_2 = \lambda + \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma_i^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma_i^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) \right|.$$

به‌وضوح مشخص است اگر

$$\frac{\|\mathbf{A}\|_2 M + \|\mathbf{g}\|_2}{\delta} - \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \right| \leq \lambda.$$

آن‌گاه $\delta \leq \|\mathbf{d}^*\|_2$ خواهد بود، از طرف دیگر با فرض $\delta_1 = \|\mathbf{d}^*\|_2$ تابع لاگرانژی (۷.۴) به فرم (۲۰.۴) تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\nu} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{g}^t \mathbf{d} + \Lambda^t \mathbf{A} \mathbf{d} + \mu (\mathbf{d}^t \mathbf{d} - \delta_1^2), \quad (20.4)$$

و از این‌رو شرایط KKT آن به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{g} + \mathbf{A}^t \Lambda + \mu \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta_1, \quad \mu (\mathbf{d}^t \mathbf{d} - \delta_1^2) = 0.$$

□ به‌وضوح مشخص است این شرایط برای $\Lambda = \Lambda^*$ و $\mathbf{d} = \mathbf{d}^*$ و $\mu = 0$ برآورده می‌شوند.

الگوریتم ۱ جواب زیرمسئله درجه دوم

ورودی: ماتریس \mathbf{A} ، بردار گرادیان \mathbf{g} ، ماتریس قطری هسین \mathbf{H} ، پارامتر γ و شعاع ناحیه اعتماد δ
مقدار دهی اولیه: مقدار اولیه پارامتر γ که برابر $\gamma = \gamma_0$ است

تکرار مراحل ۱ تا ۳ تا برقراری شرط $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta$

۱: $\Lambda = (-\mathbf{A} \mathcal{H}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} (\mathbf{A} \mathcal{H}^{-1} \mathbf{g})$

۲: $\mathbf{d} = -\mathcal{H}^{-1} (\mathbf{A}^t \Lambda + \mathbf{g})$

۳: $\gamma \leftarrow \gamma \times 1/2$

خروجی: طول گام \mathbf{d}

روش ۲ جزئیات روش پیش‌نهادی را نشان می‌دهد. حلقه بیرونی با هر مقدار اولیه $\sigma \geq \sigma_0$ که در آن σ یک ثابت مثبت دلخواه است، مقدار دهی اولیه می‌شود. سپس، دنباله کاهشی از مقادیر σ تا زمانی که به آستانه σ_{min} برسند، ایجاد می‌شود (این پارامتر دقت تقریب‌های نرم صفر را کنترل می‌کند). شعاع ناحیه اعتماد δ تا زمانی که (۶.۴) برآورده شود، به‌طور متوالی کاهش می‌یابد. حلقه داخلی شرط نابرابری $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta$ را بررسی و تا زمانی که برآورده شود مقدار γ را افزایش می‌دهد. طول گام \mathbf{d} توسط روش ۱ در تمام تکرارها محاسبه می‌شود.

الگوریتم ۲ روش پیش‌نهادی

ورودی: بردار \mathbf{y} ، ماتریس \mathbf{A} ، شبه معکوس آن $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^{-1}$ و پارامترهای δ_{min} ، σ_{min} ، c ، α
مقدار دهی اولیه: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$ ، $\sigma = 3 \times \max \|\mathbf{x}\|$

۱: تا زمانی که $\sigma > \sigma_{min}$ ادامه بده

۲: محاسبه مقادیر \mathbf{g} ، \mathbf{H} و طول گام \mathbf{d}

۳: اگر $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ آن‌گاه

۴: خاتمه روش

۵: پایان شرط سطر ۳

۶: محاسبه مقادیر Δf و Δq

۷: اگر $\Delta f < \alpha \Delta q$ آن‌گاه

۸: $\delta \leftarrow \delta/2$

۹: وگرنه

۱۰: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{d}$

۱۱: پایان شرط سطر ۷

۱۲: $\sigma \leftarrow c \cdot \sigma$

۱۳: پایان شرط سطر ۱

خروجی: بردار بازیابی شده \mathbf{x}

در این بخش تحلیل هم‌گرایی روش پیش‌نهادی ارائه می‌شود. اثبات هم‌گرایی روش مبتنی بر نتایج به‌دست آمده توسط فلچر^S و همکاران [۱۴، ۱۵] است و در این خصوص مفروضات استاندارد زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. تمام نقاطی که توسط روش تولید می‌شوند در ناحیه بسته و کراندار غیر تهی \mathbf{X} قرار دارند.
۲. توابع $f_\sigma(\mathbf{x})$ و $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ در مجموعه باز شامل \mathbf{X} دوبار مشتق پذیر پیوسته هستند.
۳. یک $M > 0$ وجود دارد به طوری که ماتریس هسین H در رابطه $\|\mathbf{H}_k\|_2 \leq M$ صدق می‌کند.

یک نتیجه از فرضیات استاندارد این است که ماتریس‌های هسین $f_\sigma(\mathbf{x})$ و $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ روی \mathbf{X} کراندار هستند و طبق فرض ۲، روابط $\|\nabla^2 \mathbf{c}(\mathbf{x})\|_2 \leq M$ و $\|\nabla^2 f_\sigma(\mathbf{x})\|_2 \leq M$ برای هر $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ برقرار است.

هم‌گرایی سراسری روش پیش‌نهادی، با توجه به شرط KKT، تحت شرایط قیدی MFCQ[†] ثابت می‌شود. نقطه موجه \mathbf{x}_0 در شرایط قیدی MFCQ صدق می‌کند اگر و تنها اگر:

- بردارهای $\nabla \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0)$ برای هر $i \in \mathcal{E}$ مستقل خطی است. که مجموعه \mathcal{E} و \mathcal{I} به ترتیب شامل مجموعه اندیس برای قیود تساوی و نامساوی هستند.

- بردار \mathbf{s} وجود دارد به طوری که $\nabla \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{s} = 0$ ، $i \in \mathcal{E}$ و $\nabla \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{s} < 0$ ، $i \in \mathcal{A}_0$ که در آن $\mathcal{A}_0 = \{i \in \mathcal{I} \mid \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ شامل قیدهای نامساوی که در \mathbf{x}_0 فعال هستند.

شرط لازم برای این که نقطه \mathbf{x}_0 مسئله را حل کند این است که اولاً شدنی باشد و ثانیاً علاوه بر برقراری قیدی MFCQ مجموعه \mathcal{A}_0 داشته باشد. $\nabla \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{s} < 0$ ، $i \in \mathcal{A}_0$ ، $\nabla \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{s} = 0$ ، $i \in \mathcal{E}$ ، $\mathbf{s}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) < 0$ ، تهی باشد.

قضیه ۳.۴. اگر مفروضات استاندارد برقرار باشد، آن‌گاه با فرض ثابت بودن σ یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:
 (الف) یک نقطه KKT برای مسئله (۱.۴) به‌دست می‌آید. یعنی $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ زیرمسئله $QP(\mathbf{x}_k, \delta)$ را حل می‌کند.
 (ب) یک نقطه تجمعی برای دنباله $\{\mathbf{x}_k\}$ به‌دست می‌آید که موجه است. این نقطه KKT است و یا در شرایط MFCQ صدق نمی‌کند.
 اثبات. حالت (الف) به‌وضوح برقرار است. از این‌رو فقط حالت (ب) را اثبات می‌کنیم. ابتدا تقریب سری تیلور تابع $f_\sigma(\mathbf{x})$ را به‌صورت

$$f_\sigma(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = f_\sigma(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k^t \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{d},$$

در نظر می‌گیریم که در آن نقطه‌ای روی پاره خط \mathbf{x}_k تا $\mathbf{x}_k + \mathbf{d}$ است. از (۴.۴) و (۵.۴) نتیجه می‌شود که

$$\Delta f_\sigma = f_\sigma(\mathbf{x}_k) - f_\sigma(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = -\mathbf{g}_k^t \mathbf{d} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{d} \quad (21.4)$$

مقدار $\frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d}$ را به‌عبارت (۲۱.۴) اضافه و کم می‌کنیم:

$$\Delta f_\sigma = -\mathbf{g}_k^t \mathbf{d} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} = \Delta q - \frac{1}{2} \mathbf{d}^t (\nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y}) - \mathbf{H}) \mathbf{d} \quad (22.4)$$

براساس $\|\mathbf{H}\|_2 \leq M$ ، $\|\nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y})\|_2 \leq M$ و $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \delta$ داریم:

$$\mathbf{d}^t (\nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y}) - \mathbf{H}) \mathbf{d} \leq \|\mathbf{d}\|_2^2 (\|\nabla^2 f_\sigma(\mathbf{y})\|_2 + \|\mathbf{H}\|_2) \leq 2M\delta^2. \quad (23.4)$$

در نتیجه با به‌کارگیری روابط (۲۲.۴) و (۲۳.۴) داریم:

$$\Delta f_\sigma \geq \Delta q - M\delta^2. \quad (24.4)$$

اکنون بر اساس برهان خلف فرض می‌کنیم که یک نقطه تجمع \mathbf{x}^∞ وجود دارد که شرایط MFCQ را برآورده اما در شرایط KKT صدق نمی‌کند. بر اساس لم ۵ از فلچر و همکاران [۱۴]، همسایگی \mathcal{N}^∞ از \mathbf{x}^∞ و ثابت‌های مثبت ϵ و κ وجود دارند، به‌گونه‌ای که برای همه $\mathbf{x} \in \mathcal{N}^\infty \cap X$ و $0 \leq \delta \leq \kappa$ زیرمسئله درجه دوم $QP(\mathbf{x}, \delta)$ جواب شدنی \mathbf{d} دارد:

$$\Delta q \geq \frac{1}{3} \delta \epsilon > 0. \quad (25.4)$$

^SFletcher

[†]Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification

حال با تقسیم عبارت (۲۴.۴) بر Δq و به کارگیری رابطه (۲۵.۴) داریم:

$$\frac{\Delta f_{\sigma}}{\Delta q} \geq 1 - \frac{3\delta M}{\epsilon}.$$

و به طور معادل داریم:

$$\Delta f_{\sigma} \geq \alpha \Delta q > 0 \quad \text{و} \quad \alpha = 1 - \frac{3\delta M}{\epsilon}.$$

از این رو اگر $(1 - \alpha)\epsilon / 3M < \delta$ باشد، آن‌گاه $\Delta f_{\sigma} \geq \alpha \Delta q > 0$ و در نتیجه دنباله مقادیر تابع $f_{\sigma}(x_k)$ به طور یکنواخت کاهشی است. بنابراین $f_{\sigma}(x_k)$ روی مجموعه \mathbf{X} کراندار و در نتیجه دنباله $\sum_{k \geq 1} \Delta f_{\sigma}(x_k)$ هم‌گرا خواهد بود و به وضوح با این حقیقت $\frac{1}{\epsilon} \alpha \delta \epsilon$ در تناقض است، بنابراین \mathbf{x}^{∞} یک نقطه KKT بوده و از این رو حالت (ب) برقرار است. □

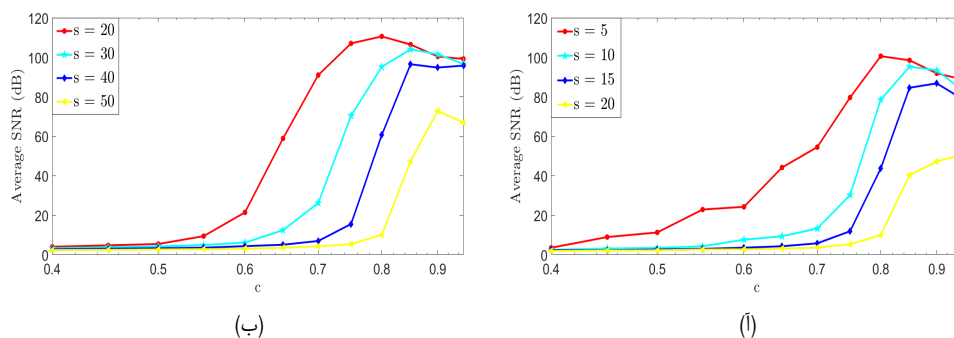
۵ نتایج عددی روش پیش‌نهادی

در این بخش عمل کرد عددی روش پیش‌نهادی و کارایی آن در جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر نشان داده می‌شود. در آزمایش‌های انجام شده، از بردارهای \mathbf{t}_{nk} و ماتریس حس گر \mathbf{A} که به طور تصادفی ایجاد شده‌اند استفاده می‌شود و موقعیت مولفه‌های غیرصفر از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به صورت تصادفی نمونه‌برداری می‌شوند که در آن $\|\bar{\mathbf{x}}\|_2 = s$ است و در نهایت $\mathbf{y} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$ در نظر گرفته می‌شود. از طرفی $\hat{\mathbf{x}}$ برابر تقریب جواب بازیابی شده توسط روش است. برای مشاهده عمل کرد روش‌ها و روش پیش‌نهادی و مقایسه آنها از شاخص عمل کرد نرخ سیگنال به نویز (SNR) و خطای میانگین مربعات نرمال شده (NMSE) استفاده شده است.

$$\text{SNR}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) = 10 \log_{10} \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|_2}{\|\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|_2} \quad \text{و} \quad \text{NMSE}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\|\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\bar{\mathbf{x}}\|_2}.$$

۱.۵ آزمایش اول: تأثیر پارامتر c

اگر مقدار پارامتر c کم در نظر گرفته شود، احتمال گیرافتادن در جواب‌های موضعی زیاد می‌شود. از طرف دیگر، انتخاب نسبتاً بزرگ برای c ، باعث هموارسازی بیش‌تر در تابع SLO می‌شود و احتمال رسیدن به جواب سراسری را بیش‌تر می‌کند. شکل ۵ میانگین شاخص SNR به‌عنوان تابعی از c برای ماتریس حس گر در ابعاد 150×50 و 200×100 را نشان می‌دهد. آزمایش 500 بار تکرار و برای s های گوناگون مقدار SNR محاسبه شده است. وقتی s کوچک است، همان‌طور که انتظار می‌رود شاخص همیشه بزرگ است و از سوی دیگر، برای s های به اندازه کافی بزرگ، تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. با بررسی نتایج، $c = 0.9$ یک مقدار اولیه کارآمد در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵: میانگین SNR روش پیش‌نهادی برای ماتریس در ابعاد (ا) $\mathbf{A}_{150 \times 50}$ و (ب) $\mathbf{A}_{200 \times 100}$

۲.۵ آزمایش دوم: تأثیر عمل کرد روش پیش‌نهادی در مقایسه با سایر روش‌های موجود

در این آزمایش، ابتدا به صورت مختصر متداول‌ترین روش‌های بازیابی سیگنال‌های \mathbf{t}_{nk} که با روش پیش‌نهادی مقایسه شده‌اند معرفی و در ادامه عمل کرد عددی و کارایی آنها با یکدیگر مقایسه می‌شود.

• **Our Work:** در روش پیش‌نهادی با استفاده از روش ۲ و مجموعه پارامترهای زیر مسئله حل می‌شود:

$$\delta_{min} = 10^{-2}, \quad \sigma_{min} = 10^{-3}, \quad c = 0.9, \quad \alpha = 0.1.$$

• **ILT:** مسئله بهینه‌سازی $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \log(|x_i| + \delta)$ را با آستانه توقف 10^{-2} حل می‌کند که در آن δ ثابت مثبت کوچک و λ پارامتر منظم‌سازی است [۱۶].

• **LP:** این روش مسئله بهینه‌سازی $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_p \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ که در آن $0 < p \leq 1$ است را حل می‌کند. در این روش مقدار $p = 0.5$ به‌عنوان پارامتر کارآمدی معرفی شده است [۱۷].

• **SLO:** این روش از مجموعه پارامترهای زیر استفاده می‌کند [۱۸]:

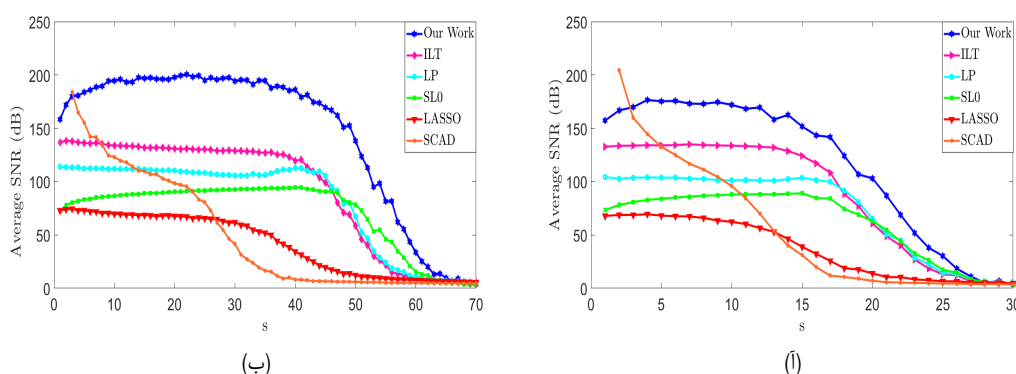
$$\sigma_{min} = 10^{-4}, \quad \mu = 2, \quad L = 8, \quad c = 0.9.$$

• **LASSO:** این روش مسئله بهینه‌سازی $\min_{\mathbf{x}} \lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2$ را حل می‌کند که در آن λ پارامتر منظم‌سازی و Φ تابع چگالی تجمعی می‌باشند [۱۹]. پارامترهای اولیه روش به‌صورت زیر است:

$$\lambda = 2c\sigma\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right), \quad c = 1.05, \quad \alpha = 0.5.$$

• **SCAD:** این روش از یک تابع جریمه غیرمحدب به‌جای نرم یک برای تضمین تُنک‌سازی استفاده می‌کند [۲۰]. پارامترهای اولیه مورد استفاده روش $\alpha = 3N, \tau = 10^{-3}$ است.

پارامتر مهمی که در خصوص ارائه کارایی روش پیش‌نهادی وجود دارد، بررسی وضعیت ابعاد ماتریس حس‌گر \mathbf{A} است. در این آزمایش نسبت تعداد ستون‌ها به تعداد سطرهای $(\frac{n}{m})$ ماتریس حس‌گر $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ در دو حالت مختلف با ابعاد $(\frac{n}{m} = 3)$ و 50×150 و $(\frac{n}{m} = 2)$ و 100×200 در نظر گرفته شد و شاخص عمل‌کرد SNR محاسبه و پس از 500 بار تکرار، میانگین آن گزارش شد. شکل ۶ نمودار میانگین شاخص SNR بر حسب s در ابعاد 50×150 و 100×200 را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار شاخص SNR روش پیش‌نهادی از سایر روش‌ها بیشتر است و کارایی و عمل‌کرد بهتر روش را نشان می‌دهد.



شکل ۶: مقایسه روش پیش‌نهادی با سایر روش‌ها برای ماتریس در ابعاد (ا) $A_{50 \times 150}$ و (ب) $A_{100 \times 200}$

۳.۵ آزمایش سوم: تاثیر زمان اجرای روش پیش‌نهادی در مقایسه با سایر روش‌های موجود

در این آزمایش، به‌منظور مقایسه دقیق‌تر و منصفانه‌تر عمل‌کرد روش‌ها، علاوه بر مقدار شاخص NMSE که نشانگر میزان خطا است، زمان اجرای آنها برای یک ضابط یک دقیقه‌ای نیز محاسبه شده که این زمان، نشانگر پیچیدگی محاسباتی هر روش است. در آزمایش به‌منظور نمایش تُنک سیگنال‌ها از روش‌های ارائه شده در آزمایش دوم استفاده شده است. مقایسه نتایج به دست آمده در جدول ۱ از نظر خطا و زمان

اجرا نشان می‌دهد که روش پیش‌نهادی، بهترین عمل‌کرد را با مقدار خطای میانگین مربعات نرمال شده $۱۶۲/۳۲$ و زمان اجرای $۳/۳۲$ ثانیه برای یک ضبط دارا است.

جدول ۱: مقایسه زمان و خطای روش پیش‌نهادی با سایر روش‌های موجود

روش مورد استفاده	زمان اجرا برای یک ضبط (ثانیه)	مقدار خطای میانگین مربعات نرمال شده
Our Work	۱۱.۳۲	۱۶۲.۳۲
ILT	۹.۱۸	۱۸۶.۴۹
LP	۱۶.۴۸	۱۹۳.۱۸
SLO	۷.۳۱	۲۰۳.۲۷
LASSO	۱۶.۵۴	۲۱۳.۶۳
SCAD	۱۹.۲۳	۲۱۸.۵۶

۶ نتیجه‌گیری

روش پیش‌نهادی ارائه شده در جهت جداسازی سیگنال‌های قلب جنین از مادر، بر مبنای برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی است که هم‌گرایی زبر خطی دارند و از طرفی نتایج هم‌گرایی سراسری نظری روش در قالب قضیه ۳.۴ به خوبی نشان داده شده است و راه حل دقیقی برای حل زیرمسئله با هزینه کم را به ارمغان آورده است. با بررسی آزمایش‌های انجام‌شده مشاهده می‌شود که روش پیش‌نهادی ارائه شده در مقایسه با روش‌های معرفی‌شده از عمل‌کرد مطلوبی برخوردار است و نرخ موفقیت بالاتری دارد. به‌عنوان پژوهش‌های آینده می‌توان از روش پیش‌نهادی در بهبود بازسازی تصاویر شبکه چشم یا MRI مغزی بهره‌مند شد. همچنین می‌توان به‌جای بهره‌مندی از برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، روش فیلتر را مورد بررسی قرار داد.

فهرست منابع

- [1] L. U. O. Zhongliang, Fetal electrocardiogram extraction using blind source separation and empirical mode decomposition, *Journal of Computational Information Systems*, **8** (2012) 4825–4833.
- [2] B. A. Olshausen and D. J. Field, Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1?, *Vision research*, **37** (1997) 3311–3325.
- [3] R. G. Baraniuk, Compressive sensing [lecture notes], *IEEE signal processing magazine*, **24** (2007) 118–121.
- [4] R. Liu, W. Cai, G. Li, X. Ning and Y. Jiang, Hybrid dilated convolution guided feature filtering and enhancement strategy for hyperspectral image classification, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **19** (2021) 1–5.
- [5] M. S. Alamdari, M. Fatemi and A. Ghaffari, A Modified Sequential Quadratic Programming Method for Sparse Signal Recovery Problems, *Signal Processing*, (2023) 108955.
- [6] A. M. Bruckstein, D. L. Donoho, and M. Elad, From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images, *SIAM Rev.* **51** (2009) 34–81.
- [7] R. Liu, M. Shu, and C. Chen, ECG Signal Denoising and Reconstruction Based on Basis Pursuit, *Applied Sciences*, **4** (2021) 1591.

- [8] W. Jinming and L. Haifeng, Binary sparse signal recovery with binary matching pursuit, *Inverse Problems*, **37** (2021) 14–65.
- [9] C. Xueping Chen, L. Jianzhong and C. Jiandong, A new result on recovery sparse signals using orthogonal matching pursuit, *Statistical Theory and Related Fields*, (2022) 1–7.
- [10] H. Mohimani, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ_0 norm, *IEEE Trans. Signal processing*, **57** (2009) 289–301.
- [11] R.B. Wilson, A simplicial algorithm for concave programming (Ph.D.thesis), Harvard University Graduate School of Business Administration, (1963).
- [12] S.P. Han, A globally convergent method for nonlinear programming, *J.Optim. Theory Apply*, **22** (1977) 297–309.
- [13] M.J.D. Powell, A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations, in: G.A. Watson (Ed.), *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, (1978) 144–157.
- [14] R. Fletcher, S. Leyffer, and P. L. Toint, On the Global Convergence of a Filter-SQP Algorithm, Technical Report 15, Department of Mathematics, University of Namur, Namur, Belgium, (2000).
- [15] R. Fletcher, The Sequential Quadratic Programming, *Method Nonlinear optimization*, Lecture Note in mathematics, (2010) 165–214.
- [16] D. Malioutov and A. Aravkin, Iterative log thresholding, in *IEEE Int.Conf. Acoust. Speech Signal Processing*, (2014).
- [17] S. Foucart and M. Lai, Sparsest solutions of under-determined linear systems via ell_q -minimization for $0 < q \leq 1$, *Appl. Comput. Harmon. Anal*, **26** (2009) 395–407.
- [18] A. Eftekhari, M. Babaie-Zadeh, C. Jutten, and H. Abrishami Moghaddam, Robust-SL0 for stable sparse representation in noisy settings, in *IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing*, (2009) 3433–3436.
- [19] A. Belloni, V. Chernozhukov, and L. Wang, Square-root lasso: pivotal recovery of sparse signals via conic programming, *Biometrika*, **98** (2011) 791–806.
- [20] J. Fan and R. Li, Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties, *Journal of the American statistical Association*, **96** (2001) 1348–1360.



Presenting a new method to separate fetal heart signals from the mother by using sequential quadratic programming

Mohammad Saeid Alamdari¹, Masoud Fatemi

Department of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Received: 2023/5/4

Accepted: 2023/6/11

Abstract: One of the most common causes of death during the birth of babies is heart failure. Diagnosis of this disease requires observation of heart activity. Since the electrical signals recorded in the mother's abdomen contain a lot of information such as: mother's heart signal, mother's and fetus's muscle activity, fetus's brain activity and environmental noises, researchers are looking for ways to separate the fetus's heart signals from the mother's are. The proposed method has super-linear convergence, which provides global convergence results and an exact solution to solve the sub-problem. The performance of the proposed method is compared with the best existing methods and the results show that the proposed method has the lowest error rate and the highest speed in separating fetal heart signals from the mother compared to other methods.

Keywords: Fetal Heart Signal, Sparse Signal Representation, Compact Sensing, Smoothed ℓ_0 Norm.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author.

m.s.alamdari@email.kntu.ac.ir