



## طراحی کنترل‌کننده اجماع فازی مدل‌گزشی برای رده خاصی از سیستم‌های چندعاملی غیرخطی رهبر-پیرو

نگار ایزدی<sup>\*</sup>، محمد تقی دستجردی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۲۱

چکیده: در این مقاله، یک کنترل‌کننده مدل‌گزشی فازی را برای رده خاصی از سیستم‌های چندعاملی رهبر-پیرو که دینامیک تمام عوامل پیرو و عامل رهبر، غیر خطی و مرتبه دوم است، ارائه می‌کنیم. کنترل‌کننده فازی مدل‌گزشی ارائه شده بر پایه ابرصفحه جداکننده است که باعث می‌شود همه عوامل در سیستم‌های چندعاملی شرط اجماع را برآورده سازند. همچنین کنترل‌کننده فازی ارائه شده فاقد پدیده چترینگ است و سیستم نیز به مفهوم لیاپانوف به پایداری می‌رسد. یک مزیت عمده کنترل‌کننده ارائه شده در این مقاله این است که بردار حالت هر یک از عوامل، خیلی سریع به سطح لغزشی می‌رسند و روی سطح لغزشی باقی می‌مانند. مثال‌های ارائه شده در این مقاله و نتایج شبیه‌سازی، به دست آمده درستی این مطلب را تایید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: سیستم چندعاملی، اجماع، کنترل مدل‌گزشی، کنترل‌کننده فازی، پایداری.

رده‌بندی ریاضی: 93A16; 93C10; 93C42; 93D50

### ۱ مقدمه

یکی از روش‌های مطالعه مسائل پیچیده‌ای که گاهی متخصصان علوم مختلف با آن مواجه می‌شوند تبدیل این نوع مسائل به تعدادی مسئله فرعی کوچک‌تر و ساده‌تر است که این نوع طراحی، طراحی غیرمتمرکز یا توزیع شده نام دارد و در مقابل طراحی متمرکز از مزایای بسیاری چون پایین بودن هزینه برخورداری است. سیستم‌های چندعاملی (Multi Agent System) یا به اختصار MAS که با الهام گرفتن از زندگی گروهی حیوانات به وجود آمده‌اند، قابلیت طراحی غیرمتمرکز را دارند. ساختار سیستم‌های چندعاملی به این گونه است که هر عامل (زیرسیستم) ضمن انجام دادن وظایف مستقل خود، با دیگر عوامل مجاور ارتباط دارد و تبادل اطلاعات می‌کند تا کل سیستم به هدف عمومی و نهایی خود دست یابد.

<sup>\*</sup>نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: [tdast@znu.ac.ir](mailto:tdast@znu.ac.ir) (M. T. Dastjerdi), [negarizadi@znu.ac.ir](mailto:negarizadi@znu.ac.ir) (N. Izadi)

تحقیقات در مورد سیستم چندعاملی در اواسط ۱۹۸۰ آغاز گردید و مطالعه آن روند رشد قابل توجهی در سال‌های اخیر داشته است. امروزه در مطالعه سیستم‌های کنترل وسعت ابعاد، حجم داده‌ها و اطلاعات ردوبدل شده بین عناصر و اجزای مختلف سیستم به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است. برای مطالعه این قبیل مسائل، از MAS ها استفاده می‌کنند؛ به این ترتیب که هر سیستم را به‌صورت عامل‌هایی که با هم یک شبکه را تشکیل داده و اطلاعات ردوبدل می‌کنند، در نظر می‌گیرند. در این نوع سیستم‌ها، هر عامل به‌تنهایی توان پردازش محدودی دارد، اما در کل، مجموعه‌ی به‌هم پیوسته‌ی عوامل قادر به انجام عملیات پردازشی پیچیده‌تر در یک سامانه هم‌آهنگ خواهد بود. بنابراین کنترل سیستم‌های چندعاملی مزایای زیادی نظیر کاهش هزینه‌ها، بهبود بازدهی سیستم، افزایش انعطاف پذیری، قابلیت اطمینان و ارائه قابلیت‌های جدید دارند [۲۰]. در یک MAS، چندین زمینه تحقیقاتی وجود دارد که یکی از اساسی‌ترین زمینه‌های تحقیق، مسئله اجماع است. اجماع در واقع هم‌گرایی خروجی بردارهای حالت همه عوامل به یک مقدار مشترک است [۱۲]. توصیف نظری کنترل اجماع در [۱۰] ارائه شده است در حالی که در [۱۱] یک ساختار کلی از مسئله اجماع برای شبکه‌های انتگرالی بیان شده است. در [۷، ۱۸، ۲۰] اطلاعات پایه‌ای و فراوانی در زمینه کنترل اجماع را می‌توان یافت. در [۱۴]، یک شرط کافی برای دستیابی به اجماع برای سیستم‌های چندعاملی انتگرالی مرتبه اول با گراف ارتباطی همبند ارائه شده است. اجماع شبکه‌های انتگرالی مرتبه دوم و مرتبه‌های بالاتر در [۱، ۴، ۶، ۱۳، ۱۷، ۲۳] ارائه شده است. مسئله اجماع سیستم‌های چندعاملی با دینامیک خطی کلی در [۳، ۵] بیان شده است. در [۸، ۱۵]، مسئله اجماع سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیرخطی مطالعه شده است.

الگوریتم‌های اجماع را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، اجماع بدون رهبر و اجماع با رهبر. در مسائلی که تنها شامل یک رهبر است، کنترل ردیابی توزیع‌شده به کار می‌رود. درحالی که، در برخی از کاربردهای عملی، متخصصان با مسائلی برخورد می‌کنند، که بیش از یک رهبر دارند، در این صورت مسئله کنترل مهار (Containment control) ظاهر می‌شود. یکی از کاربردهای کنترل مهار در ربات‌ها یا وسایل نقلیه خودران این است که اطمینان حاصل شود که گروهی از ربات‌ها یا وسایل نقلیه خودران وارد مناطق خطرناک نمی‌شوند. در این حالت بخشی از عوامل به‌عنوان رهبر معرفی می‌شوند تا وسایل نقلیه یا ربات‌ها را به منطقه امنی که توسط رهبران پوشانده شده است حرکت دهند. در سال‌های اخیر، روش کنترل مدلغزشی (Sliding Mode Control) یا به‌اختصار SMC برای حل طیف وسیعی از MAS ها استفاده شده است. کنترل مدلغزشی دارای ویژگی مقاوم بودن و تغییرناپذیری در برابر عدم قطعیت پارامترها و اغتشاشات خارجی است. در [۲۲]، روش SMC برای یک مسئله رهبر پیرو در یک سیستم چندعاملی با دینامیک خطی و پروتکل اجماع مقاوم روی خطای ردیابی مطرح شده است.

در این مقاله، ما یک کنترل کننده مدلغزشی فازی (Fuzzy Sliding Mode Controller) یا به‌اختصار FSMC مبتنی بر صفحه جداکننده را برای حل مسئله اجماع سیستم‌های چندعاملی رهبر-پیرو با دینامیک مرتبه دوم ارائه می‌کنیم. کنترل کننده ارائه شده به‌مفهوم لیاپانوف پایدار مجانبی است. کنترل کننده مدلغزشی ارائه شده دارای سرعت هم‌گرایی بالاتر از سرعت هم‌گرایی سایر روش‌های کلاسیک است. این یعنی عوامل پیرو بسیار سریع‌تر از روش‌های کلاسیک به بردارحالت عامل رهبر می‌رسند. این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، برخی مقدمات لازم از جمله قضیه ابرصفحه جداکننده و MAS های رهبر-پیرو و همچنین قضیه پایداری لیاپانوف ارائه شده است. بخش ۳ به مسئله طراحی یک کنترل کننده مدلغزشی فازی بر اساس یک ابرصفحه جداکننده برای MAS رهبر-پیرو با دینامیک مرتبه دوم می‌پردازد. در بخش ۴، نتایج شبیه‌سازی برای نشان دادن اثربخشی کنترل کننده پیش‌نهادی، ارائه شده است. بخش آخر به نتیجه‌گیری این مقاله اختصاص دارد.

## ۲ پیش‌نیازها

در این بخش، مقدمات و تعاریف لازم از جمله الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات، قضیه ابرصفحه جداکننده و سیستم چندعاملی رهبر-پیرو و همچنین قضیه پایداری لیاپانوف را ارائه می‌کنیم. ابتدا به معرفی نمادهای استفاده شده در این مقاله می‌پردازیم. در سراسر این مقاله،  $x(t)$  تابعی از  $t$  است، مشتق  $x(t)$  نسبت به  $t$  با  $\dot{x}(t)$  و مشتق دوم  $x(t)$  با  $\ddot{x}(t)$  نشان داده می‌شود. ترانهاده ماتریس  $A$  یا بردار  $A^T$  نشان داده می‌شود. حاصل ضرب کرونر ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  و ماتریس  $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$  با نماد  $A \otimes B$  نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}.$$

کنج متعامد نامنفی  $\mathbb{R}_+^n$  را که با نماد  $\mathbb{R}_+^n$  نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف ساده باشد، که  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  مجموعه رئوس و  $E = \{(i, j) | i, j \in V\}$  مجموعه یال‌هایند در این صورت  $(i, j) \in E$  اگر و تنها اگر رئوس  $i$  و  $j$  با هم مجاور باشند. ماتریس قطری درجات رئوس گراف را با  $D(G)$  و ماتریس مجاورت  $G$  را با  $A(G)$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. اگر  $G = (V, E)$  یک گراف ساده و همبند باشد، آن‌گاه درخت پوشای گراف  $G$ ، زیر گراف همبند بدون دوری از  $G$  است که تمام رئوس  $G$  را شامل می‌شود.

به‌طور کلی یک گراف همبند می‌تواند بیش از یک درخت پوشا داشته باشد.

تعریف ۲.۲. اگر  $G = (V, E)$  یک گراف ساده، و  $D(G)$  ماتریس قطری درجات رئوس گراف و  $A(G)$  ماتریس مجاورت  $G$  باشد، آن‌گاه ماتریس  $L(G)$  را ماتریس لاپلاسیان گراف  $G$  می‌نامند و داریم:

$$L(G) = D(G) - A(G) \quad (۱.۲)$$

لم ۳.۲. اگر  $G = (V, E)$  یک گراف ساده باشد، آن‌گاه ماتریس  $L(G)$  یک ماتریس متقارن نیمه‌معیین مثبت و مجموع هر سطر آن صفر است.

لم ۴.۲. اگر  $G = (V, E)$  یک گراف ساده  $n$  راسی باشد و رتبه ماتریس  $L(G)$  برابر  $n - 1$ ، آن‌گاه گراف  $G$  حداقل یک درخت پوشا دارد.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  یک مجموعه نا تهی و  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد. مسئله مینیمم‌سازی برای تابع  $f$  روی مجموعه  $C$  عبارت است از یافتن نقطه  $x^* \in C$  به‌طوری‌که:

$$f(x^*) = \min \{f(X) : X \in C\}. \quad (۲.۲)$$

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات:

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (Particle Swarm Optimization) یا به اختصار PSO الگوریتمی برای حل یک مسئله بهینه‌سازی مانند (۲.۲) است که می‌تواند جواب‌های خوبی را به‌طور کارآمد پیدا کند. PSO توسط جیم کندی و راسل ابهارت معرفی شد [۹]. ایده اصلی الگوریتم PSO از مشاهده رفتار گروهی حیوانات در زیستگاه طبیعی آن‌ها، مانند دسته پرندگان یا گروه ماهی‌ها، الهام گرفته شده است. در این الگوریتم، همه ذرات (اعضاء) اطلاعاتی را به اشتراک می‌گذارند، هر ذره‌ای (عضوی) می‌داند که بهترین موقعیتی که تا به حال توسط خود ذره و دیگر ذرات در گروه دیده شده است، چیست. هر ذره دارای یک موقعیت مکانی و یک سرعت است که در هر گام با روابط زیر به‌روزرسانی می‌شود.

$$x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k+1) \quad (۳.۲)$$

$$v_i(k+1) = v_i(k) + C_1 \text{Rand}(0, 1) (pbest_i(k) - x_i(k)) + C_2 \text{Rand}(0, 1) (gbest_i(k) - x_i(k)) \quad (۴.۲)$$

که  $i$  اندیس ذره است، پارامتر  $k$  مرتبه تکرار را نشان می‌دهد، و  $x_i(k)$  و  $v_i(k)$  به ترتیب موقعیت و سرعت ذره هستند،  $C_1$  و  $C_2$  به ترتیب ثابت‌های شتاب برای بهترین مکان هر ذره و بهترین مکان همه ذرات هستند،  $pbest_i(k)$  مکانی است که بهترین مقدار تابع هدف را در بین همه مکان‌های بازدید شده ذره  $i$  دارد،  $gbest(k)$  مکانی با بهترین مقدار تابع هدف در بین تمام مکان‌های بازدید شده از همه ذرات است،  $\text{Rand}(0, 1)$  یک مقدار تصادفی بین ۰ و ۱ است. شبه‌کد ۲ الگوریتم اصلی PSO است.

ذکر این نکته حائز اهمیت است که الگوریتم PSO را می‌توان با روش‌های قطعی مانند روش نیوتن-رفسن ترکیب کرد، در این صورت شانس یافتن محتمل‌ترین نقطه بهینه سراسری تابع افزایش می‌یابد. در [۱۹] چنین روش ترکیبی برای مسائل بهینه‌سازی مورد مطالعه قرار گرفته است.

تعریف ۶.۲. یک زیرمجموعه  $C$  از فضای برداری  $V$  یک مخروط یا یک مخروط خطی نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $x \in C$  و همه اسکالرهایی مثبت  $\alpha$ ، داشته باشیم  $\alpha x \in C$ .

تعریف ۷.۲. مخروط  $C$  یک مخروط محدب است هرگاه برای هر اسکالرهایی مثبت  $\alpha, \beta$ ، و هر  $x, y \in C$  داشته باشیم  $\alpha x + \beta y \in C$ .

**Algorithm 1** Particle Swarm Optimization

---

```

procedure PSO( $f(x), S$ )
  for Each particle do
    Initialize  $x_i, v_i$  randomly
    Evaluate the fitness  $f(x_i)$ 
  end for
  repeat
    for each particle  $i$  in  $S$  do
      if  $f(x_i) < f(pbest_i)$  then
         $pbest_i = x_i$ 
      end if
      if  $f(pbest_i) < f(gbest)$  then
         $gbest = pbest_i$ 
      end if
    end for
    for each particle  $i$  in  $S$  do
       $v_i = v_i + C_1 Rnd(0, 1) (pbest_i - x_i) + C_2 Rnd(0, 1) (gbest - x_i)$ 
       $x_i = x_i + v_i$ 
    end for
     $k = k + 1$ 
  until  $k < Iterations$ 
end procedure

```

---

تعریف ۸.۲. هر مخروط چند وجهی را می‌توان به دو روش متفاوت زیر نشان داد:  
 ۱- به صورت تلاقی نامساوی‌ها. در این حالت مخروط چند وجهی را با استفاده از یک ماتریس ضرایب مانند  $A$  به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 0\}$$

۲- ترکیب خطی از بردارها. در این حالت مخروط چند وجهی را به صورت ترکیب‌های خطی تعداد متناهی بردار مانند  $v_1, \dots, v_k$  به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$C = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad i = 1, \dots, k\}.$$

اکنون، دو قضیه ابرصفحه جدا کننده را که در ادامه مورد نیاز خواهند بود، یادآوری می‌کنیم [۲].

قضیه ۹.۲. فرض کنیم  $C$  و  $D$  دو مجموعه محدب جدا از هم باشند، در این صورت همواره یک ابرصفحه  $a^T x - b = 0$  وجود دارد که آن‌ها را از هم جدا می‌کند. توجه داشته باشیم که در این جا جدایی اکید نیست.

قضیه ۱۰.۲. اگر  $C$  یک مجموعه محدب باشد و  $p$  نقطه‌ای باشد که به  $C$  تعلق ندارد، در آن صورت همواره یک ابرصفحه  $a^T x - b = 0$  وجود دارد که  $C$  را به طور اکید از  $p$  جدا می‌کند. یعنی  $\forall x \in C$  داریم:  $a^T x - b < 0$  و  $a^T p - b > 0$ .

سیستم‌های چندعاملی:

عامل‌ها، به عنوان یکی از اجزای اصلی سیستم‌های چندعاملی، عناصری مستقل، خودمختار و هدفمند با قابلیت برقراری ارتباط با سایر عوامل می‌باشند. اساساً، هر عامل در یک سیستم چندعاملی با یک راس گراف مشخص می‌شود که در آن گراف متناظر، ارتباط بین هر دو عامل با یک یال نشان داده می‌شود. جهت یال نشان‌دهنده جهت انتقال اطلاعات است و اگر انتقال اطلاعات بین دو عامل دوطرفه باشد با یال بدون جهت مشخص می‌شود. مشخصه اصلی کنترل توزیع‌شده در سیستم‌های چندعاملی این است که مقدار حالت و مقدار کنترل هر عامل با استفاده از اطلاعات عامل‌های مجاورش به روزرسانی می‌شود. بردار حالت راس  $v_i$  با  $x_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  نشان داده می‌شود، بنابراین  $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$  در  $\mathbb{R}^{Nn \times 1}$  بردار حالت سیستم چندعاملی خواهد بود. در یک مسئله اجماع، مقدار حالت همه عوامل باید به یک مقدار هم‌گرا شوند. در مسئله اجماع یک سیستم چندعاملی رهبر-پیرو مقدار حالت تمام گره‌های MAS با مقدار حالت گره رهبر برابر

می شوند. در برخی مسائل گراف ارتباطی بین عوامل نسبت به زمان ثابت نیست و در طول مسئله تغییر می کند. در این مقاله سیستم چندعاملی را رهبر-پیرو در نظر گرفته ایم که گراف ارتباطی بین عوامل آن ثابت و بدون جهت است. در ادامه این بخش قضیه لیاپانوف را یادآوری می کنیم که در [۱۶] اثبات شده است.

قضیه ۱۱.۲. گیریم  $V(x, t)$  یک تابع نامنفی با مشتق  $\dot{V}$  در طول مسیره های سیستم باشد.

۱. اگر  $V(x, t)$  به صورت موضعی معین مثبت باشد و  $\dot{V}$  به صورت موضعی در مسیر  $x$  و برای هر  $t$  معین منفی باشد، آن گاه مبدأ سیستم به صورت موضعی پایدار است.

۲. اگر  $V(x, t)$  به صورت موضعی مثبت معین و نزولی باشد و مشتق آن به صورت موضعی در مسیر  $x$  و برای هر  $t$  نیمه معین منفی باشد، یعنی  $\dot{V} \leq 0$ ، آن گاه مبدأ سیستم به صورت موضعی پایدار است.

۳. اگر  $V(x, t)$  به صورت موضعی معین مثبت و نزولی باشد، و  $-\dot{V}$  به صورت موضعی معین مثبت باشد، آن گاه مبدأ سیستم به طور یکنواخت و به صورت مجانبی پایدار است.

۴. اگر  $V(x, t)$  معین مثبت و نزولی باشد، و  $-\dot{V}$  معین مثبت باشد، آن گاه سیستم در مبدأ، به صورت سراسری پایدار مجانبی است. اکنون یک لم اساسی را که در ادامه به آن نیاز خواهیم داشت بیان می کنیم. اثبات این لم در [۲۱] بیان شده است.

لم ۱۲.۲. برای هر بردار  $x$  و  $y$  با ابعاد مناسب و هر ماتریس معین مثبت متقارن  $Z$  با بعد مناسب، نامساوی زیر برقرار است:

$$\pm 2x^T y \leq x^T Z x + y^T Z^{-1} y. \quad (5.2)$$

### ۳ نتایج اصلی

در این بخش، یک کنترل کننده مدلفزشی فازی بر اساس یک ابرصفحه جداکننده برای حل مسئله اجماع در سیستم های چندعاملی رهبر-پیرو ارائه می کنیم.

فرض ۱.۳. اگر  $f(x(t), \dot{x}(t), t)$  یک تابع برداری با مقدار حقیقی باشد، دو ثابت مثبت حقیقی  $W_x$  و  $W_v$  وجود دارند که  $f$  در نامساوی زیر صدق می کند.

$$\|f(x(t), \dot{x}(t), t) - f(y(t), \dot{y}(t), t)\| \leq W_x \|x(t) - y(t)\| + W_v \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|.$$

سیستمی شامل  $N$  عامل پیرو با معادلات دینامیکی یکسان و یک عامل رهبر را در نظر می گیریم که عوامل روی گراف ساده و بدون جهت  $G = (V, E)$  با هم در ارتباط اند. فرض کنیم معادله دینامیکی عامل  $i$ -ام برابر است با:

$$\ddot{x}_i(t) = f(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) + g(x_i(t), \dot{x}_i(t), t)u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

و معادله دینامیکی عامل رهبر به صورت زیر است:

$$\ddot{x}_0(t) = f(x_0(t), \dot{x}_0(t), t), \quad (2.3)$$

که در آن  $u_i$  ورودی کنترل،  $x_i(t) \in \mathbf{R}^n$  بردار حالت،  $f(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) \in \mathbf{R}^n$  و  $g(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  توابع برداری حقیقی برای  $i = 1, \dots, N$  اند. همچنین فرض می کنیم تابع  $f(x_i(t), \dot{x}_i(t), t)$  در فرض ۱.۳ صدق می کند و برای هر  $x(t)$  داریم:  $g(x(t), \dot{x}(t), t) \neq 0$ . توابع  $F$ ،  $G$  و  $U$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = [f(x_1(t), \dot{x}_1(t), t)^T, \dots, f(x_N(t), \dot{x}_N(t), t)^T]^T \in \mathbf{R}^{nN} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U} = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T \in \mathbf{R}^{nN}.$$

$$G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \begin{bmatrix} g(x_1(t), \dot{x}_1(t), t) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g(x_2(t), \dot{x}_2(t), t) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & g(x_N(t), \dot{x}_N(t), t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{nN}$$

معادلات (۱.۳) و (۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= f(x_i(t), v_i(t), t) + g(x_i(t), v_i(t), t)u_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} \dot{x}_o(t) &= v_o(t) \\ \dot{v}_o(t) &= f(x_o(t), v_o(t), t). \end{aligned}$$

خطای اجماع موضعی برای هر عامل پیرو به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) + b_i(x_i(t) - x_o(t)), \quad (۴.۳)$$

$$\varepsilon_{v_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i(t) - v_j(t)) + b_i(v_i(t) - v_o(t)), \quad (۵.۳)$$

که  $\varepsilon_{x_i}, \varepsilon_{v_i} \in \mathbb{R}^{nN}$ ، به علاوه،  $a_{ij}$  ها درایه‌های ماتریس مجاورت گراف ارتباطی  $G = (V, E)$  و  $b_i$  مشخص کننده اتصال عامل  $i$  -ام به رهبر است به این ترتیب که:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{If } (o, i) \in E \\ 0 & \text{If } (o, i) \notin E \end{cases} \quad (۶.۳)$$

خطای اجماع MAS برابر است با:  $\varepsilon_{\mathbf{x}} = [\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_N}]^T \in \mathbb{R}^{Nn}$  و  $\varepsilon_{\mathbf{v}} = [\varepsilon_{v_1}, \dots, \varepsilon_{v_N}]^T \in \mathbb{R}^{Nn}$

تعریف ۱.۳. یک MAS با  $N$  عامل پیرو و یک رهبر با دینامیک‌های مرتبه دوم در نظر می‌گیریم. اگر  $x_i(t)$  حالت عامل  $i$  -ام و  $x_o(t)$  حالت رهبر باشد گوییم برای همه عوامل پیرو  $i = 1, \dots, N$  سیستم چندعاملی با موفقیت به اجماع می‌رسد اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x_i(t) - x_o(t)\| + \|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_o(t)\|) = 0.$$

اکنون چند نماد را معرفی می‌کنیم که در ادامه از آن‌ها استفاده خواهیم کرد:

$$\underline{1} := [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$$

$$\underline{\mathbf{I}} := \underline{1} \otimes \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{1} := (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n$$

که در آن  $\mathbf{B}$  یک ماتریس قطری  $N \times N$  با عناصر قطری  $b_i$  است که در (۶.۳) معرفی شد، و  $\mathbf{L}$  ماتریس لاپلاسین مرتبط با توپولوژی گراف MAS است. به علاوه خطای ردیابی مسیر  $e_{x_i} := x_i(t) - x_o(t)$  و خطای ردیابی سرعت  $e_{v_i} := v_i(t) - v_o(t)$  را برای هر عامل تعریف می‌کنیم. بنابراین خطای ردیابی مسیر و سرعت برای سیستم به شرح زیر است:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{x}} := [e_{x_1}^T, \dots, e_{x_N}^T]^T \in \mathbb{R}^{Nn},$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{v}} := [e_{v_1}^T, \dots, e_{v_N}^T]^T \in \mathbb{R}^{Nn}.$$

قرار می دهیم:  $\underline{x}_o(t) := \mathbf{I}x_o(t)$ . به راحتی می توان نشان داد:

$$\varepsilon_x = \mathbf{I}e_x.$$

اگر قرار دهیم  $\underline{f}(x_o(t), v_o(t), t) := \mathbf{I}f(x_o(t), v_o(t), t)$  و با استفاده از رابطه (۳.۳)، آن گاه می توان رابطه زیر را داشت:

$$F_e(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) := F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \underline{f}(x_o(t), v_o(t), t).$$

بنابراین معادله دینامیکی MAS را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\dot{\varepsilon}_x = \varepsilon_v \quad (۷.۳)$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \mathbf{1}(F_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)U). \quad (۸.۳)$$

### ۱.۳ کنترل کننده مد لغزشی

برای طراحی یک کنترل کننده مد لغزشی استاندارد، ابتدا سطح لغزشی  $s_i = 0$  که  $i = 1, \dots, N$  را برای هر عامل به صورت زیر ارائه می کنیم:

$$s_i = c_i \varepsilon_{x_i} + \dot{\varepsilon}_{x_i}, \quad c_i > 0 \quad (۹.۳)$$

که مشتق آن برابر است با:

$$\dot{s}_i = c_i \dot{\varepsilon}_{x_i} + \ddot{\varepsilon}_{x_i}. \quad (۱۰.۳)$$

واضح است که  $s_i, \dot{s}_i \in \mathbb{R}^n$ ، برای  $i = 1, \dots, N$ ، اگر  $\varepsilon_{x_i}$  روی سطح لغزشی قرار گیرد، آن گاه  $\dot{\varepsilon}_{x_i} = -c_i \varepsilon_{x_i}$ . از این رو با حل معادله دیفرانسیل  $\varepsilon_{x_i} = e^{-c_i t}$  به دست می آید. در نتیجه وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آن گاه  $\varepsilon_{x_i} \rightarrow 0$  و بنابراین  $\varepsilon_{v_i} \rightarrow 0$ . یعنی اگر مقدار کنترل کننده را چنان بیابیم که خطای اجماع هر عامل MAS روی سطح لغزشی قرار گیرد، آن گاه خطای اجماع به صفر میل می کند. پس  $u_i$  برای هر  $i$  را طوری تعیین کنیم که هر  $\varepsilon_{x_i}$  به سطح لغزشی  $s_i = 0$  برسد و روی آن قرار گیرد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که  $u_i$  را نمی توان مستقیماً با حل معادلات  $s_i = 0$  و  $\dot{s}_i = 0$  به دست آورد. شکل ماتریسی سطوح لغزشی را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\varepsilon_x + \varepsilon_v, \quad (۱۱.۳)$$

که در آن  $\mathbf{S} = [s_1^T, \dots, s_N^T]^T \in \mathbb{R}^{Nn}$  و  $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, \dots, c_N)$  یک ماتریس در  $\mathbb{R}^{Nn \times Nn}$  است. بنابراین

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}\dot{\varepsilon}_x + \mathbf{1}F_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{1}GU \quad (۱۲.۳)$$

فرض می کنیم  $\mathbf{M} := \mathbf{1}G$  و مخروط تولید شده توسط سطرهای  $\mathbf{M}$  را با  $C$  نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$C = \left\{ x : x = M^T y, y \in \mathbb{R}_+^{nN} \right\}$$

اگر  $\mathbf{S}$  در مخروط تولید شده توسط سطرهای  $\mathbf{M}$  نباشد با استفاده از قضیه ۱۰.۲، صفحه جداکننده را به صورت  $a^T x - b = 0$  تعریف می کنیم به طوری که

$$a = \mathbf{S} - \hat{c}$$

و

$$b = \frac{\|\mathbf{S}\| - \|\hat{c}\|}{2}$$

که در آن

$$\hat{c} = \arg \min \{ \|\mathbf{S} - c\| \mid c \in C \}. \quad (۱۳.۳)$$

در نتیجه

$$\hat{c} = \arg \min \left\{ \| \mathbf{S} - M^T y \|, y \in \mathbb{R}_+^{nN} \right\}. \quad (14.3)$$

واضح است که  $\hat{c}$  با حل دستگاه  $M^T y = \mathbf{S}$  به دست نمی‌آید و برای یافتن  $\hat{c}$  باید مسئله مینیمم‌سازی (۱۴.۳) را حل کنیم که در این جا از الگوریتم ۲ استفاده می‌کنیم. حال بردار کنترل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{U} = a - M^{-1} \underline{b} - M^{-1} \mathbf{K} \mathbf{S} \quad (15.3)$$

به طوری که  $\underline{b} := b_1$  و

$$\mathbf{K} := \kappa \mathbf{I}_N \quad (16.3)$$

و همچنین

$$\kappa := 1 + \frac{\beta^T \mathbf{S}}{\| \mathbf{S} \|^2}, \quad (17.3)$$

$$\beta := [\beta_1, \dots, \beta_N]^T$$

که در آن

$$\beta_i := a^T M_i - b$$

اگر  $\mathbf{S}$  در مخروط تولید شده توسط سطرهاى  $\mathbf{M}$  باشد کنترل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{U}_{SW} := -M^{-1} \mathbf{S}.$$

به عبارت دیگر می‌توان کنترل سوئیچ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{U}_{SW} = \begin{cases} \tilde{U} & \text{if } \mathbf{S} \notin C \\ -M^{-1} \mathbf{S} & \text{if } \mathbf{S} \in C \end{cases} \quad (18.3)$$

فرض می‌کنیم که ماتریس  $\mathbf{M}$  معین مثبت باشد، در این صورت با استفاده از قضیه ۱۰.۲،  $\tilde{U}$  تعریف شده در (۱۵.۳) در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{M} \tilde{U} = -\xi \| \mathbf{S} \|, \quad \xi \geq 0.$$

SMC برپایه صفحه جداکننده را با  $\mathbf{U}_{SM}$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{U}_{SM} = M^{-1} (-C \varepsilon_v - 1 F e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) + \rho \mathbf{U}_{SW}, \quad (19.3)$$

که در آن  $\rho$  یک عدد مثبت دلخواه است و  $\mathbf{U}_{SW}$  از رابطه (۱۸.۳) به دست می‌آید. برای بررسی پایداری، تابع معین مثبت  $V$  را به عنوان تابع لیاپانوف، به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$V = \frac{1}{\gamma} \mathbf{S}^T \mathbf{S}, \quad (20.3)$$

$$\dot{V} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}}. \quad (21.3)$$

با استفاده از روابط (۱۲.۳)، (۱۱.۳) و (۲۱.۳) خواهیم داشت:

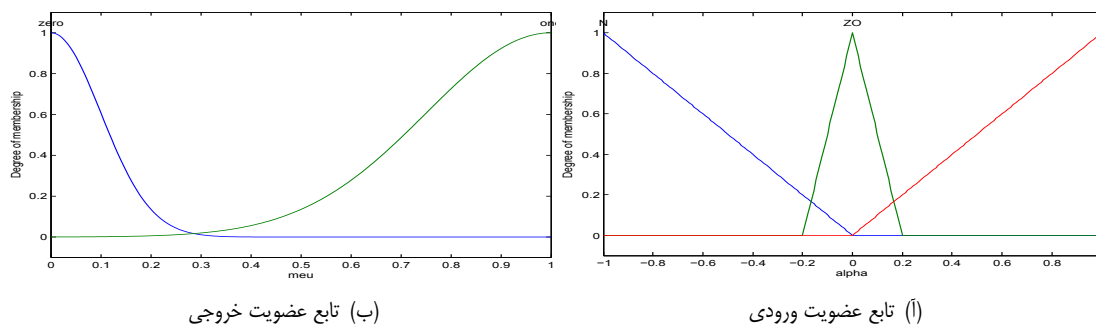
$$\dot{V} = \varepsilon_v^T C \varepsilon_v + \varepsilon_x^T C^* \varepsilon_v + \varepsilon_x^T C 1 F e + \varepsilon_v^T 1 F e + \mathbf{S}^T 1 G \mathbf{U}_{SM},$$

ذکر این نکته ارزشمند است که برای هر دو حالت کنترل سوئیچ، کنترل کننده (۱۹.۳) شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$\dot{V} \leq -\eta \| \mathbf{S} \| \quad \eta \geq 0. \quad (22.3)$$

تذکر ۲.۳. فاز رسیدن فازی است که در آن بردارهای حالت به سطح لغزشی می‌رسند و فاز لغزشی فازی است که بردارهای حالت قرار گرفته روی سطح لغزشی به نقطه تعادل می‌لغزند. کنترل کننده مدلغزشی پیش‌نهادی یک جمله نمایی برای همه عوامل پیرو دارد. بنابراین، بردار حالت هر عامل با سرعت نمایی به سطح لغزشی می‌رسد. به عبارت دیگر فاز رسیدن در کنترل کننده مدلغزشی (۱۹.۳) نمایی است.





شکل ۱: توابع عضویت فازی

### ۲.۳ کنترل کننده مدل‌گزینی فازی

کنترل کننده مدل‌گزینی (۱۹.۳) به دلیل وجود جمله  $U_{SW}$  و تغییر  $S$  تابعی گسسته است و با فرکانس بسیار بالایی (از نظر تئوری، بی‌نهایت) بین مقادیر  $U_{SW}$  نوسان می‌کند که این نوسان با فرکانس بالا، پدیده چترینگ نامیده می‌شود. چترینگ پدیده‌ای مضر است؛ زیرا منجر به سایش زیاد قطعات مکانیکی متحرک و اتلاف حرارتی زیاد در مدارهای الکتریکی می‌شود. برای حل این مشکل از کنترل کننده مدل‌گزینی فازی استفاده می‌کنیم. با توجه به (۱۸.۳)، قوانین فازی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{If } S \notin \text{Cone}(M) \text{ then } \mu = 1. \quad (23.3)$$

$$\text{If } S \in \text{Cone}(M) \text{ then } \mu = 0. \quad (24.3)$$

قانون (۲۳.۳) بیان می‌کند که  $U_{SM}$  با استفاده از صفحه جداکننده زمانی به دست می‌آید که  $S$  به مخروط تولید شده توسط سطرها  $M$  تعلق نداشته باشد. در واقع داریم:

$$U_{SM} = M^{-1}(-C\varepsilon_x - 1F_e(x, v, t)) + \theta(a - M^{-1}\underline{b} - M^{-1}KS).$$

به‌طور مشابه با استفاده از (۲۴.۳)،  $U_{SM}$  توسط

$$U_{SM} = M^{-1}(-C\varepsilon_x - 1F_e(x, v, t)) - \theta S$$

وقتی به دست می‌آید که  $S$  متعلق به مخروط  $C$  است. با توجه به قوانین فوق، کنترل کننده مدل‌گزینی فازی عبارت است از:

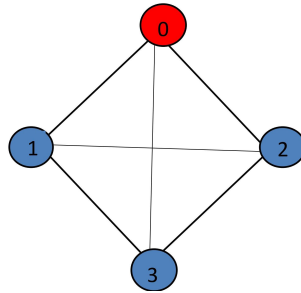
$$U_{FSM} = M^{-1}(-C\varepsilon_x - 1F_e(x, v, t)) + \mu\theta(a - M^{-1}\underline{b} - M^{-1}KS) - (1 - \mu)\theta S. \quad (25.3)$$

کنترل کننده فازی (۲۵.۳) تابعی هموار است و مقدار کنترل سیستم بین دو مقدار گسسته سوئیچ نخواهد کرد. لذا با اعمال کنترل (۲۵.۳) پدیده چترینگ مشاهده نخواهد شد. حال نحوه پیاده‌سازی کنترل فازی را ارائه می‌کنیم. متغیر ورودی سیستم فازی مینیمم مقدار بردار  $y$  است که با حل معادلات  $S - M^T y = 0$  به دست می‌آید. با اتخاذ تابع عضویت فازی ورودی، یک سیستم استنتاج فازی و تابع عضویت فازی خروجی، خروجی سیستم فازی،  $\mu$  به دست می‌آید. توابع عضویت ورودی و خروجی سیستم فازی در شکل ۱ نشان داده شده است.

## ۴ پیاده‌سازی

در این بخش، دو مثال عددی برای نشان دادن کارایی نتایج نظری به دست آمده در بخش ۳ ارائه شده است. در هر دو مثال:

- باید مسئله مینیمم‌سازی  $\min\{\|S - M^T y\|, y \in \mathbb{R}_+^{Nn}\}$  را با استفاده از الگوریتم ۲، حل کنیم به طوری که  $S$  یک سطح لغزشی،  $M = 1G$  و  $y$  متعلق به  $\mathbb{R}_+^{Nn}$  است؛
- از آنجایی که  $S$  تابعی از زمان  $t$  است، تابع هدف مسئله مینیمم‌سازی در هر لحظه تغییر می‌کند؛
- در الگوریتم ۲ فرض می‌کنیم  $C_1 = C_2 = 0.001$ ،  $k = 10$  تعداد تکرار و تعداد ذرات برابر با ۵۰ باشند.



شکل ۲: توپولوژى گراف مثال ۱

در ادامه توجه کنیم که توابع عضویت فازى ورودى و خروجى استفاده شده در هر دو مثال، همان توابع ارائه شده در شکل ۱ است. براى پياده سازى اين مثال‌ها از MATLAB Simulink با طول گام  $10^{-1}$  استفاده شده است.

مثال ۱.۴. در اين مثال، يك سيستم چندعاملى كه ابعاد بردار حالت هريك از عوامل پيرو و عامل رهبر سه است ارائه شده است. براى رسيدن به اجماع دو کنترل کننده بر اين سيستم اعمال می شود، اولی کنترل مدلغزشى فازى بر پایه صفحه جداکننده، و دیگری کنترل مدلغزشى غير فازى بر پایه صفحه جداکننده است. همانطور كه نتایج شبیه‌سازى نشان می‌دهند، هر دو کنترل کننده با دقت و سرعت خوبى به اجماع می‌رسند اما کنترل کننده غير فازى داراى پديده چترینگ است.

يك MAS با يك رهبر و سه عامل پيرو در نظر می‌گیریم كه در آن عامل رهبر را با اندیس ۰ و عوامل پيرو را با اندیس‌هاى ۱، ۲ و ۳ نشان داده می‌شوند. تبادل اطلاعات بين عامل‌ها با توپولوژى گراف ثابت، هم‌بند و بدون جهت شكل ۲ نشان داده شده است. ماتریس لاپلاسىن مربوط به گراف ارتباطى بين عوامل كه از رابطه (۱.۲) به دست می‌آید، به صورت زیر است.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ديناميك‌هاى عوامل پيرو برابر است با :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= [0.85x_{i1}(t) - 0.6v_{i1}(t) - 1 + u_{i1}, x_{i2}(t) - v_{i2}(t) - 1 + u_{i2}, x_{i3}(t) - 2v_{i3}(t) - 1 + u_{i3}]^T \end{aligned} \quad (1.4)$$

كه  $i = 1, 2, 3$ . هم‌چنين ديناميك‌هاى عامل رهبر عبارتند از:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= v_0(t) \\ \dot{v}_0(t) &= [0.85x_{01}(t) - 0.6v_{01}(t) - 1, x_{02}(t) - v_{02}(t) - 1, x_{03}(t) - 2v_{03}(t) - 1]^T. \end{aligned} \quad (2.4)$$

با توجه به روابط (۱.۴) و (۲.۴)، حالات عامل رهبر و عوامل پيرو بردارهاى در  $\mathbb{R}^3$  هستند. توجه داشته باشیم كه تابع  $f(x, v, t)$  در رابطه (۱.۴) به ازاء  $1$  و  $2$   $W_x = 2$  و  $W_v = 2$  فرض ۱.۳ را برآورده می‌کند. براى شبیه‌سازى، در رابطه (۱۹.۳)، مقدار  $\rho = \frac{1}{1 + \|\mathbf{S}\|}$  را در

نظر می‌گیریم. مکان و سرعت اولیه عامل رهبر بردارهاى در  $\mathbb{R}^3$  به شرح زیر هستند:

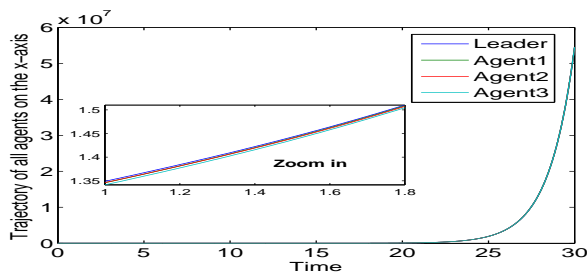
$$x_0(\circ) = [0, 0, 0]^T, \quad v_0(\circ) = [0.2, 0.25, 0.8]^T.$$

مکان‌هاى اولیه سه عامل پيرو عبارتند از:

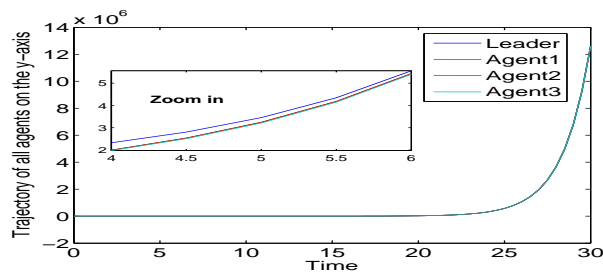
$$x_1(\circ) = [4, 3, 1]^T, \quad x_2(\circ) = [1.5, -2.5, 1.2]^T, \quad x_3(\circ) = [-2.5, 5, 1]^T.$$

سرعت‌هاى اولیه سه عامل پيرو عبارتند از:

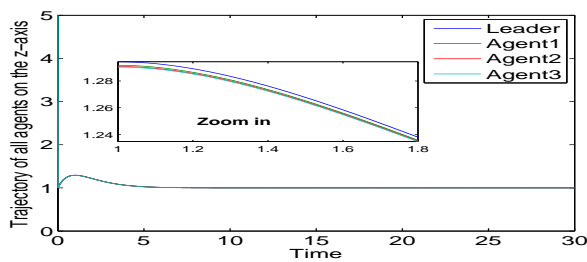
$$v_1(\circ) = [-0.8, -0.5, 1.8]^T, \quad v_2(\circ) = [1.5, 1.6, 1.2]^T, \quad v_3(\circ) = [-2.5, -1.2, 1]^T.$$



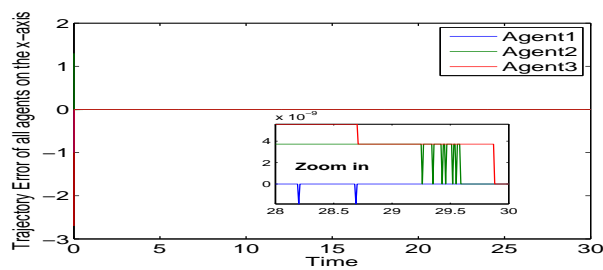
شکل ۳: مسیر تمام عوامل پیرو در طول ۳۰ ثانیه در راستای محور  $x$



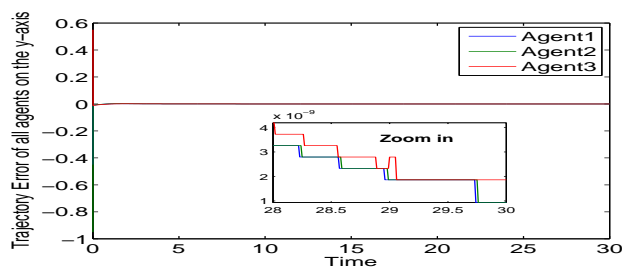
شکل ۴: مسیر تمام عوامل پیرو در طول ۳۰ ثانیه در راستای محور  $y$



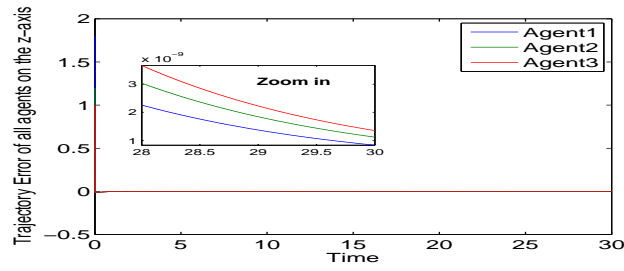
شکل ۵: مسیر تمام عوامل پیرو در طول ۳۰ ثانیه در راستای محور  $z$



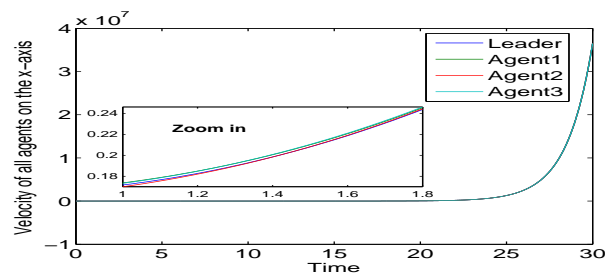
شکل ۶: خطای مسیر تمام عوامل پیرو در طول ۳۰ ثانیه در راستای محور  $x$



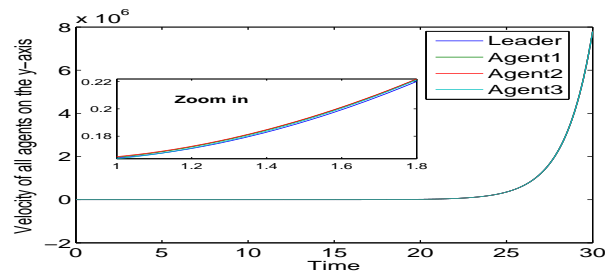
شکل ۷: خطای مسیر تمام عوامل پیرو در طول ۳۰ ثانیه در راستای محور  $y$



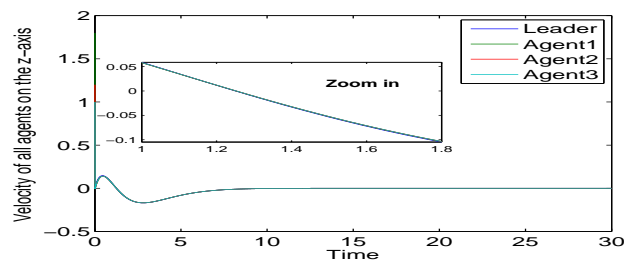
شکل ۸: خطای مسیر تمام عوامل پیرو در طول  $30^{\circ}$  ثانیه در راستای محور  $z$



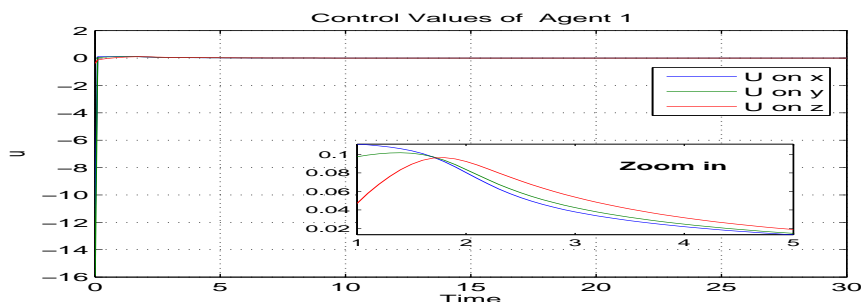
شکل ۹: سرعت تمام عوامل پیرو در طول  $30^{\circ}$  ثانیه در راستای محور  $x$



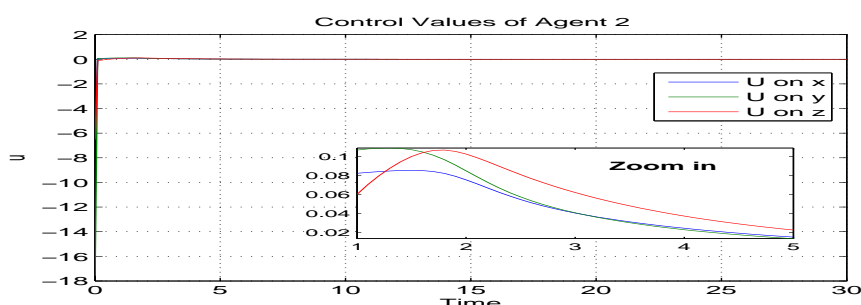
شکل ۱۰: سرعت تمام عوامل پیرو در طول  $30^{\circ}$  ثانیه در راستای محور  $y$



شکل ۱۱: سرعت تمام عوامل پیرو در طول  $30^{\circ}$  ثانیه در راستای محور  $z$



شکل ۱۲: FSMC بر پایه صفحه جداکننده برای عامل اول در راستای محور  $X$ ،  $Y$  و  $Z$



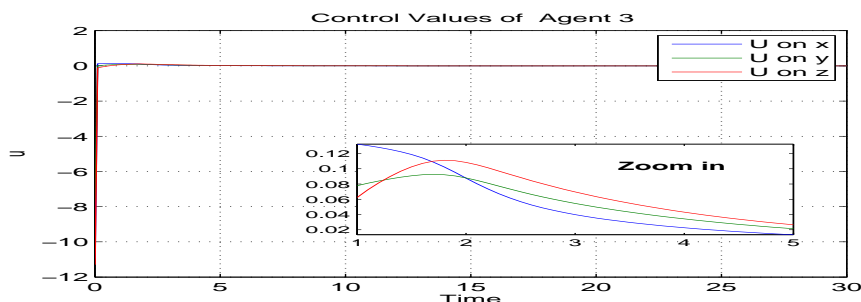
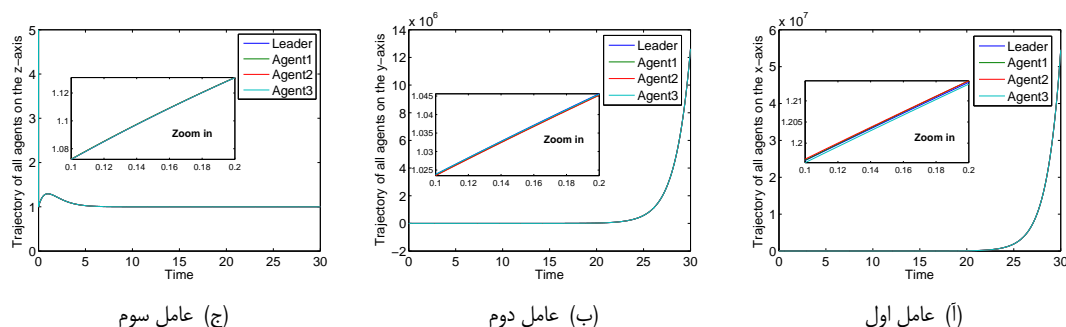
شکل ۱۳: FSMC بر پایه صفحه جداکننده برای عامل دوم در راستای محور  $X$ ،  $Y$  و  $Z$

همان‌طور که در شکل‌های ۳، ۴ و ۵ نشان داده شده است، کنترل‌کننده طراحی شده بر پایه صفحه جداکننده باعث می‌شود که همه عوامل پیرو با خطای کم‌تر از  $10^{-8}$  از عامل رهبر پیروی کنند. شکل‌های ۶، ۷ و ۸ نشان می‌دهند که خطای مسیر همه عوامل دنبال‌کننده، که بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  اند، بسیار سریع و به‌طور پیوسته کاهش می‌یابند. برای واضح‌تر نشان دادن این مطلب، شکل‌ها را از زمان  $t = 28$  تا  $t = 30$  بزرگ‌نمایی می‌کنیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که خطای اجماع اولیه با دقت  $10^{-9}$  به صفر هم‌گرا می‌شود. هم‌گرایی سرعت تمام عوامل پیرو به سرعت عامل رهبر که بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  اند در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده‌اند. معادلات مسیر عامل رهبر به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} x_o(t) &= 0.1031 (\exp(0.6695t) - \exp(-1.2695t)) + \frac{100}{85} \\ y_o(t) &= -0.1118 (\exp(-1.6180t) - \exp(0.6180t)) + 1 \\ z_o(t) &= 0.8t \exp(-t) + 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

که  $x_o(t)$ ،  $y_o(t)$  و  $z_o(t)$  به ترتیب مسیر عامل رهبر در راستای محورهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  هستند. با توجه به معادلات موجود در رابطه (۳.۴) به راحتی می‌توان دریافت که مقادیر مسیر و سرعت عامل‌ها در محور  $X$  و محور  $Y$  نسبت به متغیر  $t$  به‌طور قابل‌توجهی افزایش می‌یابد. شکل‌های ۳، ۴ و ۵ نشان می‌دهند که مسیرهای عوامل پیرو به مسیر عامل رهبر هم‌گرا می‌شوند. علاوه بر این، نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهند که تمام نمودارهای سرعت عوامل پیرو با معادلات سرعت رهبر منطبق است. همان‌طور که در شکل‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است، کنترل‌کننده فازی ارائه‌شده در این مقاله فاقد پدیده چترینگ است. SMC بر اساس صفحه جداکننده بدون هیچ کنترل‌کننده فازی:

در بسیاری از کاربردهای عملی کنترل‌های مدل‌غزشی، مهندسان ممکن است پدیده‌های نامطلوب از نوسانات با فرکانس و دامنه محدود را تجربه کنند که به‌عنوان پدیده چترینگ شناخته می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد چترینگ پدیده‌ای مضر است زیرا منجر به دقت پایین کنترل، سایش زیاد قطعات مکانیکی متحرک و اتلاف حرارتی بالا در مدارهای الکتریکی می‌شود. در این‌جا کنترل‌کننده ارائه‌شده را روی همان MAS تعریف شده در (۱.۴) و (۲.۴) بدون استفاده از قوانین فازی اجرا می‌کنیم همان‌طور که در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده است. نتایج به‌دست‌آمده رضایت‌بخش است، زیرا حالات عوامل پیرو و رهبر به یک اجماع می‌رسند. با این حال، فقدان یک کنترل‌کننده فازی منجر به پدیده چترینگ در کنترل سیستم چندعاملی می‌شود که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. اکنون، مثالی دیگر برای نشان دادن کارایی SMC بر اساس صفحه جداکننده برای سیستم‌های چندعاملی رهبر-پیرو همگن با گراف ثابت ارائه می‌کنیم.

شکل ۱۴: FSMC بر پایه صفحه جداکننده برای عامل سوم در راستای محور  $X$ ،  $Y$  و  $Z$ 

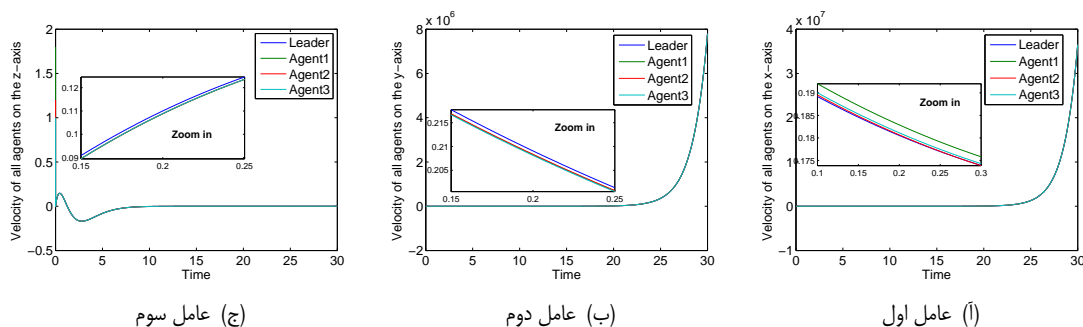
شکل ۱۵: مسیر عوامل پیرو با SMC بر پایه صفحه جداکننده بدون سیستم فازی

مثال ۲.۴. در این مثال، یک سیستم چندعاملی که ابعاد بردار حالت هریک از عوامل پیرو و عامل رهبر یک است، ارائه شده است. به منظور مقایسه کنترل پیش‌نهادی ارائه شده در بخش ۳، با روش‌های قبلی دو کنترل کننده بر این سیستم اعمال می‌شود، اولی کنترل مدغزشی فازی بر پایه صفحه جداکننده، و دیگری کنترل مدغزشی معادل است. همان‌طور که نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند کنترل کننده ارائه شده در این مقاله با دقت و سرعت بهتری به اجماع می‌رسد و فاقد چترینگ نیز می‌باشد. اما کنترل معادل، سرعت و دقت کم‌تری دارد و دارای پدیده چترینگ است. یک سیستم چندعاملی رهبر-پیرو همگن را با شش عامل در نظر می‌گیریم، که تبادل اطلاعات بین عامل‌ها با توپولوژی گراف در شکل ۱۸ نشان داده شده است و در آن عامل رهبر را با اندیس ۰ و عوامل پیرو را با اندیس‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ نشان می‌دهیم. معادلات دینامیکی عوامل پیرو که به معادله نوسان‌گر وندرپل (*Van der Pol*) معروف‌اند به صورت زیر بیان می‌شوند:

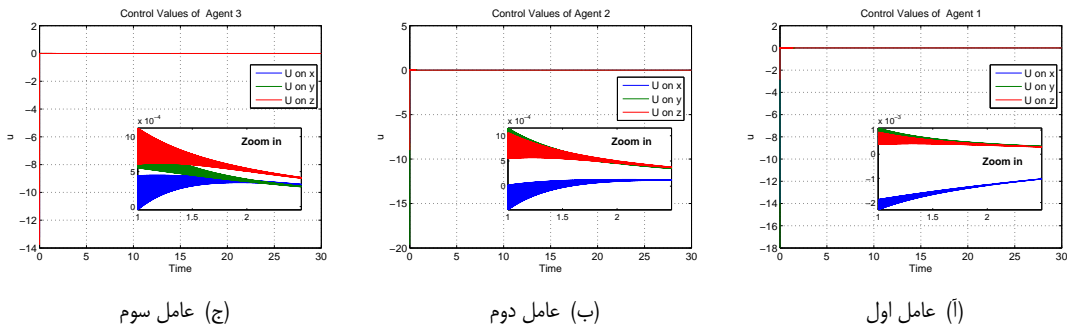
$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= -x_i(t) + \mathfrak{A}(1 - x_i^2(t))v_i(t) + u_i, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (4.4)$$

که در آن  $x_i(t)$  و  $v_i(t)$  به‌ازاء  $i = 1, \dots, 6$  توابع حقیقی‌اند حال معادله دینامیک رهبر را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

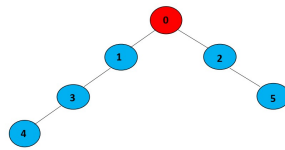
$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= v_0(t) \\ \dot{v}_0(t) &= -x_0(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$



شکل ۱۶: سرعت عوامل پیرو با SMC بر پایه صفحه جداکننده بدون سیستم فازی



شکل ۱۷: SMC بر اساس صفحه جداکننده بدون هیچ کنترل کننده فازی



شکل ۱۸: توپولوژی گراف مثال ۲

که  $x_o(t), v_o(t)$  نیز توابع حقیقی اند. مقادیر اولیه مکان و سرعت عوامل پیرو به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0.1 & \quad x_2(0) = 0.4 & \quad x_3(0) = 0.2 & \quad x_4(0) = 0.3 & \quad x_5(0) = 0.5 \\ v_1(0) = 0.2 & \quad v_2(0) = 0.1 & \quad v_3(0) = 0.1 & \quad v_4(0) = 0.1 & \quad v_5(0) = 0.1 \end{aligned}$$

همچنین مقدار اولیه مکان و سرعت برای عامل رهبر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_o(0) &= 0.2 \\ v_o(0) &= 0. \end{aligned}$$

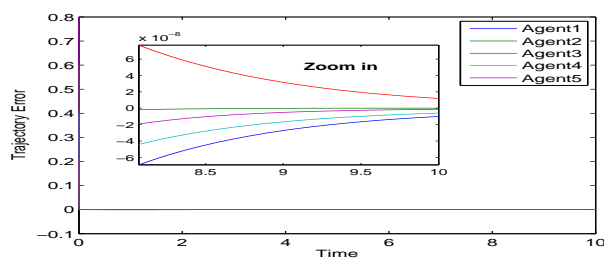
ماتریس لاپلاسیان  $L$  مربوط به گراف ارتباطی MAS که از رابطه (۱.۲) به دست می آید برابر است با

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

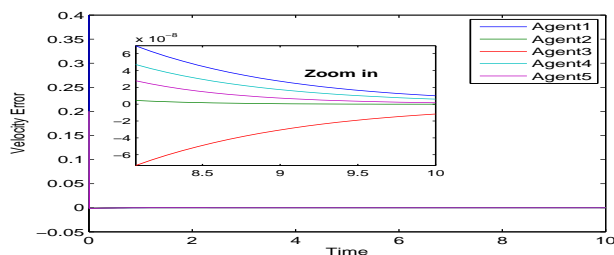
در این مثال دو کنترل را اعمال کرده ایم تا سیستم به اجماع برسد. اولی FSMC بر اساس یک صفحه جداکننده و دومی کنترل مدلفزشی معادل است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که سیستم با استفاده از FSMC بر اساس یک صفحه جداکننده سریع تر از سیستم با استفاده از کنترل معادل به اجماع می رسد. کنترل مدلفزشی بر پایه صفحه جداکننده:

با در نظر گرفتن پارامتر  $\rho = \frac{1}{1 + \|S\|}$  مربوط به کنترل ارائه شده، خطاهای ردیابی مسیر و سرعت عوامل پیرو در شکل های ۱۹ و ۲۰ به ترتیب نشان داده شده است. توجه داشته باشید از آنجایی که اندازه گام ۰.۱ است، با در نظر گرفتن شکل های ۱۹ و ۲۰ به نظر می رسد خطاهای مسیر و سرعت پس از  $10^{-8}$  تکرار کاهش می یابد. همچنین، نتایج عددی نشان می دهد که عوامل پیرو با دقت  $10^{-8}$  به اجماع می رسند.

در شکل های ۲۱ و ۲۲ می توان مشاهده کرد که مانند مثال ۱، حالت های عوامل پیرو خیلی سریع به اجماع می رسند، یعنی مقادیر حالت عوامل پیرو با خطای کم تر از  $10^{-8}$  برابر با مقدار حالت رهبرند. منحنی های مسیر و سرعت عوامل پیرو و رهبر در شکل های ۲۱ و ۲۲ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، منحنی های مسیر و سرعت عوامل پیرو خیلی سریع بر منحنی های مسیر و سرعت رهبر



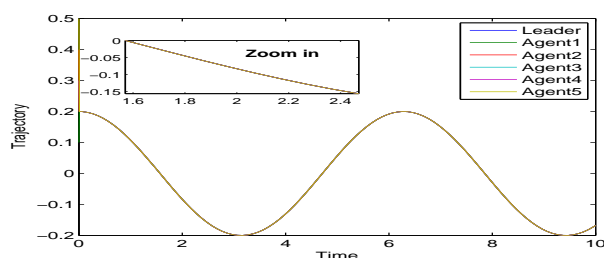
شکل ۱۹: خطای مسیر عوامل پیرو در زمان ۱۰ ثانیه



شکل ۲۰: خطای سرعت عوامل پیرو در زمان ۱۰ ثانیه

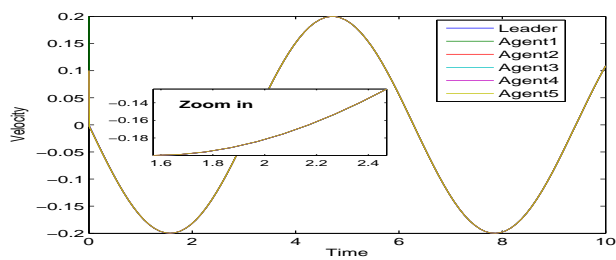
منطبق می‌شوند. توجه داشته باشیم که دقت این آزمایش  $10^{-8}$  است. همچنین با استفاده از دستورات زوم نرم افزار MATLAB رفتار تمامی عوامل پیرو و رهبر یعنی سرعت و مسیر حرکت عوامل را به دقت نشان دادیم. همچنین در ادامه، شکل ۲۳ نشان می‌دهد که کنترل کننده فازی ارائه شده فاقد پدیده چترینگ است. تغییرات تابع لیاپانوف با توجه به متغیر  $t$  در شکل ۲۴ نشان داده شده است. همان طور که قبلاً ذکر شد، تابع هدف مسئله مینیمم‌سازی (۱۴.۳) با توجه به متغیر  $t$  تغییر می‌کند. از این رو در زمان  $t = 0.2$  نمودار تابع هدف مربوط به مسئله مینیمم‌سازی را با توجه به تعداد تکرارها در الگوریتم ۲، در شکل ۲۵ رسم کرده‌ایم. کاهش سریع تابع هدف، بیان‌گر توانایی بالای الگوریتم PSO در حل مسئله مینیمم‌سازی (۱۴.۳) است. SMC بر پایه کنترل معادل:

برای دستیابی به اجماع و به منظور مقایسه کنترل ارائه شده در این مقاله با یک کنترل مدلغزشی، روی سیستم چندعاملی و ندریل تعریف شده در (۴.۴) و (۵.۴)، یک کنترل مدلغزشی معادل را اعمال می‌کنیم. نتایج این پیاده‌سازی در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ نشان داده شده است. توجه داشته باشیم که سرعت هم‌گرایی برای رسیدن به اجماع با استفاده از SMC ارائه شده در این مقاله از سرعت هم‌گرایی برای رسیدن به اجماع با استفاده از SMC بر اساس یک کنترل معادل، بیش‌تر است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که پدیده چترینگ در کنترل کننده مدلغزشی معادل، در شکل ۲۸ قابل مشاهده است.

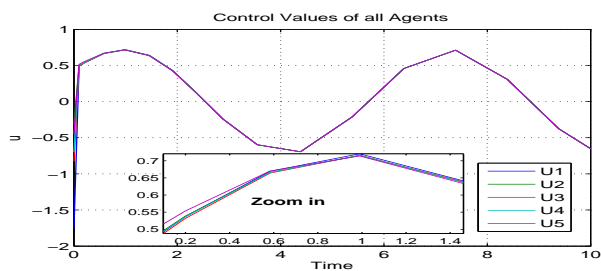


شکل ۲۱: مسیر عوامل پیرو در زمان ۱۰ ثانیه

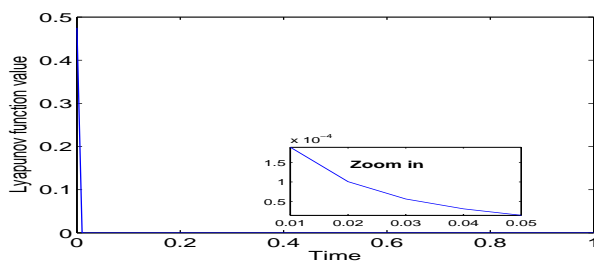




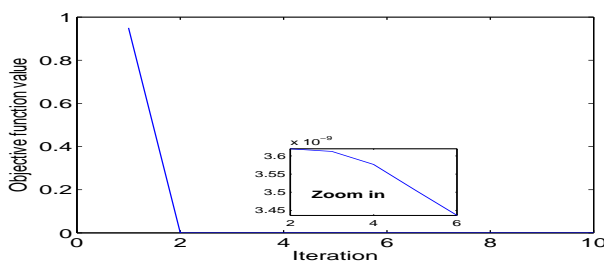
شکل ۲۲: سرعت عوامل پیرو در زمان ۱۰ ثانیه



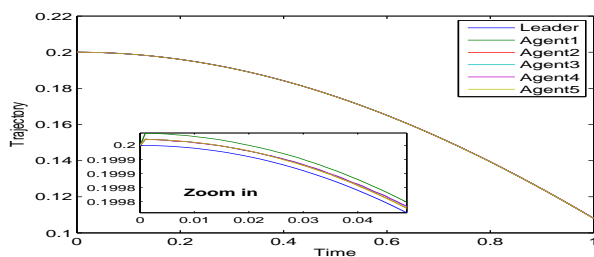
شکل ۲۳: FSMC بر پایه صفحه جداکننده



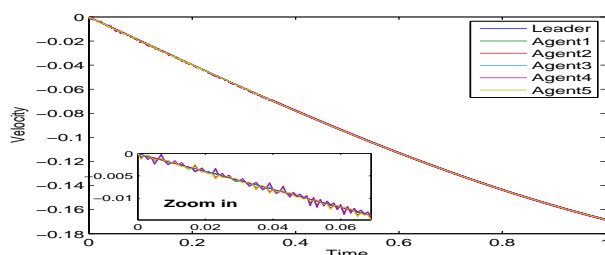
شکل ۲۴: تابع لیابانوف سیستم چندعاملی



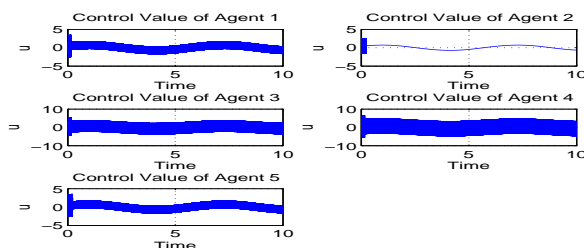
شکل ۲۵: تغییرات تابع هدف نسبت به تعداد تکرار در زمان  $t = 0.2$



شکل ۲۶: مسیر عوامل پیرو با استفاده از SMC بر پایه کنترل معادل



شکل ۲۷: سرعت عوامل پیرو با استفاده از SMC بر پایه کنترل معادل



شکل ۲۸: SMC بر پایه کنترل معادل برای تمام عوامل

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله، یک کنترل کننده مدلفزشی فازی را بر اساس یک صفحه جداکننده برای دسته‌ای از MAS های غیرخطی مطالعه کردیم. به منظور نشان دادن برخی از مزایای کنترل کننده مدلفزشی فازی ارائه شده، دو مثال عددی ارائه گردید. هم چنین نشان دادیم که سرعت هم‌گرایی برای رسیدن به اجماع با استفاده از FSMC ارائه شده در این مقاله بیش تر از سرعت هم‌گرایی برای رسیدن به اجماع با استفاده از SMC بر اساس یک کنترل معادل است. در پایان به عنوان یک طرح پیش نهادی می‌توان، FSMC پیش نهادی در این مقاله را برای حل مسئله اجماع در سیستم‌های چندعاملی بدون رهبر مورد مطالعه قرار داد.

## فهرست منابع

- [1] A. Abdessameud, A. Tayebi, *Distributed consensus algorithms for a class of high-order multi-agent systems on directed graphs*, IEEE Transactions on Automatic Control, **63** (2018) no. 10, 3464–3470.
- [2] S. Boyd S. and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] W. Cao, J. Zhang and W. Ren, *Leader–follower consensus of linear multi-agent systems with unknown external disturbances*, Systems & Control Letters, **82** (2015), 64–70.
- [4] Y. Cao and Y. Sun, *Consensus of discrete-time third-order multi-agent systems in directed networks*, Neurocomputing, **177**( 2016), 394–400.
- [5] Fiengo G., Lui D.G, Petrillo A. and Santini S. *Distributed robust output consensus for linear multi-agent systems with input time-varying delays and parameter uncertainties*, IET Control Theory & Applications. **13**(2019) no. 2, 203–212.
- [6] Y. Gao, J. Yu, J. Shao and M. Yu, *Group consensus for second-order discrete-time multi-agent systems with time-varying delays under switching topologies*, Neurocomputing. **207**(2016), 805–812.

- [7] M. M. Gulzar, S. T. Hussain Rizvi, M. Yaqoob Javed , U. Munir and H. Asif, *Multi-agent cooperative control consensus: A comparative review*, Electronics, **7** (2018), no. 2, 1–20.
- [8] Y. Han and C. Li *Second-order consensus of discrete-time multi-agent systems in directed networks with nonlinear dynamics via impulsive protocols*, Neurocomputing, **286**(2018), 51–57.
- [9] J. Kennedy, R. Eberhart, *Particle swarm optimization*, IEEE InProceedings of ICNN'95-international conference on neural networks, **4**(1995) 1942–1948.
- [10] D. Li, S. Ge and T. H. Lee, *Fixed-time-synchronized consensus control of multiagent systems*, IEEE transactions on control of network systems. **8** (2020) ,no. 1, 89–98.
- [11] X. Li, M. Z. Chen, H. Su and C. Li, *Consensus networks with switching topology and time-delays over finite fields*, Automatica. **68**(2016), 39–43.
- [12] Y. Li, C. Tan, *A survey of the consensus for multi-agent systems*, Systems Science & Control Engineering, **7**(2019), no. 1, 468–482.
- [13] J. Liu, B. An and H. Wu, *Consensus of third-order multi-agent systems with communication delay*, IEEE Chinese Control And Decision Conference, (2018), 1428–1432.
- [14] K. Liu, Z. Ji, G. Xie and L. Wang, *Consensus for heterogeneous multi-agent systems under fixed and switching topologies*, Journal of the Franklin Institute, **352**(2015) no. 9, 3670–3683.
- [15] X. Liu, K. Zhang and W. C. Xie, *Consensus seeking in multi-agent systems via hybrid protocols with impulse delays*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, **25**(2017), 90–98.
- [16] R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC press, 2017.
- [17] B. Tian, Z. Zuo and H. Wang, *Leader–follower fixed-time consensus of multi-agent systems with high-order integrator dynamics*, International Journal of Control, **90**( 2017), no. 7, 1420–1427.
- [18] R. Yang, L. Liu and G. Feng, *An overview of recent advances in distributed coordination of multi-agent systems*, Unmanned Systems, **10** (2022) , no.3, 307–325.
- [19] W. Yu, G. Chen, M. Cao and J. Kurths, *A Hybrid Newton-Raphson and Particle Swarm Optimization Method for Target Motion Analysis by Batch Processing*, Sensors **21** (2021), no.6, Article number 2033.
- [20] W. Yu, G. Wen, G. Chen and J. Cao, *Distributed cooperative control of multi-agent systems*, John Wiley & Sons, 2017.
- [21] Q. Zhang, X. Wei and J. Xu, *Delay-dependent exponential stability of cellular neural networks with time-varying delays*, Chaos, Solitons & Fractals **23**(2005) no.4, 1363–1369.
- [22] Z. Zhang and L. Li, *Dynamical sliding-mode control of leader-following multi-agent systems*, IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (2017), 6273–6278.
- [23] W. Zhu and D. Cheng, *Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays*, Automatica, **46** (2010), no. 12, 1994–1999.



## Design of a Sliding Mode Fuzzy Consensus Controller for a Special class of Leader-Follower Nonlinear Multi-agent systems

Negar Izadi <sup>†</sup>, Mohammad Taghi Dastjerdi

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 2022/10/13

Accepted: 2023/5/22

**Abstract:** In this paper, we propose a fuzzy sliding mode controller (FSMC) for Multi-agent Systems (MAS) and investigate the leader-follower consensus problem for the network of nonlinear dynamic agents with an undirected graph topology. A new sliding mode controller is suggested to address the consensus problem in MASs. The proposed sliding mode controller is based on a separating hyperplane. In addition, a fuzzy controller is designed to eliminate the chattering phenomenon. According to the communication graph topology and the Lyapunov stability condition, the proposed FSMC satisfies the consensus condition. As an advantage of the control presented in this paper, the states of the system reach the sliding surface very quickly and remain on the surface. The advantage of the proposed approach is also illustrated by simulation results.

**Keywords:** Consensus, Fuzzy Controller, Multi-Agent System, Sliding Mode Control, Stability.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>†</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: [negarizadi@znu.ac.ir](mailto:negarizadi@znu.ac.ir) (N. Izadi), [tdast@znu.ac.ir](mailto:tdast@znu.ac.ir) (M. T. Dastjerdi).