مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۱۸۸-۲۰۲

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2023.42399.2113

برآوردهای فازی برای قضایای نقطه‌ثابت سی‌آیریک

سید علی محمد محسنی الحسینی ×، مرتضی ساحلی ، عباس عسکری زاده

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۹/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۲

چکیده: ما تخمین خطاهای نقطه‌ثابت را برای دو قضیه مهم نقطه‌ثابت نگاشت‌های شبه‌انقباضی روی فضاهای نرم‌دار فازی بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ما نگاشت‌های $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی و به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته را روی فضاهای متری فازی تعریف کرده و نشان می‌دهیم که این تعاریف تعمیم این نگاشت‌های انقباضی روی فضاهای متری کلاسیک تعریف‌شده توسط سی‌آیریک‌اند. همچنین، هنگامی که از تکرار پیکارد برای تقریب نقاط‌ثابت در فضاهای نرم‌دار فازی استفاده می‌شود، عبارت‌های کاملی را برای قضایای نقطه‌ثابت سی‌آیریک، شامل تخمین‌هایی مربوط به خطای فازی به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: فضای نرم‌دار فازی، نقطه‌ثابت فازی، نقطه‌ثابت سی‌آیریک

رده‌بندی ریاضی: 46A32; 46M05

۱ مقدمه

چیترا و موردسون (Chitra and Mordeson) [۷] تعریفی از نرم فازی را ارائه نمودند. پس از آن مفهوم فضای نرم‌دار فازی به طرق مختلف توسط بگ و سامانتا (Bag and Samanta) در [۲، ۳]، معرفی و تعمیم داده شده است. علاوه بر این، نظریه نقطه‌ثابت در این نوع فضاها به‌شدت مورد مطالعه و به‌کار گرفته شده است. برای جزئیات می‌توان به بگ و سامانتا [۴]، محسنی‌الحسینی و همکاران مراجعه کرد [۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۷].

امروزه نقاط‌ثابت نقش مهمی در حوزه‌های مختلف ریاضیات و کاربردهای آن به‌ویژه در فیزیک ریاضی، معادلات دیفرانسیل، تئوری بازی‌ها و برنامه‌نویسی پویا ایفا می‌کنند (مراجعه شود به [۱، ۸، ۱۳]. ازآن‌جایی که ریاضیات فازی همراه با ریاضیات کلاسیک به‌طور مداوم در حال توسعه‌اند، نقطه‌ثابت فازی نیز می‌تواند نقش مهمی در نظریه فازی داشته باشد.

در این مقاله، با شروع از مقاله سی‌آیریک (Ciric) [۶]، برخی از نگاشت‌های انقباضی معروف شناخته‌شده در طبقه‌بندی رودس (Rhoades) [۱۵] را بر روی فضای متری فازی [۹] مطالعه می‌کنیم و برخی از نقاط‌ثابت تقریبی فازی این‌گونه نگاشت‌ها را ارائه می‌دهیم.

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: amah@vru.ac.ir (S. A. M Mohsenialhosseini), saheli@vru.ac.ir (M. Saheli), a.askari@vru.ac.ir (A. Askarizadeh)

۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

در این بخش به مرور مفاهیم و تعاریف و قضایای مورد نیاز در بخش‌های بعدی خواهیم پرداخت. ابتدا، ما مفهوم فضای متری فازی گسترش‌یافته [۹] را مرور خواهیم کرد.

تعریف **۱.۲**. [۹] فرض کنیم X مجموعه ناتهی، $M_\circ$ مجموعه فازی روی $X^۲ \times [\circ, +\infty)$ و $*$ t-نرم پیوسته باشد. سه‌تایی $(X, M_\circ, *)$ را فازی متری توسعه‌یافته گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $t, s \geq \circ$ در روابط زیر صدق کند:
$(F_{N۱})$: $M_\circ(x, y, t) > \circ$،
$(F_{N۲})$: $M_\circ(x, y, t) = ۱$ به‌ازای هر $t > \circ$، اگر و تنها اگر $x = y$،
$(F_{N۳})$: $M_\circ(x, y, t) = M_\circ(y, x, t)$،
$(F_{N۴})$: تابع $M_\circ(x, y, .) : [\circ, +\infty[\longrightarrow]\circ, ۱]$ پیوسته است،
$(F_{N۵})$: $M_\circ(x, y, t) * M_\circ(y, z, s) \leq M_\circ(x, z, t+s)$.

گاهی اوقات نیاز به شرط زیر می‌شود:
$(F_{N۶})$: $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = ۱$ به‌ازای هر $x, y \in X$.

قضیه **۲.۲**. [۹] فرض کنیم M مجموعه فازی روی $X^۲ \times (\circ, +\infty)$ باشد. مجموعه فازی $M_\circ$ را روی $X^۲ \times [\circ, +\infty)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_\circ(x, y, t) = \begin{cases} M(x, y, t) & x, y \in X,\ t > \circ, \\ \inf_{t>\circ} M(x, y, t) & x, y \in X,\ t = \circ. \end{cases}$$

آن‌گاه $(X, M_\circ, *)$ فازی متری توسعه‌یافته است اگر و تنها اگر M فضای فازی متریی باشد که $\inf_{t>\circ} M(x, y, t) > \circ$ به‌ازای هر $x, y \in X$.

تعریف **۳.۲**. [۹] فرض کنیم $(X, M, *)$ فازی متری توسعه‌یافته باشد.

(الف) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X را هم‌گرا گوییم هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x, t\right) = ۱, \qquad \forall t > \circ.$$

(ب) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X را کشی گوییم در صورتی‌که برای هر $\epsilon \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$ عدد طبیعی N وجود داشته باشد که $M\left(x_n, x_m, t\right) > ۱ - \epsilon$ برای هر $m > n \geq N$.

حال مشابه فضای متری فازی خواص زیر را برای فضای متری فازی توسعه‌یافته بیان می‌کنیم.

لم **۴.۲**. فرض کنیم $(X, M, *)$ فازی متری توسعه‌یافته باشد. در این صورت به‌ازای هر $x, y \in X$، تابع $M(x, y, .)$ غیرنزولی است.

لم **۵.۲**. فرض کنیم $(X, M, *)$ فازی متری توسعه‌یافته باشد، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در X باشند. اگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, y_n, t\right) = M(x, y, t), \qquad \forall t > \circ.$$

تعریف **۶.۲**. [۵] فرض کنیم X مجموعه، $x_\circ \in X$ و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت باشد. به‌ازای هر $n \geq ۱$، دنباله تکراری $x_n = f\left(x_{n-۱}\right)$، را دنباله‌ی تکراری پیکارد با مقدار اولیه $x_\circ$ می‌نامیم.

۳ تخمین های فازی برای قضایای نقاط ثابت سی‌آیریک

در این بخش، تخمین‌های خطا را برای دو قضیه مهم نقطه‌ثابت در فضاهای نرم‌دار فازی ارائه می‌دهیم. در ۱۹۷۱ الی ۱۹۹۰، سی‌آیریک [۶]، دسته‌ای از انقباضات تعمیم‌یافته را بررسی کرد که شامل انقباضات باناخ (Banach) و نگاشت‌هایی است که شرط کنان را برآورده می‌کند [۱۰]. هر دسته از این نگاشت‌ها به‌گونه‌ای است که می‌توانیم هر سه ویژگی خوب اصل انقباض باناخ را به‌دست آوریم. آن انقباضات تعمیم‌یافته را در فضای نرم‌دار فازی برای نقاط ثابت تقریبی اعمال می‌کنیم.

تعریف **۱.۳**. فرض کنیم (X, M, min) فازی متری توسعه‌یافته و $f : X \longrightarrow X$ تابع باشد. X را فضای $orbitally - f$ کامل گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، هر دنباله کشی $\{f^{n_i}(x)\}_{i\in N}$ در X هم‌گرا باشد.

تعریف **۲.۳**. فرض کنیم (X, M, min) فازی متری توسعه‌یافته باشد. نگاشت خود الحاق $f : X \longrightarrow X$ را $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in (۰, ۱)$، اعداد نامنفی $q_\alpha(x, y)$، $r_\alpha(x, y)$، $s_\alpha(x, y)$ و $w_\alpha(x, y)$ وجود داشته باشند که

$$\sup\{q_\alpha(x, y) + r_\alpha(x, y) + s_\alpha(x, y) + ۲w_\alpha(x, y)\} = \lambda_\alpha < ۱,$$

و برای هر $t_۱, \dots , t_۵ \geq ۰$،

$$M\left(f(x), f(y), q_\alpha(x, y)t_۱ + r_\alpha(x, y)t_۲ + s_\alpha(x, y)t_۳ + w_\alpha(x, y)(t_۴ + t_۵)\right) \geq \alpha,$$

زمانی که

$$\begin{gathered} M\left(x, y, t_۱\right) \geq \alpha, \quad M\left(x, f(x), t_۲\right) \geq \alpha, \quad M\left(f(y), y, t_۳\right) \geq \alpha, \\ M\left(f(x), y, t_۴\right) \geq \alpha, \qquad M\left(f(y), x, t_۵\right) \geq \alpha. \end{gathered}$$

در مثال زیر نشان می‌دهیم که نگاشت‌های $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی روی فضاهای متری (کلاسیک) روی بعضی از فضاهای متری فازی $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی می‌باشند؛ یعنی تعریف توسعه‌یافته انقباضی می‌باشند؛ به‌عبارتی دیگر تعریف ۲.۳ تعمیم تعریف $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی روی فضاهای متری (کلاسیک) است.

مثال **۳.۳**. فرض کنیم (X, d) فضای متری، $f : X \longrightarrow X$ تابعی باشد که به‌ازای هر $x, y \in X$، اعداد نامنفی $q(x, y)$، $r(x, y)$، $s(x, y)$ و $w(x, y)$ وجود دارند که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\sup\{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + ۲w(x, y)\} = \lambda < ۱,$$

و

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(y)\right) \leq & q(x, y)d(x, y) + r(x, y)d\left(f(x), x\right) + s(x, y)d\left(y, f(y)\right) \\ & + w(x, y)\left(d\left(x, f(y)\right) + d\left(f(x), y\right)\right). \end{aligned}$$

حال فضای متری توسعه‌یافته M را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{t}{۲d(x,y)} + \frac{۱}{۲}, & t < d\left(x, y\right), \\ ۱, & d\left(x, y\right) \leq t, \end{cases}$$

برای هر $x, y \in X$ و $t \geq ۰$.

حال نشان می‌دهیم f یک نگاشت λ-توسعه‌یافته انقباضی است. فرض کنیم $\alpha \in (۰, ۱)$، $x, y \in X$، $t_۱, \dots , t_۵ \geq ۰$ و

$$\begin{gathered} M(x, y, t_۱) \geq \alpha, \quad M\left(x, f(x), t_۲\right) \geq \alpha, \quad M\left(f(y), y, t_۳\right) \geq \alpha, \\ M\left(f(x), y, t_۴\right) \geq \alpha, \qquad M\left(f(y), x, t_۵\right) \geq \alpha. \end{gathered}$$

اگر $\alpha \in \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right)$، آن‌گاه

$$\frac{t_۱}{۲d\left(x,y\right)} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha, \quad \frac{t_۲}{۲d\left(f(x),x)\right)} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha, \quad \frac{t_۳}{۲d\left(f(y),y\right)} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha,$$
$$\frac{t_۴}{۲d\left(f(x),y\right)} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha, \qquad \frac{t_۵}{۲d\left(x,f(y)\right)} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha.$$

در این صورت

$$\frac{t_۱}{۲\alpha - ۱} \geq d\left(x,y\right), \quad \frac{t_۲}{۲\alpha - ۱} \geq d\left(f(x),x\right), \quad \frac{t_۳}{۲\alpha - ۱} \geq d\left(f(y),y\right),$$
$$\frac{t_۴}{۲\alpha - ۱} \geq d\left(f(x),y\right), \qquad \frac{t_۵}{۲\alpha - ۱} \geq d\left(x,f(y)\right).$$

لذا

$$\begin{aligned} d\left(f(x),f(y)\right) \leq & q(x,y)d(x,y) + r(x,y)d(f(x),x) + s(x,y)d(y,f(y)) \\ & + w(x,y)(d(x,f(y)) + d(f(x),y)) \\ \leq & \frac{q(x,y)t_۱ + r(x,y)t_۲ + s(x,y)t_۳ + w(x,y)(t_۴ + t_۵)}{۲\alpha - ۱}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{q(x,y)t_۱ + r(x,y)t_۲ + s(x,y)t_۳ + w(x,y)(t_۴ + t_۵)}{d\left(f(x),f(y)\right)} \geq ۲\alpha - ۱.$$

و لذا این نتیجه می‌دهد:

$$M\left(f(x), f(y), q(x,y)t_۱ + r(x,y)t_۲ + s(x,y)t_۳ + w(x,y)(t_۴ + t_۵)\right) \geq \alpha.$$

حال اگر $\alpha \in \left(\circ, \frac{۱}{۲}\right]$، آن‌گاه

$$M\left(f(x), f(y), q(x,y)t_۱ + r(x,y)t_۲ + s(x,y)t_۳ + w(x,y)(t_۴ + t_۵)\right) \geq \frac{۱}{۲} \geq \alpha.$$

بنابراین $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی است.

حال قضیه نقطه‌ثابت را برای توابع $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N۶})$ صدق کند و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی باشد. در این صورت f دارای یک نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد در X است، به‌علاوه به‌ازای هر $x_\circ$ در X دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_\circ$ به نقطه‌ثابت u از f هم‌گرا است.

اثبات. فرض کنیم $f : X \longrightarrow X$ نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی، $x_\circ \in X$ و $x_n = f(x_{n-۱})$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. ابتدا نشان خواهیم داد که $\{x_n\}$ دنباله کشی است. فرض کنیم $s > \circ$، $\alpha \in (\circ, ۱)$، $M\left(x_{n-۱}, x_n, t\right) \geq \alpha$ و

$$t' = \inf\{t \geq \circ : M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right) \geq \alpha\}.$$

آن‌گاه بنا به $(F_{N۴})$، $M\left(x_n, x_{n+۱}, t'\right) \geq \alpha$. بنا به $(F_{N۵})$ داریم:

$$M\left(x_{n-۱}, x_{n+۱}, t + t'\right) \geq \min\{M\left(x_n, x_{n+۱}, t'\right), M\left(x_{n-۱}, x_n, t\right)\} \geq \alpha.$$

از طرفی بنا به (F_{N2})،

$$M\left(x_n, x_n, \epsilon\right) = 1 \geq \alpha, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

چون f یک $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی است،

$$M(x_n, x_{n+1}, q_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + r_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + s_\alpha(x_{n-1}, x_n)t' + w_\alpha(x_{n-1}, x_n)(\epsilon + t + t')) \geq \alpha,$$

برای هر $\epsilon > 0$. بنابراین،

$$t' \leq q_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + r_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + s_\alpha(x_{n-1}, x_n)t' + w_\alpha(x_{n-1}, x_n)(\epsilon + t + t'), \qquad \forall \epsilon > 0.$$

وقتی $\epsilon \longrightarrow 0$ خواهیم داشت:

$$t' \leq q_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + r_\alpha(x_{n-1}, x_n)t + s_\alpha(x_{n-1}, x_n)t' + w_\alpha(x_{n-1}, x_n)(t + t').$$

درنتیجه

$$t' \leq \left[\frac{q_\alpha(x_{n-1}, x_n) + r_\alpha(x_{n-1}, x_n) + w_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{1 - s_\alpha(x_{n-1}, x_n) - w_\alpha(x_{n-1}, x_n)}\right] t.$$

چون

$$\frac{q_\alpha(x_{n-1}, x_n) + r_\alpha(x_{n-1}, x_n) + w_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{1 - s_\alpha(x_{n-1}, x_n) - w_\alpha(x_{n-1}, x_n)} \leq \lambda_\alpha,$$

می‌توان نتیجه گرفت که $t' \leq \lambda_\alpha t$. بنا به لم ۴.۲، خواهیم داشت:

$$M\left(x_n, x_{n+1}, \lambda_\alpha t\right) \geq \alpha.$$

حال بنا به (F_{N6})، $t_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $M\left(x_0, x_1, t_0\right) \geq \alpha$. درنتیجه $M\left(x_1, x_2, \lambda_\alpha t_0\right) \geq \alpha$. بنابراین با استفاده از استقرا می‌توان نتیجه گرفت که

$$M\left(x_n, x_{n+1}, \lambda_\alpha^n t_0\right) \geq \alpha, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

پس

$$\begin{aligned} M\left(x_n, x_m, \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_\alpha^k t_0\right) \geq \min\{&M\left(x_n, x_{n+1}, \lambda_\alpha^n t_0\right), M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \lambda_\alpha^{n+1} t_0\right), \\ &\ldots, M\left(x_{m-1}, x_m, \lambda_\alpha^{m-1} t_0\right)\} \geq \alpha, \end{aligned}$$

برای هر $m > n > 0$.

چون $\lambda_\alpha < 1$ پس $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_\alpha^k t_0$ همگرا است. بنابراین، $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{k=n}^{m-1} \lambda_\alpha^k t_0 \leq s, \qquad \forall m > n \geq N.$$

ازاین‌رو

$$M\left(x_n, x_m, s\right) \geq M\left(x_n, x_m, \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_\alpha^k t_0\right) \geq \alpha, \qquad \forall m > n \geq N.$$

لذا $\{x_n\}$ دنباله کشی است. با توجه به این‌که X فضای $orbitally-f$ کامل است $u \in X$ وجود دارد که

$$u = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

حال نشان می‌دهیم $f(u) = u$.

فرض کنیم $s > \circ$، $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ و $s\left(\frac{\text{۱}-\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha}\right) = t$. چون $\{x_n\}$ دنباله کشی است و

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = u,$$

یک $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\min\{M\left(x_{n+\text{۱}}, x_n, t\right), M\left(u, x_n, t\right)\} \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

حال فرض کنیم

$$t_n = \inf\{t \geq \circ : M\left(f(u), x_{n+\text{۱}}, t\right) \geq \alpha\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

بنا به $(F_{N\text{۴}})$، $M\left(f(u), x_{n+\text{۱}}, t_n\right) \geq \alpha$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. بنا به $(F_{N\text{۵}})$، خواهیم داشت:

$$M\left(u, f(u), t + t_n\right) \geq \min\{M\left(u, x_{n+\text{۱}}, t\right), M\left(x_{n+\text{۱}}, f(u), t_n\right)\} \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

چون f نگاشت $\lambda-$ توسعه‌یافته انقباضی است، پس

$$M\left(f(u), f(x_n), q_\alpha(u, x_n)t + r_\alpha(u, x_n)(t + t_n) + s_\alpha(u, x_n)t + w_\alpha(u, x_n)(\text{۲}t + t_n)\right) \geq \alpha,$$

به‌ازای هر $n \geq N$. بنابراین

$$M\left(f(u), f(x_n), \lambda_\alpha t + (r_\alpha(u, x_n) + w_\alpha(u, x_n))t_n\right) \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

لذا

$$t_n \leq \lambda_\alpha t + (r_\alpha(u, x_n) + w_\alpha(u, x_n))t_n \leq \lambda_\alpha(t + t_n), \qquad \forall n \geq N.$$

درنتیجه $t_n \leq \left(\frac{\lambda_\alpha}{\text{۱}-\lambda_\alpha}\right) t = s$ برای هر $n \geq N$. بنابراین

$$M\left(x_{n+\text{۱}}, f(u), s\right) = M\left(f(x_n), f(u), s\right) \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

پس $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(u)$. بنابراین $f(u) = u$.

حال نشان می‌دهیم f دارای نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد است. فرض کنیم f دارای نقاط‌ثابت u, v باشد، $s > \circ$، $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ و

$$t^\dagger = \inf\{t \geq \circ : M(u, v, t) \geq \alpha\}.$$

چون $f(u) = u$ و $f(v) = v$ پس، بنا به $(F_{N\text{۲}})$،

$$M\left(f(u), u, \epsilon\right) = \text{۱} = M\left(f(v), v, \epsilon\right), \qquad \forall \epsilon > \circ.$$

ازطرفی چون f نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی است لذا

$$M\left(u, v, q_\alpha(u, v)t^\dagger + r_\alpha(u, v)\epsilon + s_\alpha(u, v)\epsilon + w_\alpha(u, v)(\text{۲}t^\dagger)\right) =$$
$$M\left(f(u), f(v), q_\alpha(u, v)t^\dagger + r_\alpha(u, v)\epsilon + s_\alpha(u, v)\epsilon + w_\alpha(u, v)(\text{۲}t^\dagger)\right) \geq \alpha,$$

برای هر $\epsilon > \circ$. بنابراین

$$t^\dagger \leq q_\alpha(u, v)t^\dagger + r_\alpha(u, v)\epsilon + s_\alpha(u, v)\epsilon + w_\alpha(u, v)(\text{۲}t^\dagger), \qquad \forall \epsilon > \circ.$$

حال اگر $\epsilon \longrightarrow \circ$، آن‌گاه

$$t^\dagger \leq q_\alpha(u, v)t^\dagger + w_\alpha(u, v)(\text{۲}t^\dagger) \leq \lambda_\alpha t^\dagger.$$

درنتیجه $t^\dagger = \circ$. ازاین‌رو $M(u, v, t) \geq \alpha$ به‌ازای هر $t > \circ$ و هر $\alpha \in (\circ, \text{۱})$. پس $M(u, v, t) = \text{۱}$ به‌ازای هر $t > \circ$.
بنابراین بنا به $(F_{N\text{۲}})$، $u = v$. □

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N۶})$ صدق کند و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی باشد. به‌علاوه گیریم، $x_۰ \in X$ و دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_۰$ به نقطه‌ثابت u از f هم‌گرا باشد. آن‌گاه

$$M\left(x_n, u, \lambda_\alpha^n t\right) \geq M\left(x_n, u, \frac{\lambda_\alpha^n t}{۱ - \lambda_\alpha}\right) \geq \alpha,$$

که در آن $M(x_۰, x_۱, t) \geq \alpha$.

اثبات. فرض کنیم $M(x_۰, x_۱, t) \geq \alpha$. بنا به اثبات قضیه ۴.۳ داریم:

$$M\left(x_n, x_m, \frac{\lambda_\alpha^n t}{۱ - \lambda_\alpha}\right) \geq M\left(x_n, x_m, \sum_{k=n}^{m-۱} \lambda_\alpha^k t\right) \geq \alpha, \ \forall m > n > ۰.$$

فرض کنیم $\epsilon > ۰$. چون $\lim_{m\to\infty} x_m = u$ لذا $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $M\left(x_m, u, \epsilon\right) \geq \alpha$ برای هر $m \geq N$. بنابراین

$$M\left(x_n, u, \frac{\lambda_\alpha^n t}{۱ - \lambda_\alpha} + \epsilon\right) \geq \min\{M\left(x_n, x_m, \frac{\lambda_\alpha^n t}{۱ - \lambda_\alpha}\right), M\left(u, x_m, \epsilon\right)\} \geq \alpha,$$

برای هر $m \geq N$ و $m > n > ۰$. حال اگر $\epsilon \longrightarrow ۰$، آن‌گاه

$$M\left(x_n, u, \frac{\lambda_\alpha^n t}{۱ - \lambda_\alpha}\right) \geq \alpha, \qquad \forall n > ۰.$$

□

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N۶})$ صدق کند، $f : X \longrightarrow X$ نگاشت، k عدد صحیح مثبتی باشد که f^k، $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی و $n \equiv r \pmod{k}$ $(۱ \leq r \leq k - ۱)$. علاوه بر این فرض کنیم $x_۰ \in X$ و دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_۰$ به نقطه‌ثابت u از f^k هم‌گرا باشد. در این صورت

$$M\left(f^n(x_۰), u, \lambda_\alpha^{\frac{n}{k-۱}} t\right) \geq \alpha,$$

که در آن $M\left(f^r(x_۰), f^{r+k}(x_۰), t\right) \geq \alpha$.

اثبات. فرض کنیم $M\left(x_r, x_{r+k}, t\right) \geq \alpha$ و $n \equiv r \pmod{k}$ $(۱ \leq r \leq k - ۱)$؛ یعنی $n = mk + r$. لذا بنا به نتیجه ۵.۳،

$$\begin{aligned} M\left(x_n, u, \lambda_\alpha^{\frac{n}{k-۱}} t\right) &= M\left(x_{mk+r}, u, \lambda_\alpha^{\frac{mk+r-k}{k}} t\right) \\ &\geq M\left(x_{mk+r}, u, \lambda_\alpha^{\frac{mk+r-r}{k}} t\right) \\ &\geq M\left(x_{mk+r}, u, \lambda_\alpha^m t\right) \\ &= M\left(f^{mk}\left(f^r(x_۰)\right), u, \lambda_\alpha^m t\right) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N۶})$ صدق کند، $f : X \longrightarrow X$ نگاشت و k یک عدد صحیح مثبت باشد که f^k، $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی باشد. در این صورت f دارای یک نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد در X است. به‌علاوه به‌ازای هر $x_۰$ در X دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_۰$ به نقطه ثابت u از f هم‌گرا است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. فرض کنیم $s > \circ$، $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ و

$$t_r = \inf\{t \geq \circ : M\left(x_r, x_{r+k}, t\right) \geq \alpha\}, \qquad \forall \text{۱} \leq r \leq k - \text{۱}.$$

در این صورت بنا به $(F_{N\text{۴}})$ داریم $M\left(x_r, x_{r+k}, t_r\right) \geq \alpha$. حال فرض کنیم

$$t' = \max\{t_r : \text{۱} \leq r \leq k - \text{۱}\}.$$

بنا بر لم ۴.۲، $M\left(x_r, x_{r+k}, t'\right) \geq \alpha$ به‌ازای هر $\text{۱} \leq r \leq k - \text{۱}$. پس، بنا به قضیه ۶.۳ می‌توان به نتیجه زیر دست یافت:

$$M\left(x_n, u, \lambda_\alpha^{\frac{n}{k-\text{۱}}} t'\right) \geq \alpha, \qquad \forall n > k.$$

از $\lambda_\alpha < \text{۱}$ می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{n\to\infty} \lambda_\alpha^{\frac{n}{k-\text{۱}}} t' = \circ$. ازاین‌رو $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\lambda_\alpha^{\frac{n}{k-\text{۱}}} t' \leq s$ برای هر $n \geq N$. بنابراین $M(x_n, u, s) \geq \alpha$ به‌ازای هر $n > N + k$. لذا $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

چون f^k، $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی است، بنا به قضیه ۴.۳ دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه شروع $x_\circ$ هم‌گرا به نقطه ثابت u از f^k است. پس $f^k(u) = u$. درنتیجه $f^k(f(u)) = f(f^k(u)) = f(u)$. چون f^k دارای یک نقطه منحصربه‌فرد در X است می‌توان نتیجه گرفت که $f(u) = u$.

حال نشان می‌دهیم f دارای نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد است. فرض کنیم f دارای نقاط ثابت u, v باشد، لذا $f(u) = u$ و $f(v) = v$. بنابراین بنا بر استقرا $f^k(u) = u$ و $f^k(v) = v$. چون f^k دارای یک نقطه منحصربه‌فرد در X است، پس $u = v$. □

قضیه ۸.۳ فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N\text{۶}})$ صدق کند، $f : X \longrightarrow X$ نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی، $x_\circ \in X$ و

$$M\left(x_\circ, f(x_\circ), (\text{۱} - \lambda_\alpha)r\right) \geq \alpha.$$

در این صورت به‌ازای هر $\alpha \in (\circ, \text{۱})$، نگاشت f دارای یک نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد در

$$B = \{x \in x : M(x_\circ, x, r) \geq \alpha\},$$

است. به‌علاوه به‌ازای هر $x_\circ$ در X دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_\circ$ به نقطه‌ثابت u از f هم‌گرا است.

اثبات. چون $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally - f$ کامل بوده که در خاصیت $(F_{N\text{۶}})$ صدق کند و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی است، لذا بنا به قضیه ۴.۳ دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین $x_\circ$ به نقطه‌ثابت u از X هم‌گرا است. حال با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که $x_n \in B$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. با توجه به این‌که $\lambda_\alpha < \text{۱}$ به‌ازای هر $\alpha \in (\circ, \text{۱})$، بنابراین

$$M\left(x_\circ, x_\text{۱}, r\right) \geq M\left(x_\circ, x_\text{۱}, (\text{۱} - \lambda_\alpha)r\right) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (\circ, \text{۱}).$$

پس $x_\text{۱} \in B$. با این فرض که $x_\circ, x_\text{۱}, \ldots, x_n \in B$، چون

$$M\left(x_\circ, x_\text{۱}, (\text{۱} - \lambda_\alpha)r\right) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (\circ, \text{۱}),$$

ازاین‌رو بنا به اثبات نتیجه ۵.۳ داریم:

$$M\left(x_\circ, x_{n+\text{۱}}, r\right) = M\left(x_\circ, x_{n+\text{۱}}, \frac{(\text{۱} - \lambda_\alpha)r}{\text{۱} - \lambda_\alpha}\right) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (\circ, \text{۱}).$$

بنابراین $x_{n+\text{۱}} \in B$ و درنتیجه $\{x_n\} \subseteq B$.

حال فرض کنیم $\epsilon > \circ$ و $\alpha \in (\circ, \text{۱})$. چون $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ لذا یک $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $M\left(u, x_n, \epsilon\right) \geq \alpha$ به‌ازای هر $n \geq N$. بنابراین

$$M\left(x_\circ, u, r + \epsilon\right) \geq \min\{M\left(x_\circ, x_n, r\right), M\left(u, x_n, \epsilon\right)\} \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

وقتی $\epsilon \longrightarrow \circ$، برای هر $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ داریم: $M\left(x_\circ, u, r\right) \geq \alpha$. بنابراین $u \in B$. □

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $orbitally-f$ کامل بوده که در خاصیت (F_{N6}) صدق کند، $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی، $x_0 \in X$ و

$$M(x_0, f(x_0), (1-\lambda_\alpha)r) \geq \alpha.$$

به‌علاوه به‌ازای هر x_0 در X دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین x_0 به نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد u از f هم‌گرا باشد. در این صورت

$$M(x_n, u, \lambda_\alpha^n r) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (0, 1).$$

اثبات. فرض کنیم $\alpha \in (0, 1)$. چون

$$M(x_0, x_1, (1-\lambda_\alpha)r) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (0, 1).$$

پس بنا به اثبات نتیجه ۵.۳،

$$M(x_n, x_m, \lambda_\alpha^n r) = M\left(x_n, x_m, \frac{(1-\lambda_\alpha)\lambda_\alpha^n r}{1-\lambda_\alpha}\right) \geq \alpha, \qquad \forall m > n > 0.$$

حال فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\lim_{n\to\infty} x_n = u$، لذا یک $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$M(u, x_m, \epsilon) \geq \alpha, \qquad \forall m \geq N.$$

بنابراین

$$M(x_n, u, \lambda_\alpha^n r + \epsilon) \geq \min\{M(x_m, x_n, \lambda_\alpha^n r), M(u, x_m, \epsilon)\} \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

وقتی $\epsilon \longrightarrow 0$، برای هر $\alpha \in (0, 1)$ داریم: $M(x_n, u, \lambda_\alpha^n r) \geq \alpha$. □

تعریف ۱۰.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow X$ را به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته گوییم در صورتی‌که به‌ازای هر $\alpha \in (0, 1)$، $\varepsilon_\alpha > 0$ و برای هر $x, y \in X$، اعداد نامنفی $q_\alpha(x, y)$، $r_\alpha(x, y)$، $s_\alpha(x, y)$ و $w_\alpha(x, y)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\sup\{q_\alpha(x, y) + r_\alpha(x, y) + s_\alpha(x, y) + 2w_\alpha(x, y)\} = \lambda_\alpha < 1,$$

و برای هر $t_1, \ldots, t_5 \geq 0$،

$$M(f(x), f(y), q_\alpha(x, y)t_1 + r_\alpha(x, y)t_2 + s_\alpha(x, y)t_3 + w_\alpha(x, y)(t_4 + t_5)) \geq \alpha,$$

زمانی که

$$\begin{gathered} M(x, y, t_1) \geq \alpha, \quad M(x, f(x), t_2) \geq \alpha, \quad M(f(y), y, t_3) \geq \alpha, \\ M(f(x), y, t_4) \geq \alpha, \quad M(f(y), x, t_5) \geq \alpha, \quad t_1 \leq \varepsilon_\alpha. \end{gathered}$$

در مثال زیر نشان می‌دهیم که نگاشت‌های به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته روی فضاهای متری (کلاسیک) به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته روی بعضی از فضاهای متری فازی‌اند؛ یعنی تعریف ۱۰.۳ تعمیم تعریف به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته روی فضاهای متری (کلاسیک) است.

مثال ۱۱.۳. فرض کنیم (X, d) فضای متری، $\varepsilon > 0$ و $f : X \longrightarrow X$ تابعی باشد که به‌ازای هر $x, y \in X$، اعداد نامنفی $q(x, y)$، $r(x, y)$، $s(x, y)$ و $w(x, y)$ وجود دارند که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\sup\{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + 2w(x, y)\} = \lambda < 1,$$

و

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq q(x,y)d(x,y) + r(x,y)d(f(x),x) + s(x,y)d(y,f(y)) + w(x,y)(d(x,f(y)) + d(f(x),y)),$$

برای هر $d(x,y) < \varepsilon$.

فضای متری توسعه‌یافته M را برای هر $x, y \in X$ و $t \geq 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{t}{2d(x,y)} + \frac{1}{2}, & t < d\left(x,y\right), \\ 1, & d\left(x,y\right) \leq t. \end{cases}$$

حال نشان می‌دهیم f نگاشت به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته است. فرض کنیم $\alpha \in (0, 1)$ و

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} \frac{(2\alpha-1)\varepsilon}{2}, & \alpha \in (\frac{1}{2}, 1), \\ \varepsilon, & o.w.. \end{cases}$$

حال فرض کنیم $x, y \in X$، $t_1, \ldots, t_5 \geq 0$ و

$$M(x,y,t_1) \geq \alpha, \quad M(x,f(x),t_2) \geq \alpha, \quad M(f(y),y,t_3) \geq \alpha, \quad M(f(x),y,t_4) \geq \alpha, \qquad M(f(y),x,t_5) \geq \alpha.$$

اگر $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$، آن‌گاه

$$\frac{t_1}{2d\left(x,y\right)} + \frac{1}{2} \geq \alpha, \quad \frac{t_2}{2d\left(f(x),x\right)} + \frac{1}{2} \geq \alpha, \quad \frac{t_3}{2d\left(f(y),y\right)} + \frac{1}{2} \geq \alpha, \quad \frac{t_4}{2d\left(f(x),y\right)} + \frac{1}{2} \geq \alpha, \qquad \frac{t_5}{2d\left(x,f(y)\right)} + \frac{1}{2} \geq \alpha.$$

در این صورت

$$\frac{t_1}{2\alpha - 1} \geq d\left(x,y\right), \quad \frac{t_2}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(x),x\right), \quad \frac{t_3}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(y),y\right), \quad \frac{t_4}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(x),y\right), \qquad \frac{t_5}{2\alpha - 1} \geq d\left(x,f(y)\right).$$

پس

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon_\alpha}{2\alpha - 1} \geq \frac{t_1}{2\alpha - 1} \geq d\left(x,y\right), \qquad \frac{t_2}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(x),x\right), \quad \frac{t_3}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(y),y\right), \quad \frac{t_4}{2\alpha - 1} \geq d\left(f(x),y\right), \quad \frac{t_5}{2\alpha - 1} \geq d\left(x,f(y)\right).$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(y)\right) \leq & q(x,y)d(x,y) + r(x,y)d(f(x),x) + s(x,y)d(y,f(y)) \\ & + w(x,y)(d(x,f(y)) + d(f(x),y)) \\ \leq & \frac{q(x,y)t_1 + r(x,y)t_2 + s(x,y)t_3 + w(x,y)(t_4 + t_5)}{2\alpha - 1}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{q(x,y)t_1 + r(x,y)t_2 + s(x,y)t_3 + w(x,y)(t_4 + t_5)}{d\left(f(x), f(y)\right)} \geq 2\alpha - 1.$$

و لذا این نتیجه می‌دهد:

$$M\left(f(x), f(y), q(x,y)t_1 + r(x,y)t_2 + s(x,y)t_3 + w(x,y)(t_4 + t_5)\right) \geq \alpha.$$

حال اگر $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$، آن‌گاه

$$M\left(f(x), f(y), q(x,y)t_1 + r(x,y)t_2 + s(x,y)t_3 + w(x,y)(t_4+t_5)\right) \geq \frac{1}{2} \geq \alpha.$$

بنابراین $f : X \longrightarrow X$ نگاشت به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته است.

حال قضیه نقطه ثابت را برای توابع (ε, λ)-توسعه‌یافته انقباضی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم $(X, M, \min)$ فضای فازی متری توسعه‌یافته $f - orbitally$ کامل بوده و نگاشت $f : X \longrightarrow X$ به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته باشد. در این صورت برای هر $x \in X$، یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

(الف) $\alpha_0 \in (0, 1)$ وجود دارد که

$$M\left(x_m, x_{m+1}, \varepsilon_{\alpha_0}\right) < \alpha_0, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

(ب) به‌ازای هر x_0 در X، دنباله تکراری پیکارد $\{x_n\}$ با نقطه آغازین x_0 به نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد u از f هم‌گرا است.

اثبات. فرض کنیم برای هر $\alpha \in (0, 1)$ عدد $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود دارد که

$$M\left(x_{m_\alpha}, x_{m_\alpha+1}, \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha.$$

فرض کنیم $s > 0$. چون $f : X \longrightarrow X$ نگاشت به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته است، مشابه اثبات قضیه ۴.۳،

$$M\left(x_{m_\alpha+1}, x_{m_\alpha+2}, \lambda_\alpha \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha, \qquad \forall \alpha \in (0, 1).$$

با استفاده از استقرا می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$M\left(x_{m_\alpha+p}, x_{m_\alpha+p+1}, \lambda_\alpha^p \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha,$$

برای هر $\alpha \in (0, 1)$ و $p \in \mathbb{N}$. بنابراین مشابه اثبات قضیه ۴.۳ داریم:

$$M\left(x_n, x_{n+p}, \sum_{k=n-m_\alpha}^{n-m_\alpha+p-1} \lambda_\alpha^k \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha, \qquad \forall n > m_\alpha.$$

چون $\lambda_\alpha < 1$، پس $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_\alpha^k \varepsilon_\alpha$ همگراست، $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\sum_{k=n}^{m-1} \lambda_\alpha^k \varepsilon_\alpha \leq s$ به‌ازای هر $m > n \geq N$. بنابراین

$$M\left(x_n, x_{n+p}, s\right) \geq M\left(x_n, x_{n+p}, \sum_{k=n-m_\alpha}^{n-m_\alpha+p-1} \lambda_\alpha^k \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N + m_\alpha.$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که دنباله $\{x_n\}$ دنباله کشی است. حال چون X، $f - orbitally$ کامل است، $u \in X$ وجود دارد که

$$u = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

حال نشان می‌دهیم $f(u) = u$. فرض کنیم $s > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$. برای هر $n > m_\alpha$، داریم:

$$M\left(x_n, x_{n+p}, \frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha} \varepsilon_\alpha}{1 - \lambda_\alpha}\right) \geq M\left(x_n, x_{n+p}, \sum_{k=n-m_\alpha}^{n-m_\alpha+p-1} \lambda_\alpha^k \varepsilon_\alpha\right) \geq \alpha.$$

فرض کنیم که

$$\circ < \epsilon \le \min\{\frac{(۱-\lambda_\alpha)s}{۲\lambda_\alpha}, \frac{\varepsilon_\alpha}{۲}\}.$$

چون $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} = \circ,$$

لذا $N > m_\alpha$ وجود دارد که $M(u, x_n, \epsilon) \ge \alpha$ و

$$\frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} \le \min\{\frac{(۱-\lambda_\alpha)s}{۲\lambda_\alpha}, \frac{\varepsilon_\alpha}{۲}\}, \qquad \forall n \ge N$$

حال فرض کنیم

$$t_n = \inf\{t \ge \circ : M(f(u), x_{n+۱}, t) \ge \alpha\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

بنا به $(F_{N۴})$،

$$M(f(u), x_{n+۱}, t_n) \ge \alpha, \qquad \forall n \ge N.$$

بنا به $(F_{N۵})$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M\left(u, f(u), \frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + \epsilon + t_n\right) \ge& \min\{M\left(u, x_{n+۱}, \frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + \epsilon\right), M(x_{n+۱}, f(u), t_n)\} \\ \ge& \alpha, \end{aligned}$$

برای هر $n \ge N$. چون نگاشت $f : X \longrightarrow X$ به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته است، لذا به‌ازای هر $n \ge N$ داریم:

$$M\left(f(u), f(x_n), q_\alpha(u, x_n)v_\alpha + r_\alpha(u, x_n)(v_\alpha + t_n) + s_\alpha(u, x_n)v_\alpha + w_\alpha(u, x_n)(۲v_\alpha + t_n)\right) \ge \alpha,$$

که در آن

$$v_\alpha = \frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + \epsilon.$$

بنابراین

$$M\left(f(u), f(x_n), \lambda_\alpha\left(\frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + \epsilon\right) + (r_\alpha(u, x_n) + w_\alpha(u, x_n))t_n\right) \ge \alpha, \qquad \forall n \ge N.$$

پس

$$\begin{aligned} t_n \le& \lambda_\alpha\left(\frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + (۱-\lambda_\alpha)\epsilon\right) + (r_\alpha(u, x_n) + w_\alpha(u, x_n))t_n \\ \le& \lambda_\alpha\left(\frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha} + \epsilon + t_n\right), \end{aligned}$$

به‌ازای هر $n \ge N$. از این‌رو

$$t_n \le \left(\frac{\lambda_\alpha}{۱-\lambda_\alpha}\right)\left(\frac{\lambda_\alpha^{n-m_\alpha}\varepsilon_\alpha}{۱-\lambda_\alpha}\right) + \epsilon \le s, \qquad \forall n \ge N.$$

درنتیجه

$$M\left(x_{n+1}, f(u), s\right) = M\left(f(x_n), f(u), s\right) \geq \alpha, \qquad \forall n \geq N.$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(u)$. پس $f(u) = u$.

حال نشان می‌دهیم f دارای نقطه‌ثابت منحصربه‌فرد است. فرض کنیم f دارای نقاط ثابت u, v باشد، $s > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$. حال فرض کنیم

$$t^\dagger = \inf\{t \geq 0 : M(u, v, t) \geq \alpha\}.$$

چون $f(u) = u$ و $f(v) = v$، پس بنا به (F_{N2})،

$$M\left(f(u), u, \epsilon\right) = 1 = M\left(f(v), v, \epsilon\right), \qquad \forall 0 < \epsilon \leq \varepsilon_\alpha.$$

چون نگاشت $f : X \longrightarrow X$ به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته است، لذا

$$\begin{aligned} M\left(u, v, q_\alpha(u,v)t^\dagger + r_\alpha(u,v)\epsilon + s_\alpha(u,v)\epsilon + w_\alpha(u,v)(2t^\dagger)\right) &= \\ M\left(f(u), f(v), q_\alpha(u,v)t^\dagger + r_\alpha(u,v)\epsilon + s_\alpha(u,v)\epsilon + w_\alpha(u,v)(2t^\dagger)\right) &\geq \alpha, \end{aligned}$$

به‌ازای هر $\epsilon > 0$. بنابراین

$$t^\dagger \leq q_\alpha(u,v)t^\dagger + r_\alpha(u,v)\epsilon + s_\alpha(u,v)\epsilon + w_\alpha(u,v)(2t^\dagger), \qquad \forall \epsilon > 0.$$

وقتی $\epsilon \longrightarrow 0$، خواهیم داشت:

$$t^\dagger \leq q_\alpha(u,v)t^\dagger + w_\alpha(u,v)(2t^\dagger) \leq \lambda_\alpha t^\dagger.$$

لذا $t^\dagger = 0$. درنتیجه $M(u, v, t) \geq \alpha$ برای هر $t > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$. پس $M(u, v, t) = 1$ به‌ازای هر $t > 0$. بنابراین $u = v$. □

۴ نتیجه‌گیری

امروزه نظریه نقطه‌ثابت در زمینه‌های مختلف ریاضیات و کاربردهای آن به‌ویژه در فیزیک، معادلات دیفرانسیل، نظریه بازی‌ها و برنامه‌نویسی پویا نقش مهمی ایفا می‌کند. از آن‌جایی که ریاضیات و فیزیک فازی به‌همراه ریاضیات کلاسیک به‌طور مداوم در حال توسعه‌اند، نوع فازی نقطه‌ثابت نیز می‌تواند نقش مهمی در ریاضیات و فیزیک فازی داشته باشد. ما فکر می‌کنیم که این مقاله می‌تواند برای محققانی که در زمینه نظریه نقطه‌ثابت تقریبی فازی کار می‌کنند، جالب باشد. ما در اینجا توابع $\lambda-$توسعه‌یافته انقباضی و به‌طور موضعی (ε, λ)-یکنواخت انقباضی توسعه‌یافته را روی فضاهای متری فازی تعریف کرده و قضایای نقطه‌ثابت را برای این توابع مورد بررسی قرار داده‌ایم.

فهرست منابع

[1] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev. **18** (2) (1976) 620–709.

[2] T. Bag, S.K. Samanta, Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, J. Fuzzy Math. **11** (3) (2003) 687–705.

[3] T. Bag, S.K. Samanta, Fuzzy bounded linear operators, Fuzzy Sets and Systems **151** (3) (2005) 513–547.

[4] T. Bag, S.K. Samanta, Some fixed point theorems in fuzzy normed linear spaces, Information Sciences **177** (2007) 3271–3289.

[5] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[6] Lj.B. Ciric, Generalized contractions and fixed point theorem, Publ. Inst. Math. **12** (1971) 19–26.

[7] A. Chitra, P.V. Mordeson, Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces, Bull. Cal. Math. Soc. **74** (1969) 660–665.

[8] J. Franklin, *Methods of Mathematical Economics*, Springer Verlag, New York, 1980.

[9] V. Gregori, J.-J. Mi$\tilde{n}$ana, D. Miravet, Extended fuzzy metrics and fixed point theorems, Mathematics **7** (3) (2019), Article 303.

[10] R. Kannan, On certain sets and fixed-point theorems, Roum. Math. pure appl. **14** (1969) 51–54.

[11] S.A.M. Mohsenalhosseini, H. Mazaheri, Approximate fixed point theorems in fuzzy norm spaces for an operator, Advances in Fuzzy Systems Volume 2013, Article ID 613604, 8 pages.

[12] S.A.M. Mohsenalhosseini, H. Mazaheri, M.A. Dehghan, Approximate fixed point in fuzzy normed spaces for nonlinear maps, Iranin Journal of Fuzzy Systems **10** (1) (2013) 135–142.

[13] H.K. Pathak, N. Hussain, Common fixed points for Banach pairs with applications, Non-linear Anal. **69** (2008) 2788–2802.

[14] Sh. Rezapour, M.E. Samei, Some fixed point results for α-ψ-contractive type mappings on intuitionistic fuzzy metric spaces, Journal of Advanced Mathematical Studies **7** (1) (2014) 176-–178.

[15] B.E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977) 257–290.

[16] M.E. Samei, Convergence of an iterative scheme for multifunctions on fuzzy metric spaces, Sahand Communications in Mathematical Analysis **15** (1) (2019) 91-–106.

[17] M.E. Samei, Some fixed point results on intuitionistic fuzzy metric spaces with a graph, Sahand Communications in Mathematical Analysis **13** (1) (2019) 141-–152.

Fuzzy Estimates for Cairic's fixed point theorems

S.A.M Mohsenialhosseini [†] **, M. Saheli, A. Askarizadeh**

Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

Communicated by: M. Namdari

Received: 2022/11/25 Accepted: 2023/6/23

Abstract: In this paper, we investigate the estimation of fixed point errors for two important fixed point theorems of quasi-contractive mappings in fuzzy norm spaces. For this purpose, we define $\lambda-$generalized contraction and $(\varepsilon,\lambda)-$uniformly generalized contraction functions on fuzzy metric spaces and show that these definition are generalization of contractive functions defined by Ćirić on classical metric space. Also, when Picard's iteration is used to approximate fixed points in fuzzy norm spaces, we obtain complete expressions for Ćirić's fixed point theorems, including estimates of the fuzzy error.

Keywords: Fuzzy norm spaces, Fuzzy fixed points, Ćirić's fixed point

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: amah@vru.ac.ir (S.A.M. Mohsenialhosseini), saheli@vru.ac.ir (M. Saheli), a.askari@vru.ac.ir (A. Askarizadeh).