



انشعاب هاپف در یک مدل شکار-شکارچی فضائی با پاسخ تابعی ریشه دوم برای شکارچی

رسول کاظمی^۱ و رسول عاشقی^۲ *

(^۱) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
(^۲) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

دبیر مسئول: فاطمه هلن قانع

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۶/۳

چکیده: در این مقاله، یک مدل شکار-شکارچی انتشار را، که در آن جمعیت شکار به صورت گروهی زندگی می‌کنند و رفتار اجتماعی دارند، در نظر گرفته و امکان وقوع انشعاب هاپف و وجود منیفلد مرکزی را ثابت می‌کنیم. تجزیه و تحلیل پایداری خطی نشان می‌دهد که یک انشعاب هاپف در دستگاه همگن متناظر رخ می‌دهد. در مرحله بعد، تأثیر پارامترهای انتشار بر دینامیک همگن را مطالعه می‌کنیم. با انتخاب یک پارامتر انشعاب مناسب، ثابت می‌کنیم که یک انشعاب هاپف در دستگاه ناهمگن رخ می‌دهد. فرم نرمال این انشعاب را تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم و جهت انشعاب هاپف را به دست می‌آوریم. در پایان، شبیه‌سازی‌های عددی را برای تصدیق یافته‌های تحلیلی خود ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انشعاب هاپف، انتشار فضایی، مدل شکار-شکارچی، پاسخ تابعی.

رده‌بندی ریاضی: 34A34; 34C23; 92D25

۱ مقدمه و نتایج اصلی

مدل شکار-شکارچی، که اولین بار توسط لُتکا [۱۲] و وُلتررا [۱۸] پیشنهاد شد، یکی از ابزارهای ضروری در بوم‌شناسی جمعیت است. بوم‌شناسی جمعیت یکی از زیرشاخه‌های بوم‌شناسی است که به پویایی گونه‌های جمعیت و چگونگی تعامل آن‌ها با محیط زیست می‌پردازد. در واقع، بوم‌شناسی جمعیت، دانشی است که به مدل‌سازی رشد جمعیت‌های چندگونه‌ای و مطالعه‌ی اندازه‌ی جمعیت یک‌گونه در طول زمان و مکان اشاره دارد. بنابراین، رابطه‌ی بین گونه‌های مختلف و محیط زندگی آن‌ها یکی از ویژگی‌های اصلی در دستگاه‌های بوم‌شناسی است. تعاملات شکار-شکارچی در دنیای واقعی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی توصیف کرد. معرفی مدل‌های ریاضی می‌تواند ابزار مناسبی برای درک بهتر دینامیک تعاملات بین شکار و شکارچی در یک محیط واقعی باشد.

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (R. Asheghi) r.asheghi@iut.ac.ir (R. Kazemi), r.kazemi@kashanu.ac.ir

در پژوهش‌های اولیه‌ی لُتْکا و وُلْتِرا، و همچنین در مدل‌های کلاسیک شکار-شکارچی، فرض اصلی براساس تعاملات یک‌به‌یک بین گونه‌های شکار و شکارچی است و نیز مطالعات اولیه به بررسی رفتار خاصی از جمعیت می‌پردازد. در سال‌های بعد، مدل شکار-شکارچی، توسط بسیاری از محققان گسترش یافت تا یک مدل واقعی‌تر به دست آید. هر موقع که مدل‌ها اصلاح شده‌اند، پیچیده‌تر هم شده‌اند تا عوامل بیش‌تری را که در دستگاه‌های شکار-شکارچی واقعی یافت می‌شوند، دربرگیرند. تعامل بین دو گونه را می‌توان به چند نوع تقسیم کرد. به عنوان مثال، انواع هالینگ $I - III$ ، نوع کرولی-مارتین[‡]، نوع بدینگتون-دی‌انجلاز[§] و نوع هاسل-وارلی[¶].

ایده‌ی اولیه‌ی دفاع گروهی ابتدا در [۳] و [۴] در رابطه با برهم‌کنش دو گونه ارائه شد که در آن اعضای یک گونه در گله دورهم جمع می‌شوند، در حالی که اعضای گونه‌ی دیگر رفتار فردگرایانه‌تری از خود نشان می‌دهند. البته این ایده، بعدها برای مدل‌سازی جوامع در معرض یک بیماری به کار گرفته شد. در [۱۶]، این ایده‌ها به دستگاه‌های مدل‌کننده‌ی بیماری‌های مسری نیز تعمیم داده شده است. مدل ارائه‌شده در [۱۶]، ویژگی دفاع گروهی شکار را که در [۳] و [۴] ارائه شده است، دارد و همچنین تعاملات جمعیتی بین دو گونه که در آن‌ها بیماری از طریق تماس گسترش می‌یابد، نیز در نظر گرفته شده است. فرض اصلی این است که جمعیت شکار، مشابه آن چه در [۴] بررسی شده، با هم و به صورت دسته‌جمعی می‌چرند و همه‌گیری در بین شکار رخ می‌دهد. به علاوه، فرض شده است که این بیماری از نوع SI است؛ یعنی هیچ‌گونه بهبودی وجود ندارد؛ به این معنی که وقتی فردی مبتلا می‌شود، بیماری را تا پایان عمر دارد. اگر جمعیت شکار سالم را با \hat{R} جمعیت شکار آلوده به بیماری را با \hat{I} و جمعیت شکارچی را با \hat{F} نشان دهیم، آن‌گاه مدل پیش‌نهادی در [۱۶] به صورت

$$\begin{cases} \frac{d\hat{R}}{dt} = r\hat{R}\left(1 - \frac{\hat{R}}{K}\right) - \lambda\hat{R}\hat{I} - a\sqrt{\hat{R}\hat{F}}, \\ \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{I}(\lambda\hat{R} - b\hat{F} - \hat{\mu}), \\ \frac{d\hat{F}}{dt} = \hat{F}(a\hat{e}\sqrt{\hat{R}} + b\hat{e}\hat{I} - \hat{m}) \end{cases}$$

است که در آن $\hat{\mu}$ مجموع نرخ مرگ‌ومیر طبیعی و نرخ مرگ‌ومیر ناشی از بیماری را نشان می‌دهد. توجه کنیم که اولین عبارت در معادله‌ی اول رشد لجستیک شکار، دومین عبارت نرخ شیوع بیماری و سومین عبارت نرخ شکار از میان جمعیت سالم را توصیف می‌کند. معادله‌ی دوم، دینامیک جمعیت بیمار و معادله‌ی سوم، دینامیک جمعیت شکارچی را توصیف می‌کند که در آن \hat{m} نشان‌دهنده‌ی نرخ مرگ‌ومیر طبیعی است. ایده‌ی اصلی در ساخت مدل فوق این است که جمعیت شکار به صورت گروهی زندگی می‌کنند و رفتار اجتماعی دارند. در واقع، شکار در دسته‌های عظیمی دورهم جمع می‌شوند و قوی‌ترین آن‌ها در مرز گله و ضعیف‌ترین‌ها در وسط گله قرار می‌گیرند. بنابراین، شکار طعمه توسط یک شکارچی موفق، عمدتاً در مرز گله؛ یعنی بیرونی‌ترین موقعیت در گله؛ اتفاق می‌افتد. پس دور از ذهن نیست که فرض کنیم گونه‌ی شکارچی فقط در مرز گله شکار می‌کند. در این حالت همان‌طور که در [۳] و [۴] بیان شده است، اگر شکار در یک ناحیه‌ی دوبعدی پخش باشند، جمعیت موجود در مرز گله، متناسب با ریشه دوم جمعیت کل گله است.

سال ۲۰۱۲، در [۶]، یک مدل شکار-شکارچی ارائه شد که در آن برای شکار رفتار گله‌ای در نظر گرفته شده و از یک عبارت تعاملی لُتْکا-وُلْتِرا اصلاح‌شده (به جای ضربی از شکار، ضربی از ریشه دوم شکار استفاده شده است) برای پاسخ تابعی شکارچی به شکار استفاده می‌شود. رفتار اجتماعی شکار، نشان می‌دهد که شکارچی معمولاً در مرز بیرونی گله با شکار در تعامل است و استفاده از ریشه دوم به درستی این فرض را، که فعل و انفعالات در مرز جمعیت شکار رخ می‌دهد، مدل می‌کند. در [۷] نیز تاثیر کار گروهی شکارچی مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت در مدل دستگاه دوبعدی، توان $\frac{1}{p}$ و در مدل دستگاه سه‌بعدی، توان $\frac{1}{q}$ برای جمعیت شکارچی مورد استفاده قرار گرفته است. برای توصیف دقیق مدل ریشه دوم برای تابع پاسخ، ابتدا مدل اولیه‌ی شکار-شکارچی با رشد لجستیک در شکار و تابع پاسخ هالینگ نوع II را مرور می‌کنیم. این مدل به صورت

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{N}\right) - \frac{\alpha XY}{1+t_h\alpha X}, \\ \frac{dY}{dt} = -sY + \frac{c\alpha XY}{1+t_h\alpha X} \end{cases} \quad (1.1)$$

است که در آن $X(t)$ نشان‌دهنده‌ی جمعیت شکار، $Y(t)$ نشان‌دهنده‌ی جمعیت شکارچی، r بیان‌گر آهنگ رشد جمعیت شکار، N ظرفیت حمل و s نرخ مرگ طبیعی شکارچی در غیاب شکار است. همچنین، α بیان‌گر بازده جستجوی شکارچی برای شکار، c آهنگ مصرف سرانه‌ی شکار توسط شکارچی و t_h فاصله زمانی متوسط بین هر دو بار شکار است. با توجه به بحث انجام‌شده در [۴]، اگر بخواهیم رفتار گله‌ای را

[†]Holling I-III types

[‡]Crowley-Martin Type

[§]Bedington-Deangelis

[¶]Hasell-Varley

برای شکار در نظر بگیریم، باید در (۱.۱) تابع پاسخ را برحسب ریشه دوم جمعیت شکار در نظر بگیریم. بنابراین،

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{N}\right) - \frac{\alpha\sqrt{XY}}{1+t_h\alpha\sqrt{X}}, \\ \frac{dY}{dt} = -sY + \frac{c\alpha\sqrt{XY}}{1+t_h\alpha\sqrt{X}}. \end{cases} \quad (۲.۱)$$

مدل اخیر بیشتر برای گیاه‌خوارانی که به صورت گله‌ای در یک علفزار وسیع زندگی می‌کنند و با شکارچیان خود در تعامل اند، مناسب است. حال با اعمال تغییر متغیر $u = \frac{X}{N}$ و $v = \frac{\alpha Y}{r\sqrt{N}}$ ، تغییر مقیاس $\tau = rt$ و معرفی پارامترهای $\bar{s} = \frac{s}{r}$ و $a = t_h\alpha\sqrt{N}$ و $\bar{c} = c\frac{\alpha\sqrt{N}}{r}$ دستگاه (۲.۱) به دستگاه

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{\sqrt{uv}}{1+a\sqrt{u}}, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\bar{s}v + \frac{\bar{c}\sqrt{uv}}{1+a\sqrt{u}} \end{cases} \quad (۳.۱)$$

تبدیل می‌شود. توجه کنیم که اگر فاصله زمانی متوسط بین هر دو بار شکار را برابر صفر در نظر بگیریم (یعنی $a = 0$)، آن‌گاه دستگاه (۳.۱) به دستگاه

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \sqrt{uv}, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\bar{s}v + \bar{c}\sqrt{uv} \end{cases} \quad (۴.۱)$$

تبدیل می‌شود که نوعی لُتکا-وُلترای اصلاح شده است.

هدف ما در این مقاله، مطالعه‌ی انشعابات در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \delta_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u(1-u) - \frac{u\sqrt{v}}{1+au}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - s(v - \frac{bu\sqrt{v}}{1+au}) \end{cases} \quad (۵.۱)$$

است که در آن δ_1, δ_2, s, a و همگی پارامترهای حقیقی مثبت‌اند و $W = (u, v)$ تابعی از (x, y, t) روی مجموعه‌ی $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ با شرایط مرزی نوین

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial W}{\partial x}(1, y, t) = \frac{\partial W}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial W}{\partial y}(x, 1, t) = (0, 0), \quad (۶.۱)$$

است. پارامترهای δ_1 و δ_2 به ترتیب نشان‌دهنده‌ی ضرایب انتشار برای شکار و شکارچی‌اند. فرض بر این است که کل جمعیت در یک منطقه‌ی حفاظت‌شده‌ی $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ نگاه‌داری می‌شوند. دستگاه ریشه دوم همگن به صورت

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{u\sqrt{v}}{1+au}, \\ \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -s(v - \frac{bu\sqrt{v}}{1+au}) \end{cases} \quad (۷.۱)$$

است که در آن $u(t)$ و $v(t)$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تراکم جمعیت شکار و شکارچی در زمان t اند. پارامتر s نرخ مرگ‌ومیر شکارچی در غیاب طعمه، b نشان‌دهنده‌ی نرخ تبدیل یا مصرف شکار به شکارچی و a مربوط به نرخ جستجوی شکارچی برای شکار است. ریشه دوم جمعیت شکارچیان نشان‌دهنده‌ی تجمع شکارچی در مرز یک گله‌ی بزرگ است. ابتدا دینامیک دستگاه همگن را برای $\delta_1 = \delta_2 = 0$ در نظر می‌گیریم و سپس تاثیر ثابت‌های انتشار δ_1 و δ_2 را بر روی آن بررسی می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که یک انشعاب هاپف در نقطه تعادل مثبت مدل رخ می‌دهد. اثبات براساس نتایج قضیه‌ی ۳.۳ در فصل ۲ [۱۰] است. در مورد دستگاه‌های (۳.۱) و (۴.۱)، نتایجی در پژوهش‌های قبلی وجود دارد. برای نمونه مراجع [۸، ۱۳، ۱۵، ۲۰-۲۲] دیده شوند. البته در مراجع [۵، ۹، ۱۴، ۱۷، ۱۹] نیز اطلاعاتی در این زمینه موجود است. نتایج اصلی ما در قضیه‌های زیر خلاصه می‌شوند.

قضیه ۱.۱. دستگاه (۷.۱) را در ناحیه‌ی مثبت صفحه با پارامترهای مثبت s, a و b در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $u = \phi(a, b) \in [0, 1]$ جواب معادله‌ی

$$1 - u = \frac{bu}{(1 + au)^2}$$

باشد. قرار می‌دهیم $\psi(a, b) = b\phi(a, b)(1 - \phi(a, b))$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(الف) نقاط تعادل مرزی $E_0 = (0, 0)$ و $E_1 = (1, 0)$ ، زین توپولوژیکی اند.

(ب) برای $\frac{1}{4} \leq \phi(a, b)$ ، نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\phi(a, b), \psi(a, b))$ یک چاه است.

(پ) برای $a > 8$ و $|\phi(a, b) - \frac{1}{4}| < \frac{\sqrt{a-8}}{4\sqrt{a}}$ ، نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\phi(a, b), \psi(a, b))$ یک زین هذلولوی است.

(ت) برای $0 < a \leq 1$ ، نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\phi(a, b), \psi(a, b))$ یک کانون پایدار قوی است.

(ث) اگر قرار دهیم $s = \frac{1}{4}$ و $b = 3(1 + \frac{a}{4})^2$ ، آن گاه در $a = 4$ یک انشعاب هاپف رخ می دهد. به بیان دقیق تر، اگر $a > 4$ آن گاه نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{16}(1 + \frac{a}{4})^2)$ یک کانون ناپایدار قوی است که با یک دور حدی پایدار احاطه شده است، این در حالی است که برای $a < 4$ دور حدی وجود ندارد و نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{16}(1 + \frac{a}{4})^2)$ یک کانون پایدار قوی است. برای $a = 4$ ، نقطه تعادل مثبت $(u^*, v^*) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{16})$ یک کانون پایدار ضعیف است.

قضیه ۲.۱. دستگاه (۵.۱) را، که در آن δ_1, δ_2, s, a و پارامترهای مثبت اند، در نظر می گیریم. فرض کنیم $s = \frac{1}{4}, b = 3(1 + \frac{a}{4})^2$ و $\frac{\delta_1}{\delta_2} > 5 - 2\sqrt{6}$ در این صورت، در $a = 4$ یک انشعاب هاپف رخ می دهد. به ویژه، گزاره های زیر برقرارند:

(الف) برای $a \leq 4$ ، جواب تعادلی $(u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{16}(1 + \frac{a}{4})^2)$ برای دستگاه (۵.۱) پایدار است.

(ب) برای $a > 4$ ، جواب تعادلی $(u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{16}(1 + \frac{a}{4})^2)$ برای دستگاه (۵.۱) ناپایدار است و در این حالت دستگاه یک جواب تناوبی پایدار دارد که در $a = 4$ بر اثر یک انشعاب هاپف فوق بحرانی به وجود می آید.

مقاله را به ترتیب زیر تنظیم و ارائه می کنیم. بخش ۲ را به معرفی فضای فاز و بیان نتایج درباره ی فضای هیلبرت $L^2(\Omega)$ و سوبولف $H^2(\Omega)$ اختصاص می دهیم. برهان قضیه ی ۱.۱ در بخش ۳ و برهان قضیه ی ۲.۱ در بخش های ۴ و ۵ ارائه خواهد شد. در نهایت، در بخش ۶، شبیه سازی های عددی برای تصدیق نتایج تحلیلی به دست آمده در انشعاب هاپف ارائه شده اند.

۲ معرفی فضای فاز

در این بخش، مرور مختصری بر فضاهای برداری نرمدار L^2 و H^2 خواهیم داشت. این فضاهای تابعی کاربردهای فراوانی در نظریه ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و دستگاه های دینامیکی با بُعد نامتناهی دارند. مجموعه ی $\mathbb{R}^2 \subset [0, 1] \times [0, 1] = \Omega$ مجهز به اندازه لبگ را در نظر می گیریم. از این به بعد، دو تابع اندازه پذیر $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ را یکی در نظر می گیریم. اگر زیرمجموعه ی $E \subset \Omega$ با اندازه لبگ صفر موجود باشد به طوری که برای هر $x \in \Omega \setminus E$ ، $u(x) = v(x)$ ، آن گاه می نویسیم « $u = v$ ت. ه.». مجموعه ی توابع اندازه پذیر مربع انتگرال پذیر $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ را با $L^2(\Omega)$ نشان می دهیم. بنابراین،

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty\}.$$

به سادگی می توان نشان داد که $L^2(\Omega)$ یک فضای برداری مختلط است. حال برای هر $u \in L^2(\Omega)$ ، تعریف می کنیم:

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

در این صورت، $\|\cdot\|$ یک نرّم روی فضای برداری $L^2(\Omega)$ است. برای $u, v \in L^2(\Omega)$ ، از نامساوی کوشی-شوارتس نتیجه می شود:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)\bar{v}(x) dx \right| \leq \|u\| \|v\|,$$

که در آن \bar{v} نمایش دهنده ی مزدوج مختلط v است. این بدین معنی است که اگر $u, v \in L^2(\Omega)$ ، آن گاه $u\bar{v}$ انتگرال پذیر است. بنابراین، برای هر $u, v \in L^2(\Omega)$ ، تعریف می کنیم:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)\bar{v}(x) dx.$$

روشن است که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی روی $L^2(\Omega)$ است و داریم:

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} u(x) \bar{u}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

همچنین، می‌توان نشان داد که $L^2(\Omega)$ نسبت به متر $d(u, v) = \|u - v\|$ یک فضای برداری کامل است که نرم آن از ضرب داخلی ناشی می‌شود و بنابراین یک فضای هیلبرت خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۱] و [۲] رجوع شود. اکنون که فضای هیلبرت $L^2(\Omega)$ را معرفی کردیم، می‌توانیم به معرفی فضای سوبولف $H^2(\Omega)$ بپردازیم. از آنجا که فضاهای سوبولف براساس مفهوم مشتق ضعیف (یا مشتق توزیعی) تعریف می‌شوند، ابتدا مفهوم مشتق ضعیف را معرفی می‌کنیم. بدین منظور، فرض کنیم $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ یک اندیس دوگانه باشد که α_1 و α_2 اعداد صحیح نامنفی‌اند و $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. در این صورت، از نماد $D^\alpha f$ برای عبارت $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ استفاده می‌کنیم. همچنین، مجموعه‌ی همه‌ی توابعی را که دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌ای باشند، با $C^\infty(\Omega)$ و مجموعه‌ی توابعی از $C^\infty(\Omega)$ را که دارای تکیه‌گاه فشرده در Ω باشند، با $C_0^\infty(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم تابع $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر باشد. گوییم تابع u دارای مشتق ضعیف $D^\alpha u$ است اگر تابع انتگرال‌پذیر $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ موجود باشد به طوری که برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx.$$

در این صورت، $D^\alpha u = g$.

تعریف ۲.۲. مجموعه‌ی تمام توابع مربع‌انتگرال‌پذیر $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ را که برای هر اندیس دوگانه‌ی α با $|\alpha| \leq 2$ در شرط

$$D^\alpha u \in L^2(\Omega)$$

صدق کند، با $H^2(\Omega)$ نشان می‌دهیم و آن را فضای سوبولف می‌نامیم. بنابراین،

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}.$$

می‌توان نشان داد که $H^2(\Omega)$ نسبت به نرم

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

یک فضای برداری نرم‌دار کامل (باناخ) است. همچنین، $H^2(\Omega)$ نسبت به ضرب داخلی

$$\langle u, v \rangle_2 := \sum_{|\alpha| \leq 2} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle,$$

یک فضای هیلبرت است. به همین ترتیب، فضای تابعی $H^1(\Omega)$ را تعریف می‌کنیم که عبارت است از

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 1\}.$$

فضای تابعی $H^1_0(\Omega)$ را به‌عنوان بستار $C_0^\infty(\Omega)$ در $H^1(\Omega)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $C_0^\infty(\Omega)$ فضای توابع از رده C^∞ است که دارای تکیه‌گاه فشرده در Ω ‌اند.

در این مقاله، برای مطالعه‌ی تأثیر ثابت‌های انتشار بر دینامیک دستگاه (۷.۱)، دستگاه (۵.۱) را به‌همراه شرایط مرزی نویمن (۶.۱) روی فضای هیلبرت $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ بررسی خواهیم کرد.

۳ برهان قضیه ۱.۱

این بخش را به ارائه برهان قضیه ۱.۱ اختصاص می‌دهیم. دستگاه (۷.۱) و میدان برداری

$$F(u, v) = \left(u(1-u) - \frac{u\sqrt{v}}{1+au}, -sv + sb\frac{u\sqrt{v}}{1+au} \right)$$

مربوط به آنرا در نظر می‌گیریم. صفرهای این میدان برداری (یا همان نقاط تعادل دستگاه (۷.۱)) عبارت‌اند از $(1, 0)$ ، $(0, 0)$ و (u^*, v^*) که در آن $v^* = bu^*(1-u^*)$ و u^* از حل معادله $\frac{bu^*}{(1+au^*)^2} - u^*(1-u^*) = 0$ به دست می‌آید. بنابراین، $0 < u^* < 1$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه سوم $(1-u)(1+au)^2 - bu = 0$ است. این معادله بسته به مقادیر مثبت a و b دارای یک یا سه ریشه برای $0 < u < 1$ است. به عنوان مثال، این معادله برای $0 < a \leq 1$ و هر b دارای دقیقاً یک ریشه‌ی ساده و برای $a = 2$ و $b = 100$ دارای سه ریشه‌ی $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{11}}{10}$ و $\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{11}}{10}$ است. با توجه به این که دستگاه (۷.۱) در $v = 0$ مشتق پذیر نیست و در نتیجه، ماتریس‌های ژاکوبی $DF(0, 0)$ و $DF(1, 0)$ موجود نیستند، برای تعیین پایداری نقاط تعادل مرزی $(u, v) = (0, 0)$ و $(u, v) = (1, 0)$ ، از تغییر متغیر $\tilde{v} = \sqrt{v}$ استفاده می‌کنیم. با اعمال این تغییر متغیر، دستگاه (۷.۱) به دستگاه

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1-u) - \frac{u\tilde{v}}{1+au}, \\ \dot{\tilde{v}} = -\frac{s}{2}(\tilde{v} - \frac{bu}{1+au}), \end{cases} \quad (1.3)$$

تبدیل می‌شود. اگر میدان برداری وابسته به دستگاه (۱.۳) را با G نمایش دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$G(u, 0) = \left(u(1-u), \frac{sbu}{2(1+au)} \right), \quad G(0, 0) = (0, 0), \quad DG(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{sb}{2} & -\frac{s}{2} \end{bmatrix},$$

که نشان می‌دهد مبدأ یک زین هذلولوی از دستگاه (۱.۳) با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1 = 1 > 0$ و $\lambda_2 = -\frac{s}{2} < 0$ است. علاوه بر این، جهت میدان برداری G روی قسمت مثبت محور u ، به سمت بالا است. هم‌چنین، مشاهده می‌شود که $u = 0$ و $v = 0$ جواب‌های دستگاه (۷.۱) اند به طوری که شار تولیدشده توسط میدان برداری F در مجموعه‌ی پایایی $\{u = 0\}$ ، توسط معادله‌ی $\dot{v} = -sv$ و در مجموعه‌ی پایایی $\{v = 0\}$ ، توسط معادله‌ی $\dot{u} = u(1-u)$ داده می‌شود. بنابراین، نقاط تعادل مرزی $(u, v) = (0, 0)$ و $(u, v) = (1, 0)$ برای دستگاه (۷.۱)، زین توپولوژیکی‌اند. مشتق میدان برداری F (ماتریس ژاکوبی) در نقطه تعادل درونی (مثبت) به صورت (u^*, v^*)

$$DF(u^*, v^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2u^* - \frac{\sqrt{v^*}}{(1+au^*)^2} & -\frac{u^*}{1+au^*} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^*}} \\ \frac{sb\sqrt{v^*}}{(1+au^*)^2} & -s + \frac{sbu^*}{1+au^*} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^*}} \end{bmatrix}$$

است که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \text{tr}(DF(u^*, v^*)) &= 1 - 2u^* - \frac{\sqrt{v^*}}{(1+au^*)^2} - s + \frac{sbu^*}{1+au^*} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^*}}, \\ \det(DF(u^*, v^*)) &= \left(1 - 2u^* - \frac{\sqrt{v^*}}{(1+au^*)^2} \right) \left(-s + \frac{sbu^*}{1+au^*} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^*}} \right) \\ &\quad - \left(-\frac{u^*}{1+au^*} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^*}} \right) \left(\frac{sb\sqrt{v^*}}{(1+au^*)^2} \right). \end{aligned}$$

با استفاده از روابط

$$1 - u^* = \frac{bu^*}{(1+au^*)^2}, \quad v^* = bu^*(1-u^*) = \frac{b^2u^{*2}}{(1+au^*)^2}, \quad \sqrt{v^*} = \frac{bu^*}{1+au^*}, \quad (2.3)$$

می‌توان عبارت‌های بالا را ساده کرد و به شکل مختصر زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \text{tr}(DF(u^*, v^*)) &= 1 - 2u^* - \frac{bu^*}{(1+au^*)^2} - s + \frac{s}{2} = 1 - 2u^* - \frac{1-u^*}{1+au^*} - \frac{s}{2} \\ &= \frac{(1-2u^*)(1+au^*) - (1-u^*)}{1+au^*} - \frac{s}{2} = \frac{(a-1)u^* - 2au^{*2}}{1+au^*} - \frac{s}{2} \\ &= -\frac{2au^*}{1+au^*} \left(u^* + \frac{1-a}{2a} \right) - \frac{s}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(DF(u^*, v^*)) &= \left(1 - 2u^* - \frac{bu^*}{(1+au^*)^2}\right) \left(-s + \frac{s}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2b}\right) \left(\frac{sb^2 u^*}{(1+au^*)^2}\right) \\ &= \left(1 - 2u^* - \frac{1-u^*}{1+au^*}\right) \left(-\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \cdot \frac{1-u^*}{1+au^*} \\ &= s \left(u^* - \frac{1}{2} + \frac{1-u^*}{1+au^*}\right) \\ &= \frac{as}{1+au^*} \left(u^{*2} - \frac{1}{2}u^* + \frac{1}{2a}\right). \end{aligned}$$

حال اگر $u^* \geq \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $\det(DF(u^*, v^*)) > 0$ و $\text{tr}(DF(u^*, v^*)) < 0$. پس در این حالت، نقطه تعادل (u^*, v^*) یک چاه و در نتیجه مجانبی پایدار است. اگر $a > 8$ و $|u^* - \frac{1}{2}| < \frac{\sqrt{a-8}}{2\sqrt{a}}$ ، آن‌گاه $\det(DF(u^*, v^*)) < 0$ و در نتیجه، نقطه تعادل (u^*, v^*) یک زین هذلولوی و ناپایدار است. اگر $0 < a \leq 1$ ، آن‌گاه $\det(DF(u^*, v^*)) > 0$ و $\text{tr}(DF(u^*, v^*)) < 0$ که نتیجه می‌دهد نقطه تعادل (u^*, v^*) یک کانون پایدار است. حال قرار می‌دهیم $u^* = s = \frac{1}{2}$ و $b = 3(1 + \frac{a}{2})^2$. در این حالت،

$$\begin{aligned} \text{tr}(DF(\frac{1}{2}, \frac{3b}{16})) &= \frac{1-s}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{b}} = \frac{3(a-4)}{8(a+4)}, \\ \det(DF(\frac{1}{2}, \frac{3b}{16})) &= \frac{s\sqrt{3}}{16\sqrt{b}}(8-a) = \frac{8-a}{16(4+a)}. \end{aligned}$$

پس اگر $a = 4$ ، آن‌گاه

$$\det(DF(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})) = \frac{1}{32} > 0, \quad \text{tr}(DF(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})) = 0.$$

هم‌چنین،

$$\frac{d}{da} \left(\frac{3(a-4)}{16(a+4)} \right) \Big|_{a=4} = \frac{3}{128} > 0. \quad (3.3)$$

حال تغییر متغیر

$$x = u - u^* = u - \frac{1}{2}, \quad y = v - v^* = v - \frac{3b}{16} = v - \frac{9}{16} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2, \quad \mu = a - 4$$

را بر دستگاه (۷.۱) اعمال می‌کنیم تا نقطه‌ی $(u, v, a) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, 4)$ به مبدأ منتقل شود. در این صورت، داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2+\mu}{16+7\mu}x - \frac{\lambda}{3(\lambda+\mu)^2}y - \frac{16+\mu(4+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}x^2 - \frac{12\lambda}{3(\lambda+\mu)^2}xy + \frac{512}{27(\lambda+\mu)^2}y^2 - \frac{4\lambda(4+\mu)^2}{(\lambda+\mu)^2}x^3 \\ \quad + \frac{512(4+\mu)}{3(\lambda+\mu)^2}x^2y + \frac{8192}{27(\lambda+\mu)^2}xy^2 - \frac{65536}{273(\lambda+\mu)^2}y^3 + O(|x, y|^4), \\ \dot{y} = \frac{9(\lambda+\mu)}{64}x - \frac{1}{8}y - \frac{9}{16}(4+\mu)x^2 + \frac{2}{\lambda+\mu}xy - \frac{\lambda}{9(\lambda+\mu)^2}y^2 + \frac{9(4+\mu)^2}{4(\lambda+\mu)}x^3 - \frac{\lambda(4+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}x^2y \\ \quad - \frac{12\lambda}{9(\lambda+\mu)^2}xy^2 + \frac{1024}{81(\lambda+\mu)^2}y^3 + O(|x, y|^4). \end{cases} \quad (4.3)$$

با تغییر متغیر $x = \frac{\sqrt{3}}{9}X + \frac{Y}{9}$ و $y = Y$ و جای‌گذاری $\omega = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ و $\mu = 0$ و استفاده‌ی مجدد از (x, y) بجای (X, Y) داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{324\sqrt{3}}(\lambda y + 36\sqrt{2}xy + 18y^2 + 16\sqrt{2}x^3 + 32x^2y + 4\sqrt{2}xy^2) + O(|x, y|^4), \\ \dot{y} = \frac{1}{64\lambda}(\lambda 1\sqrt{2}x - 36x^2 - 18\sqrt{2}xy - 9y^2 + \lambda\sqrt{2}x^3 + 16x^2y + 2\sqrt{2}xy^2) + O(|x, y|^4). \end{cases} \quad (5.3)$$

اولین ضریب لیاپانوف دستگاه (۵.۳) در مبدأ برابر است با

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{16\omega} [f'_{xy}(f'_{xx} + f'_{yy}) - f'_{xy}(f''_{xx} + f''_{yy}) - f'_{xx}f''_{xx} + f'_{yy}f''_{yy}] \\ &\quad + \frac{1}{16} [f'_{xxx} + f'_{xyy} + f''_{xxy} + f''_{yyy}] \\ &= -\frac{13}{864} < 0, \end{aligned}$$

که در آن $f^1 = \dot{x} + \omega y$ و $f^2 = \dot{y} - \omega x$ با توجه به دستگاه (۵.۳) تعریف می‌شوند و همه مشتقات جزئی در نقطه‌ی انشعاب $(x, y) = (0, 0)$ محاسبه شده‌اند. چون $L_1 < 0$ ، یک انشعاب هایف فوق بحرانی برای $\mu = 0$ در مبدأ دستگاه (۵.۳) رخ می‌دهد که مدار تناوبی منشعب شده پایدار است. با توجه به (۳.۳)، برای $\mu > 0$ (یعنی، برای $a > 4$) نقطه تعادل (u^*, v^*) یک کانون ناپایدار و دور حدی منشعب شده مجانبی پایدار است. برای $\mu < 0$ (یعنی برای $a < 4$) نقطه تعادل (u^*, v^*) یک کانون پایدار است و دور حدی ناپدید می‌شود. بنابراین، $\mu = 0$ (یعنی، $a = 4$) نقطه‌ی انشعاب برای حالت $\delta_1 = \delta_2 = 0$ است. تا این‌جا نشان داده‌ایم که در دستگاه (۷.۱) یک انشعاب هاپف رخ می‌دهد.

۴ برهان قضیه‌ی ۲.۱

برای مطالعه‌ی تاثیر ثابت‌های انتشار بر دینامیک دستگاه (۷.۱)، از چندین نتیجه در نظریه‌ی دستگاه‌های دینامیکی با بُعد نامتناهی استفاده خواهیم کرد. نظریه‌ی انشعاب‌های موضعی در دستگاه‌های دینامیکی با بُعد نامتناهی می‌تواند برای تشخیص پدیده‌های غیرخطی (از جمله دوره‌های حدی) در معادلات دیفرانسیل جزئی و هم‌چنین برای توصیف رفتارهای هندسی و دینامیکی برخی از جواب‌ها استفاده شود. وقوع یک انشعاب هاپف در دستگاه وابسته به پارامتر (۵.۱)، مربوط به یک تغییر توپولوژیکی در مجموعه‌ی جواب‌ها است. چنین تغییری ممکن است منجر به ایجاد جواب‌های جدید یا ناپدید شدن جواب‌های خاصی شود. چنین وضعیتی در مدل (۵.۱) مشاهده می‌شود، البته تحت برخی شرایط مناسب روی پارامترها (به شرط (۹.۴) مراجعه شود) وقتی پارامتر a از مقدار بحرانی $a_c = 4$ عبور کند، که برهان آن در ادامه بیان خواهد شد.

۱.۴ مدل ناهمگن

در بخش قبل نشان دادیم که برای $4 < a < \infty$ ، نقطه تعادل مثبت، یک کانون پایدار است که پایداری خود را در $a = 4$ از دست می‌دهد. در $a = 4$ ، دو مقدار ویژه‌ی ماتریس ژاکوبی دستگاه برابر با $\pm i\omega = \pm \frac{i}{4\sqrt{4}}$ اند که نشان‌دهنده‌ی وقوع یک انشعاب هاپف در دستگاه است. در این بخش، می‌خواهیم پایداری خطی و وجود انشعاب‌های موضعی احتمالی را در مدل ناهمگن (۵.۱) بررسی کنیم که در آن u و v ، علاوه بر زمان t ، به متغیرهای فضایی x و y نیز بستگی دارند. فرض می‌کنیم $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ، که البته یک ساده‌سازی از واقعیت است. برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۵.۱)، نشان می‌دهیم که یک انشعاب هاپف در آن رخ می‌دهد. تحت شرایط مرزی نوین ارائه شده در (۶.۱)، مشاهده می‌شود که یک جواب تعادلی از دستگاه همگن، به‌عنوان یک جواب دستگاه ناهمگن باقی می‌ماند. همین امر برای جواب تناوبی حول کانون ضعیف $(u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ از دستگاه همگن برای $a = 4$ صادق است. دستگاه (۵.۱) تحت انتقال $(u, v) \rightarrow (\frac{1}{4} + u_1, \frac{9}{4} + v_1)$ و جای‌گذاری $s = \frac{1}{4}(1 + \frac{a}{4})^2$ و $b = 3(1 + \frac{a}{4})^2$ به

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \delta_1 \nabla^2 u_1 + (\frac{3}{4} + u_1)(\frac{3}{4} - u_1 - \frac{\sqrt{144 + 72a + 9a^2 + 256v_1}}{4(4+a+4au_1)}), \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = \delta_2 \nabla^2 v_1 - \frac{1}{4}(\frac{9}{4}(a+4)^2 + v_1) + \frac{3(4+a)^2(1+4u_1)\sqrt{144+72a+9a^2+256v_1}}{1024(4+a+4au_1)} \end{cases} \quad (1.4)$$

با شرایط مرزی نوین

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial x}(1, y, t) = \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial y}(x, 1, t) = (0, 0) \quad (2.4)$$

تبدیل می‌شود که در آن $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عملگر لاپلاس در فضای \mathbb{R}^2 است. با این کار، جواب ثابت $(u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{256}(a+4)^2)$ به مبدأ $(u, v) = (0, 0)$ منتقل می‌شود. حال با در نظر گرفتن $w = (u_1, v_1)^t$ می‌توان دستگاه (۱.۴) را به صورت

$$\frac{dw}{dt} = Lw + R(w), \tag{۳.۴}$$

در نظر گرفت که در آن قسمت خطی دستگاه به صورت

$$L = \begin{pmatrix} \delta_1 \nabla^2 + \frac{a-2}{2(4+a)} & -\frac{\lambda}{3(4+a)^2} \\ \frac{9(4+a)}{64} & -\frac{1}{\lambda} + \delta_2 \nabla^2 \end{pmatrix},$$

و قسمت غیرخطی دستگاه به صورت

$$R(w) = \begin{pmatrix} -\frac{16-4a+a^2}{(4+a)^2} u_1^2 - \frac{12\lambda}{3(4+a)^2} u_1 v_1 + \frac{512}{27(4+a)^4} v_1^2 \\ -\frac{9a}{16} u_1^2 + \frac{2}{4+a} u_1 v_1 - \frac{\lambda}{9(4+a)^2} v_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4\lambda a^2}{(4+a)^2} u_1^3 + \frac{512a}{3(4+a)^4} u_1^2 v_1 + \frac{8192}{27(4+a)^6} u_1 v_1^2 - \frac{65536}{333(4+a)^6} v_1^3 \\ \frac{9a^2}{4(4+a)} u_1^3 - \frac{\lambda a}{(4+a)^2} u_1^2 v_1 - \frac{12\lambda}{9(4+a)^2} u_1 v_1^2 + \frac{1024}{81(4+a)^4} v_1^3 \end{pmatrix} + O(\|w\|^4)$$

است که هر دو وابسته به پارامتراند. فرض کنیم Ω یک دامنه‌ی کران‌دار، باز و هموار در \mathbb{R}^n باشد، که در آن $n \geq 1$. حال فضاهاى با بُعد نامتناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{X} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{۴.۴}$$

$$\mathcal{Z} = (H_N^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times (H_N^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)), \tag{۵.۴}$$

که در آن

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\} \tag{۶.۴}$$

و منظور از \vec{n} بردار قائم بر مرز ناحیه Ω است. نقاط شکستگی در مرز ناحیه‌ی Ω مانع از تعریف بردار عمود می‌شوند که تأثیری در کلیت برهان ندارد. شرایط مرزی گنجانده‌شده در تعریف \mathcal{Z} در واقع همان شرایط مرزی بیان‌شده در (۶.۱) یا (۲.۴) اند. در این صورت $L : \mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ یک عملگر بسته در \mathcal{X} ، با دامنه‌ی \mathcal{Z} و R یک نگاشت هموار در \mathcal{Z} است. دامنه‌ی $D(L) = \mathcal{Z}$ مجهز به نرم گراف تعریف شده با

$$\|w\|_L = (\|w\|_{\mathcal{X}}^2 + \|Lw\|_{\mathcal{X}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

یک فضای باناخ است و تزریق $D(L) = \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ کران‌دار است. از آن‌جا که \mathcal{Z} به‌طور فشرده در \mathcal{X} نشانده می‌شود، یعنی عملگر همانی $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ پیوسته و فشرده است، بنابراین L دارای یک حلال (تعریف بعد را ملاحظه کنیم) فشرده است و طیف آن از مقادیر ویژه‌ی منزوی با تکرارهای جبری متناهی تشکیل شده است. این به‌طور مستقیم از نظریه توزیع و از تعاریف و ویژگی‌های ارائه‌شده در صفحات ۲۸۰ و ۲۸۲ مرجع [۱۰] حاصل می‌شود (برای جزئیات بیشتر به [۱۱] مراجعه شود). در ادامه برخی از این تعاریف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. طیف عملگر خطی $L : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ را که با $\sigma(L)$ یا به‌طور خلاصه σ نشان می‌دهیم عبارت است از مجموعه‌ی تمام $\lambda \in \mathbb{C}$ که $(\lambda I - L) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ معکوس‌پذیر نباشد. هم‌چنین، مجموعه حلال L به‌صورت $\rho(L) = \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ تعریف می‌شود.

ملاحظه ۲.۴. طیف عملگر L را می‌توان به‌صورت $\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_0 \cup \sigma_-$ نوشت که

$$\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma \mid \text{Re}(\lambda) > 0\}, \quad \sigma_0 = \{\lambda \in \sigma \mid \text{Re}(\lambda) = 0\}, \quad \sigma_- = \{\lambda \in \sigma \mid \text{Re}(\lambda) < 0\}.$$

تعریف ۳.۴. نماد $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ نشان‌دهنده فضای باناخ عمل‌گرهای خطی کران‌دار (پیوسته) $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ است که مجهز به نرم زیرند:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} = \sup_{\|w\|_{\mathcal{X}}=1} (\|Lw\|_{\mathcal{X}}).$$

تعریف ۴.۴. عملگر خطی $L : D(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ را بسته می‌نامیم هرگاه گراف آن

$$G(L) = \{(u, Lu) : u \in D(L)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

بسته باشد. به‌طور معادل، برای هر دنباله‌ی $\{u_n\} \subset D(L)$ با خاصیت $u_n \rightarrow u \in \mathcal{X}$ و $Lu_n \rightarrow v \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $u \in D(L)$ و $Lu = v$ توجه کنیم که اگر $D(L)$ در \mathcal{X} بسته باشد، آن‌گاه پیوستگی L بسته بودن L را نتیجه می‌دهد.

۲.۴ طیف عمل گر خطی L

در این بخش، به بررسی طیف عمل گر خطی L می پردازیم. برای یافتن طیف L ، باید مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی متناظر را حل کرد. قرار می دهیم $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ از آن جا که مجموعه‌ی

$$\{\cos(k\pi x) \cdot \cos(l\pi y) \mid k, l \in \mathbb{N}_0\}$$

یک پایه برای $H^\nu(\Omega)$ است، باید آن دسته از جواب های $w = (u_1, v_1)$ از مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی $Lw = \lambda w$ را برای $\lambda \in \mathbb{C}$ بیابیم که به شکل

$$u_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_1^{(k,l)} \cos(k\pi x) \cos(l\pi y), \quad v_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_1^{(k,l)} \cos(k\pi x) \cos(l\pi y),$$

باشند. اگر $(k, l) \in \mathbb{N}_0^\nu$ موجود باشد به قسمی که $(u_1^{(k,l)}, v_1^{(k,l)})$ جواب نابدیهی دستگاه

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11} + \pi^\nu \delta_1 (k^\nu + l^\nu)) u_1^{(k,l)} - a_{12} v_1^{(k,l)} = 0, \\ -a_{21} u_1^{(k,l)} + (\lambda - a_{22} + \pi^\nu \delta_2 (k^\nu + l^\nu)) v_1^{(k,l)} = 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

با

$$a_{11} = \frac{a - \nu}{2(\nu + a)}, \quad a_{12} = -\frac{\lambda}{3(\nu + a)^2}, \quad a_{21} = \frac{9}{64}(\nu + a), \quad a_{22} = -\frac{1}{\lambda},$$

باشد، آن گاه λ یک مقدار ویژه‌ی L است. برای این که $(u_1^{(k,l)}, v_1^{(k,l)})$ جواب نابدیهی دستگاه (۷.۴) باشد باید

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} + \pi^\nu \delta_1 (k^\nu + l^\nu) & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} + \pi^\nu \delta_2 (k^\nu + l^\nu) \end{bmatrix} = 0.$$

در نتیجه، مقادیر ویژه‌ی $\lambda_{k,l,i}$ ، برای $i = 1, 2$ ، ریشه های چند جمله ای مشخصه‌ی

$$\begin{aligned} P_{k,l}(\lambda) &= (k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_2 \left(\frac{\delta_1}{\lambda \delta_2} + \frac{\lambda - a}{16(\nu + a)(k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_2} + \frac{\nu - a}{2(\nu + a)} + (k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_1 \right) \\ &\quad + \left(\pi^\nu (k^\nu + l^\nu) (\delta_1 + \delta_2) + \frac{3(\nu - a)}{\lambda(\nu + a)} \right) \lambda + \lambda^\nu \\ &= (k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_2 \left(\frac{\delta_1}{\lambda \delta_2} + \frac{\beta}{(k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_2} + \frac{16\beta - 1}{4} + (k^\nu + l^\nu) \pi^\nu \delta_1 \right) \\ &\quad + \left(\pi^\nu (k^\nu + l^\nu) (\delta_1 + \delta_2) + \frac{32\beta - 1}{\lambda} \right) \lambda + \lambda^\nu \end{aligned} \quad (8.4)$$

اند که در آن $\beta = \frac{\lambda - a}{16(\nu + a)} \in (0, \frac{1}{\lambda})$ به ویژه، $\beta_{0,0,1}$ و $\beta_{0,0,2}$ برابر با مقادیر ویژه‌ی ماتریس

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - 16\beta) & -\frac{1}{\delta_2^2}(1 + 16\beta)^2 \\ \frac{27}{16(1 + 16\beta)} & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

اند. بنابراین

$$\begin{aligned} \lambda_{0,0,1} &= \frac{1}{16} (1 - 32\beta - \sqrt{1 - 32\beta + 1024\beta^2}), \\ \lambda_{0,0,2} &= \frac{1}{16} (1 - 32\beta + \sqrt{1 - 32\beta + 1024\beta^2}). \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که اگر $\frac{1}{33} < \beta < \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه $\lambda_{0,0,2}$ و $\lambda_{0,0,1}$ مثبت‌اند و بنابراین جواب تعادلی ناپایدار است. اگر $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{33}$ ، آن‌گاه واضح است که مقادیر ویژه $\lambda_{k,l,i}$ ، برای $i = 1, 2$ دارای قسمت‌های حقیقی منفی‌اند هرگاه

$$\beta_{k,l} := \pi^2 \delta_1 (k^2 + l^2) + \frac{\beta}{\pi^2 \delta_2 (k^2 + l^2)} + \frac{\delta_1}{8\delta_2} > \frac{1 - 16\beta}{4}.$$

حال اگر $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه شرط اخیر برقرار است و بنابراین جواب تعادلی پایدار است. از سوی دیگر، می‌توان نشان داد که $\beta_{k,l} \geq 2\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\beta + \frac{\delta_1}{8\delta_2}$ پس تحت شرط $\frac{1}{33} < \beta < \frac{1}{4}$ ، جواب تعادلی پایدار است هرگاه $\frac{1-16\beta}{4} > 2\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\beta + \frac{\delta_1}{8\delta_2}$ که معادل است با $\sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{\delta_1}{\delta_2}} - \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} < 4\sqrt{\beta}$ و برای $\beta = \frac{1}{33}$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{\delta_1}{\delta_2}} - \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (9.4)$$

ملاحظه می‌کنیم که ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دوم $P_{k,l}$ ، برای $k+l \geq 1$ منفی است در حالی که ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی $P_{0,0}$ ، دارای قسمت‌های حقیقی صفر (به‌صورت $\lambda_{0,0,1} = +\frac{i}{4\sqrt{2}}$ و $\lambda_{0,0,2} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}$) اند. برای وجود انشعاب هاپف، مقادیر ویژه‌ی موهومی مذکور باید ساده باشند که این شرط در مورد مقادیر ویژه‌ی حالت $(k, l) = (0, 0)$ برقرار است. در ادامه، فرض می‌کنیم که شرط (9.4) برقرار است و نشان می‌دهیم که یک انشعاب هاپف در $\beta = \frac{1}{33} + \mu$ رخ می‌دهد. قرار می‌دهیم $\beta = \frac{1}{33} + \mu$ و بسط تیلور ضرائب (3.4) را حول $\mu = 0$ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a-2}{2(4+a)} &= \frac{1}{8} - 4\mu, \\ -\frac{8}{3(4+a)^2} &= -\frac{1}{24} - \frac{8}{9}\mu - \frac{128}{27}\mu^2, \\ -\frac{16-4a+a^2}{(4+a)^2} &= -\frac{1}{4} - \frac{256}{3}\mu^2, \\ -\frac{128}{3(4+a)^3} &= -\frac{1}{12} - \frac{8}{3}\mu - \frac{256}{9}\mu^2 - \frac{8192}{81}\mu^3, \\ \frac{512}{27(4+a)^4} &= \frac{1}{216} + \frac{16}{81}\mu + \frac{256}{81}\mu^2 + \frac{16384}{729}\mu^3 + \frac{131072}{2187}\mu^4, \\ -\frac{48a^2}{(4+a)^3} &= -\frac{3}{2} + 16\mu + \frac{512}{3}\mu^2 - \frac{16384}{9}\mu^3, \\ \frac{512a}{3(4+a)^4} &= \frac{1}{6} + \frac{32}{9}\mu - \frac{32768}{81}\mu^3 - \frac{524288}{243}\mu^4, \\ \frac{8192}{27(4+a)^5} &= \frac{1}{108} + \frac{40}{81}\mu + \frac{2560}{243}\mu^2 + O(\mu^3), \\ -\frac{65536}{243(4+a)^6} &= -\frac{1}{972} - \frac{16}{243}\mu - \frac{1280}{729}\mu^2 + O(\mu^3), \\ \frac{9}{64}(4+a) &= \frac{9}{8} - 12\mu + 128\mu^2 + O(\mu^3), \\ -\frac{9}{16}a &= -\frac{9}{4} + 48\mu - 512\mu^2 + O(\mu^3), \\ \frac{2}{4+a} &= \frac{1}{4} + \frac{8}{3}\mu, \\ -\frac{8}{9(4+a)^2} &= -\frac{1}{72} - \frac{8}{27}\mu - \frac{128}{81}\mu^2, \\ \frac{9a^2}{4(4+a)} &= \frac{9}{2} - 144\mu + 2048\mu^2 + O(\mu^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\lambda a}{(\lambda + a)^2} &= -\frac{1}{2} + \frac{512}{9}\mu^2, \\
 -\frac{128}{9(\lambda + a)^2} &= -\frac{1}{36} - \frac{8}{9}\mu - \frac{256}{27}\mu^2 - \frac{8192}{243}\mu^3, \\
 \frac{1024}{81(\lambda + a)^4} &= \frac{1}{324} + \frac{32}{243}\mu + \frac{512}{243}\mu^2 + O(\mu^3).
 \end{aligned}$$

حال معادله‌ی (۳.۴) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dt} &= (L_0 + \mu R_{11} + \mu^2 R_{12} + \mu^3 R_{13} + \dots)w \\
 &+ R_{20}(w, w) + \mu R_{21}(w, w) + R_{22}(w, w, w) + \mu R_{23}(w, w) + \dots \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

نوشت که در آن

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \begin{pmatrix} \delta_1 \nabla^2 + \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\sqrt{4}} \\ \frac{9}{\lambda} & \delta_2 \nabla^2 - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, & R_{11} &= \begin{pmatrix} 4 & -\frac{\lambda}{9} \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, \\
 R_{20}(w, w) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}u_1^2 - \frac{1}{12}u_1 v_1 + \frac{1}{12}v_1^2 \\ -\frac{9}{4}u_1^2 + \frac{1}{4}u_1 v_1 - \frac{1}{12}v_1^2 \end{pmatrix}, & R_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4096}{3} & 0 \end{pmatrix}, \\
 R_{21}(w, w) &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{4}u_1 v_1 + \frac{16}{81}v_1^2 \\ 4\lambda u_1^2 + \frac{\lambda}{4}u_1 v_1 - \frac{\lambda}{12}v_1^2 \end{pmatrix}, & R_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{128}{27} \\ 128 & 0 \end{pmatrix}, \\
 R_{22}(w, w, w) &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}u_1^3 + \frac{1}{6}u_1^2 v_1 + \frac{1}{108}u_1 v_1^2 - \frac{1}{972}v_1^3 \\ \frac{9}{4}u_1^3 - \frac{1}{4}u_1^2 v_1 - \frac{1}{36}u_1 v_1^2 + \frac{1}{324}v_1^3 \end{pmatrix}, \\
 R_{23}(w, w, w) &= \begin{pmatrix} 16u_1^3 + \frac{32}{9}u_1^2 v_1 + \frac{40}{81}u_1 v_1^2 - \frac{16}{243}v_1^3 \\ -144u_1^3 - \frac{\lambda}{9}u_1 v_1^2 + \frac{32}{243}v_1^3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

با این حساب، معادله‌ی (۳.۴) را به شکل

$$\frac{dw}{dt} = L_0 w + R(w, \mu) \quad (11.4)$$

در فضای \mathcal{Z} با

$$L_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} + \delta_1 \nabla^2 & -\frac{1}{\sqrt{4}} \\ \frac{9}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} + \delta_2 \nabla^2 \end{pmatrix}, \quad (12.4)$$

و

$$\begin{aligned}
 R(w, \mu) &= \mu R_{11}w + \mu^2 R_{12}w + R_{20}(w, w) + \mu R_{21}(w, w) \\
 &+ R_{22}(w, w, w) + O((|\mu| + |w|)^4) \quad (13.4)
 \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم. توجه کنیم که $R_{20}(\cdot, \cdot)$ و $R_{21}(\cdot, \cdot)$ هر دو نگاشت‌های دوخطی متقارن از \mathcal{Z}^2 به \mathcal{Z} به صورت

$$\begin{aligned}
 R_{20}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}u_1 u_2 - \frac{1}{12}(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \frac{1}{12}v_1 v_2 \\ -\frac{9}{4}u_1 u_2 + \frac{1}{4}(u_1 v_2 + u_2 v_1) - \frac{1}{12}v_1 v_2 \end{pmatrix}, \\
 R_{21}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{4}(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \frac{16}{81}v_1 v_2 \\ 4\lambda u_1 u_2 + \frac{\lambda}{4}(u_1 v_2 + u_2 v_1) - \frac{\lambda}{12}v_1 v_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

و $R_{\mathcal{P}_0}(\cdot, \cdot, \cdot)$ یک نگاشت سه خطی از \mathcal{Z}^3 به \mathcal{Z} به صورت

$$R_{\mathcal{P}_0}((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}(u_1 u_2 u_3 + \frac{1}{\lambda}(u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1)) \\ \frac{1}{\lambda}(u_1 u_2 u_3 - \frac{1}{\lambda}(u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1)) \\ \frac{1}{\lambda}(u_1 v_2 v_3 + u_2 v_1 v_3 + u_3 v_1 v_2) - \frac{1}{\lambda}(u_1 v_2 v_3) \\ -\frac{1}{\lambda}(u_1 v_2 v_3 + u_2 v_1 v_3 + u_3 v_1 v_2) + \frac{1}{\lambda} v_1 v_2 v_3 \end{pmatrix}$$

است.

لم ۵.۴. گزاره‌های زیر برای طیف عمل گر خطی $\mathcal{L} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ با ضابطه‌ی (۱۲.۴) برقرارند:

(الف) مجموعه‌ی مثبت طیف L_0 تهی است؛ یعنی $\sigma_+ = \emptyset$.

(ب) مجموعه‌ی مرکزی طیف L_0 برابر است با $\sigma_0 = \{\pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}\}$ و بردارهای ویژه‌ی نظیر نیز به ترتیب $\zeta_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{\lambda}}{1} \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\bar{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{\lambda}}{1} \\ 1 \end{pmatrix}$ اند.

(ج) برای مجموعه‌ی منفی طیف L_0 ، عدد $M > 0$ چنان موجود است که $\sup_{\lambda \in \sigma_-} (\text{Re } \lambda) < -M$.

اثبات. موارد (الف) و (ب) روشن‌اند. فقط برهان مورد (ج) را بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم $q = k^2 + l^2 \geq 1$ و ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی $P_{k,l}(\lambda)$ در (۸.۴) را با $\lambda_1^{(q)}$ و $\lambda_2^{(q)}$ نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$\lambda_1^{(q)} = \frac{1}{\lambda} \left(-\pi^2 q (\delta_1 + \delta_2) - \sqrt{2} \sqrt{\Delta_q} \right),$$

$$\lambda_2^{(q)} = \frac{1}{\lambda} \left(-\pi^2 q (\delta_1 + \delta_2) + \sqrt{2} \sqrt{\Delta_q} \right),$$

که در آن $\Delta_q = -1 - 4\pi^2 (\delta_1 - \delta_2) q + 8\pi^4 (\delta_1 - \delta_2)^2 q^2$. اگر $\delta_1 = \delta_2$ ، آن‌گاه $\frac{\sqrt{\Delta_q}}{\lambda} i$ پس اگر $q \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه $\text{Re}(\lambda_{1,2}^{(q)}) = -\pi^2 \delta_1 q \rightarrow -\infty$. حال اگر $\delta_1 \neq \delta_2$ ، آن‌گاه $|\delta_1 - \delta_2| > 0$ و در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\Delta_q} = \sqrt{\lambda} \pi^2 q |\delta_1 - \delta_2| \sqrt{1 + o_q(1)},$$

$$\lambda_2^{(q)} = \frac{1}{\lambda} \left(-\pi^2 q (\delta_1 + \delta_2) + \pi^2 q |\delta_1 - \delta_2| \sqrt{1 + o_q(1)} \right)$$

$$= \frac{\pi^2 q |\delta_1 - \delta_2|}{\lambda} \left(\sqrt{1 + o_q(1)} - \frac{\delta_1 + \delta_2}{|\delta_1 - \delta_2|} \right).$$

چون $\lim_{q \rightarrow +\infty} o_q(1) = 0$ و $1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{|\delta_1 - \delta_2|} < 0$ ، پس $\lim_{q \rightarrow \infty} \text{Re}(\lambda_2^{(q)}) = -\infty$. بنابراین، $M > 0$ موجود است به طوری که

$$\sup\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma_-(L_0)\} < -M.$$

□

لم ۶.۴. ثابت‌های مثبت ω_1 و c_1 موجودند به طوری که برای هر $\omega \in \mathbb{R}$ با شرط $|\omega| \geq \omega_1$ ، $i\omega$ متعلق به مجموعه حلال L_0 است و $\| (i\omega \mathbb{I} - L_0)^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} \leq \frac{c_1}{|\omega|}$ در واقع، می‌توان فرض کرد $c_1 = 4$ و $\omega_1 = \frac{1}{\lambda}$.

اثبات. فرض کنیم $\omega \in \mathbb{R}$ و $\frac{1}{\sqrt{4}} \neq |\omega|$. چون $\sigma_\omega = \{\pm \frac{i}{\sqrt{4}}\}$ پس $i\omega$ متعلق به مجموعه حلال L_ω است. بنابراین، برای $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{X}$ معادله‌ی

$$(i\omega \mathbb{I} - L_\omega)W = f \quad (14.4)$$

دارای جواب یکتای $W = (u_1, v_1) \in \mathcal{Z}$ است. به‌طور معادل،

$$\begin{aligned} (i\omega - \frac{1}{\lambda} - \delta_1 \nabla^2)u_1 + \frac{1}{\sqrt{4}}v_1 &= f_1, \\ -\frac{9}{\lambda}u_1 + (i\omega - \delta_2 \nabla^2 + \frac{1}{\lambda})v_1 &= f_2. \end{aligned}$$

حال برای $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{X}$ نشان می‌دهیم که جواب $W = (u_1, v_1) \in \mathcal{Z}$ از دستگاه

$$(i\omega - \frac{1}{\lambda})u_1 - \delta_1(u_{1xx} + u_{1yy}) + \frac{1}{\sqrt{4}}v_1 = f_1, \quad (15.4)$$

$$-\frac{9}{\lambda}u_1 + (i\omega + \frac{1}{\lambda})v_1 - \delta_2(v_{1xx} + v_{1yy}) = f_2, \quad (16.4)$$

$$u_{1x}|_{x=0,1} = u_{1y}|_{y=0,1} = v_{1x}|_{x=0,1} = v_{1y}|_{y=0,1} = 0, \quad (17.4)$$

در نامساوی

$$\|W\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{4}{|\omega|} \|f\|_{\mathcal{X}}, \quad (18.4)$$

برای $|\omega| \geq \frac{4}{\epsilon}$ صدق می‌کند که در آن

$$\|W\|_{\mathcal{X}} = \|W\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = (\|u_1\|^2 + \|v_1\|^2)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |u_1|^2 + \int_{\Omega} |v_1|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f_1|^2 + \int_{\Omega} |f_2|^2 \right)^{1/2}.$$

چون یافتن جواب صریح W از معادله‌ی (۱۴.۴) امکان‌پذیر نیست، پس بدین روش عمل می‌کنیم که ابتدا معادله‌های (۱۵.۴) و (۱۶.۴) را به‌ترتیب در \bar{u}_1 و \bar{v}_1 ضرب کرده و سپس روی Ω از آن‌ها انتگرال می‌گیریم. داریم:

$$(i\omega - \frac{1}{\lambda}) \int_{\Omega} |u_1|^2 dx dy - \delta_1 \int_{\Omega} \bar{u}_1 \nabla^2 u_1 dx dy + \frac{1}{\sqrt{4}} \int_{\Omega} v_1 \bar{u}_1 dx dy = \int_{\Omega} f_1 \bar{u}_1 dx dy, \quad (19.4)$$

$$-\frac{9}{\lambda} \int_{\Omega} u_1 \bar{v}_1 dx dy + (i\omega + \frac{1}{\lambda}) \int_{\Omega} |v_1|^2 dx dy - \delta_2 \int_{\Omega} \bar{v}_1 \nabla^2 v_1 dx dy = \int_{\Omega} f_2 \bar{v}_1 dx dy. \quad (20.4)$$

با استفاده از قضیه‌ی فوبینی، انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و شرایط مرزی (۱۷.۴)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{u}_1 \nabla^2 u_1 dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \bar{u}_1(x, y)(u_{1xx} + u_{1yy}) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \bar{u}_1(x, y)u_{1xx} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \bar{u}_1(x, y)u_{1yy} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\bar{u}_1 u_{1x} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{1x} \bar{u}_{1x} dx \right) dy + \int_0^1 \left(\bar{u}_1 u_{1y} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{1y} \bar{u}_{1y} dy \right) dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 u_{1x} \bar{u}_{1x} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 u_{1y} \bar{u}_{1y} dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Omega} \int_{\circ} (u_{\lambda x} \bar{u}_{\lambda x} + u_{\lambda y} \bar{u}_{\lambda y}) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u_{\lambda} \cdot \nabla \bar{u}_{\lambda} dx dy = - \int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda}|^2 dx dy \\ &= - \|\nabla u_{\lambda}\|^2. \end{aligned}$$

به طور مشابه،

$$\int_{\Omega} \bar{v}_{\lambda} \nabla^2 v_{\lambda} dx dy = - \|\nabla v_{\lambda}\|^2.$$

دو تساوی اخیر بهمراه روابط (۱۹.۴) و (۲۰.۴) نتیجه می‌دهد که

$$(i\omega - \frac{1}{\lambda}) \|u_{\lambda}\|^2 + \delta_{\lambda} \|\nabla u_{\lambda}\|^2 + \frac{1}{\gamma\epsilon} \int_{\Omega} \bar{u}_{\lambda} v_{\lambda} dx dy = \int_{\Omega} f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda} dx dy, \quad (21.4)$$

$$-\frac{9}{\lambda} \int_{\Omega} u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda} dx dy + (i\omega + \frac{1}{\lambda}) \|v_{\lambda}\|^2 + \delta_{\lambda} \|\nabla v_{\lambda}\|^2 = \int_{\Omega} f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda} dx dy. \quad (22.4)$$

با در نظر گرفتن قسمت موهومی روابط (۲۲.۴) و (۲۱.۴) داریم:

$$\omega \|u_{\lambda}\|^2 - \frac{1}{\gamma\epsilon} \int_{\Omega} \text{Im}(u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}) dx dy = \text{Im} \left(\int_{\Omega} f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda} dx dy \right), \quad (23.4)$$

$$\omega \|v_{\lambda}\|^2 - \frac{9}{\lambda} \int_{\Omega} \text{Im}(u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}) dx dy = \text{Im} \left(\int_{\Omega} f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda} dx dy \right). \quad (24.4)$$

از مجموع روابط (۲۴.۴) و (۲۳.۴) نتیجه می‌شود که

$$\omega (\|u_{\lambda}\|^2 + \|v_{\lambda}\|^2) = \text{Im} \int_{\Omega} f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda} dx dy + \text{Im} \int_{\Omega} f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda} dx dy + \frac{\gamma}{\epsilon} \int_{\Omega} \text{Im}(u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}) dx dy. \quad (25.4)$$

حال برای رابطه‌ی (۲۵.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |\omega| (\|u_{\lambda}\|^2 + \|v_{\lambda}\|^2) &= |\omega| \|W\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &\leq \left| \text{Im} \int_{\Omega} f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda} dx dy \right| + \left| \text{Im} \int_{\Omega} f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda} dx dy \right| + \frac{\gamma}{\epsilon} \left| \int_{\Omega} \text{Im}(u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}) dx dy \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda} dx dy \right| + \left| \int_{\Omega} f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda} dx dy \right| + \frac{\gamma}{\epsilon} \int_{\Omega} |u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}| dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} |f_{\lambda} \bar{u}_{\lambda}| dx dy + \int_{\Omega} |f_{\gamma} \bar{v}_{\lambda}| dx dy + \frac{\gamma}{\epsilon} \int_{\Omega} |u_{\lambda} \bar{v}_{\lambda}| dx dy \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f_{\lambda}|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_{\lambda}|^2 dx dy \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |f_{\gamma}|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_{\lambda}|^2 dx dy \right)^{1/2} \\ &\quad + \frac{\gamma}{\epsilon} \left(\int_{\Omega} |u_{\lambda}|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_{\lambda}|^2 dx dy \right)^{1/2} \\ &= \|f_{\lambda}\| \|u_{\lambda}\| + \|f_{\gamma}\| \|v_{\lambda}\| + \frac{\gamma}{\epsilon} \|u_{\lambda}\| \|v_{\lambda}\| \\ &\leq \gamma (\|f_{\lambda}\|^2 + \|f_{\gamma}\|^2)^{1/2} (\|u_{\lambda}\|^2 + \|v_{\lambda}\|^2)^{1/2} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} (\|u_{\lambda}\|^2 + \|v_{\lambda}\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\|f\|_{\mathcal{X}} \|W\|_{\mathcal{X}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \|W\|_{\mathcal{X}}^2 \\
 &= \|W\|_{\mathcal{X}} \left(2\|f\|_{\mathcal{X}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \|W\|_{\mathcal{X}} \right),
 \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد $2\|f\|_{\mathcal{X}} \leq \left(|\omega| - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \|W\|_{\mathcal{X}}$. حال اگر $|\omega| \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، آن گاه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\omega| \|W\|_{\mathcal{X}} = \left(|\omega| - \frac{1}{\sqrt{2}} |\omega|\right) \|W\|_{\mathcal{X}} \leq \left(|\omega| - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \|W\|_{\mathcal{X}} \leq 2\|f\|_{\mathcal{X}}.$$

□ پس برای $|\omega| \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ داریم که $\|W\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{2}{|\omega|} \|f\|_{\mathcal{X}}$.

با توجه به این که فضاهای \mathcal{X} و \mathcal{Z} تعریف شده در (۴.۴)-(۵.۴) فضاهای هیلبرت اند، از لم فوق نتیجه می شود که تقریب حلال در فرض ۱۵.۲ در فصل ۲ از [۱۰] برقرار است. این نشان می دهد فرض ۷.۲ از قضیه ی منیفلد مرکزی در فصل ۲ نیز صادق است.

۳.۴ افکنش طیفی

افکنش طیفی P_0 برای عمل گر خطی $L_0 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ ، نگاشت خطی $E_0 = \text{span}\{\zeta_0, \bar{\zeta}_0\}$ است که در شرایط $P_0^2 = P_0$ و $P_0 L_0 = L_0 P_0$ صدق می کند. با استفاده از عمل گر الحاقی، می توان نشان داد که بردار ویژه ی $\zeta_0^* \in \mathcal{X}$ موجود است به طوری که

$$P_0 w = \langle w, \zeta_0^* \rangle \zeta_0 + \langle w, \bar{\zeta}_0^* \rangle \bar{\zeta}_0,$$

که در آن $\{\zeta_0^*, \bar{\zeta}_0^*\}$ پایه ی دوگان صادق در شرایط $L_0^* \zeta_0^* = -\frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \zeta_0^*$ و $\langle \zeta_0, \zeta_0^* \rangle = 1$ و $\langle \bar{\zeta}_0, \zeta_0^* \rangle = 0$ است. در واقع،

$$L_0^* = L_0^T = \begin{pmatrix} \delta_1 \nabla^2 + \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\lambda} & \delta_2 \nabla^2 - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \delta_1 \nabla^2 + \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} & \delta_2 \nabla^2 - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix},$$

و بردار ویژه ی ζ_0^* از عمل گر الحاقی که در شرایط $(-\frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{2}} - L_0^*) \zeta_0^* = 0$ و $\langle \zeta_0, \zeta_0^* \rangle = 1$ صادق است، به صورت

$$\zeta_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -3 + 3i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 9i\sqrt{2} \\ 2 - i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

خواهد بود.

۴.۴ منیفلد مرکزی

قضیه ی منیفلد مرکزی یک جزء بسیار مهم در نظریه ی موضعی دستگاه های دینامیکی است که یک روش ریاضی دقیق برای ساده سازی و کاهش بُعد یک دستگاه دینامیکی، ارائه می دهد. قضیه ی منیفلد مرکزی در فضای با بعد نامتناهی، مطالعه ی جواب های به اندازه ی کافی نزدیک به مبدأ از دستگاه (۱.۴) را به مطالعه ی جواب های نزدیک به مبدأ دستگاه تقلیل یافته با بُعد متناهی (دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی که بُعد آن برابر با بُعد E_0 است)، کاهش می دهد. جواب های محدود به منیفلد مرکزی به شکل $w(t) = w_0(t) + \Psi(w_0(t))$ اند که در آن $w_0(t) = z(t)\zeta_0 + \bar{z}(t)\bar{\zeta}_0 \in E_0$. با اعمال قضیه ی ۳.۳ از فصل ۲ [۱۰]، نتیجه می گیریم که دستگاه (۱.۴) یک منیفلد مرکزی دوبعدی برای μ به اندازه کافی کوچک دارد. در این صورت، برای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم:

$$w = z\zeta_0 + \bar{z}\bar{\zeta}_0 + \Psi(z, \bar{z}, \mu), \tag{۲۶.۴}$$

که Ψ تابعی با مقادیر در $\mathcal{Z}_h = (\mathbb{I} - P_0)\mathcal{Z}$ است. همچنین، دستگاه تقلیل یافته به شکل

$$\frac{dz}{dt} = f(z, \bar{z}, \mu), \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \overline{f(z, \bar{z}, \mu)}$$

است که ضرائب قسمت خطی آن برابر است با

$$\begin{bmatrix} \frac{i}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

با توجه به قضیه‌ی فرم نرمال (قضیه‌ی ۲.۲ از فصل ۳ [۱۰]) یک تغییر متغیر چندجمله‌ای موجود است که دستگاه تقلیل یافته را به فرم نرمال

$$\frac{dz}{dt} = \frac{i}{4\sqrt{2}}z + a\mu z + bz|z|^2 + O(|z|(|\mu| + |z|^2)^2) \quad (27.4)$$

تبدیل می‌کند که در آن $a = a_r + ia_i, b = b_r + ib_i, a_r, a_i, b_r, b_i \in \mathbb{R}$ و قرار می‌دهیم $z = \rho e^{i\phi}$ که $\rho > 0$ و $\phi \in \mathbb{S}^1$ در این صورت، معادله‌ی (۲۷.۴) به شکل

$$\frac{d\rho}{dt} + i\rho \frac{d\phi}{dt} = \frac{i}{4\sqrt{2}}\rho + (a_r + ia_i)\mu\rho + (b_r + ib_i)\rho^3 + O(\rho(|\mu| + \rho^2)^2), \quad (28.4)$$

درمی‌آید که معادل است با دستگاه

$$\frac{d\rho}{dt} = a_r\mu\rho + b_r\rho^3 + O(\rho(|\mu| + \rho^2)^2), \quad (29.4)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + a_i\mu + b_i\rho^2 + O((|\mu| + \rho^2)^2). \quad (30.4)$$

اگر $a_r b_r < 0$ (به ترتیب $a_r b_r > 0$)، آن‌گاه معادله‌ی شعاعی (۲۹.۴) برای $\mu > 0$ (به ترتیب $\mu < 0$) دارای یک جواب تعادلی مثبت به صورت

$$\rho^*(\mu) = \sqrt{-\frac{a_r\mu}{b_r}} + O(|\mu|^{3/2})$$

است. با جای‌گذاری این جواب در معادله‌ی زاویه‌ای (۳۰.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^*(\mu, t)}{dt} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} + a_i\mu + b_i\rho^*(\mu)^2 + O(|\mu|^2) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} + \left(a_i - b_i \frac{a_r}{b_r}\right)\mu + O(|\mu|^2) \equiv \omega^*(\mu), \end{aligned}$$

که جواب تناوبی $z^*(t, \mu) = \rho^*(\mu)e^{i\phi^*(\mu, t)} = \rho^*(\mu)e^{i\omega^*(\mu)t}$ حاصل می‌شود. پایداری این جواب تناوبی با پایداری جواب تعادلی $\rho^*(\mu)$ از معادله‌ی (۲۹.۴) یکسان است؛ یعنی برای $b_r < 0$ ، پایدار و برای $b_r > 0$ ، ناپایدار است.

۵ جهت انشعاب هاپف

در این بخش، هدف محاسبه‌ی ضرایب a و b در فرم نرمال (۲۷.۴) است. با توجه به نتیجه‌ی تمرین ۵.۳ از [۱۰]، ضریب a را می‌توان از مقدار ویژه‌ی λ از

$$L_\mu = \begin{pmatrix} \delta_1 \nabla^2 + \frac{1}{\lambda(3+32\mu)} - 4\mu & -\frac{1}{24} - \frac{\lambda}{9}\mu - \frac{12\lambda}{27}\mu^2 \\ \delta_2 \nabla^2 - \frac{1}{\lambda} & \end{pmatrix}$$

به دست آورد که برای $\mu = 0$ برابر است با $\frac{i}{4\sqrt{2}}$. در واقع a ، ضریب عبارت $O(\mu)$ در بسط این مقدار ویژه نسبت به μ است. با بازگشت به مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی (۷.۴) متوجه می‌شویم که مقدار ویژه‌ی λ ، ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی $P_{\circ, \circ}$ برای $\mu = \frac{1}{33} + \mu$ است؛ یعنی $\lambda^2 + 4\mu\lambda + \frac{1}{33} + \mu = 0$ ، بنابراین، $\lambda^2 + (4\beta - \frac{1}{\lambda})\lambda + \beta = 0$.

$$\lambda_{1,2} = -2\mu \pm \frac{\sqrt{12\lambda\mu^2 - 32\mu - 1}}{4\sqrt{2}}.$$

حال چون

$$\lambda_1 = \frac{i}{4\sqrt{2}} - 2(1 - i\sqrt{2})\mu - 24i\sqrt{2}\mu^2 + O(\mu^3),$$

پس $\circ < -2 = a_r$ برای محاسبه b ، در ادامه قرار می دهیم $\mu = \circ$. با جای گذاری $w = A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A})$ در معادله $\frac{dw}{dt} = L_\circ w + R_{2_\circ}(w, w) + R_{3_\circ}(w, w, w)$ درمی یابیم که

$$\begin{aligned} & \left(\zeta_\circ + \frac{\partial \Psi}{\partial A} \right) \frac{dA}{dt} + \left(\bar{\zeta}_\circ + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{A}} \right) \frac{d\bar{A}}{dt} \\ & = L_\circ (A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A})) \\ & \quad + R_{2_\circ}(A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A}), A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A})) \\ & \quad + R_{3_\circ}(A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A}), A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A}), A\zeta_\circ + \bar{A}\bar{\zeta}_\circ + \Psi(A, \bar{A})). \end{aligned} \quad (1.5)$$

با استفاده از بسط

$$\Psi(A, \bar{A}) = \Psi_{2_\circ} A^2 + \Psi_{11} A\bar{A} + \Psi_{\circ 2} \bar{A}^2 + \Psi_{3_\circ} A^3 + \Psi_{21} A^2 \bar{A} + \Psi_{12} A\bar{A}^2 + \Psi_{\circ 3} \bar{A}^3 + O(|A|^4),$$

که در آن $\bar{\Psi}_{kl} = \Psi_{lk}$ و $\Psi_{kl} \in \mathcal{Z}$ در نظر گرفتن $\frac{dA}{dt} = \frac{i}{4\sqrt{2}}A + bA|A|^2 + O(|A|^5)$ ، ضرائب توان های (A, \bar{A}) را در دوطرف معادله (1.5) یکی قرار می دهیم. برای توان های $A^2 \bar{A}$ و $A\bar{A}$ ، A^2 به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\sqrt{2}} \Psi_{2_\circ} &= L_\circ \Psi_{2_\circ} + R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ), \\ \circ &= L_\circ \Psi_{11} + 2R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ), \\ b\zeta_\circ + \frac{i}{4\sqrt{2}} \Psi_{21} &= L_\circ \Psi_{21} + 2R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \Psi_{11}) + 2R_{2_\circ}(\bar{\zeta}_\circ, \Psi_{2_\circ}) + 3R_{3_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ), \end{aligned}$$

که به ترتیب معادل اند با

$$\left(\frac{i}{2\sqrt{2}} - L_\circ \right) \Psi_{2_\circ} = R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ), \quad (2.5)$$

$$-L_\circ \Psi_{11} = 2R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ), \quad (3.5)$$

$$b\zeta_\circ + \left(\frac{i}{4\sqrt{2}} - L_\circ \right) \Psi_{21} = 2R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \Psi_{11}) + 2R_{2_\circ}(\bar{\zeta}_\circ, \Psi_{2_\circ}) + 3R_{3_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ). \quad (4.5)$$

با توجه به این که $\pm \frac{i}{4\sqrt{2}}$ تنها مقادیر ویژه موهومی محض L_\circ اند، پس $(\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbb{I} - L_\circ)$ و L_\circ هر دو معکوس پذیرند و می توان Ψ_{2_\circ} و Ψ_{11} را از روابط (2.5) و (3.5) به دست آورد. سپس، از شرط حل پذیری معادله (4.5) ، می توان b را محاسبه کرد. توجه کنیم که

$$R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{648} - \frac{5i}{162\sqrt{2}} \\ \frac{1}{24} - \frac{i}{18\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{72} \\ -\frac{5}{72} \end{pmatrix},$$

$$R_{3_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{729} - \frac{13i}{1458\sqrt{2}} \\ \frac{2}{243} + \frac{13i}{486\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

پس

$$\Psi_{2_\circ} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{81} + \frac{i\sqrt{2}}{27} \\ -\frac{2}{27} + \frac{i\sqrt{2}}{27} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

حال با محاسبه ی طرف راست رابطه ی (4.5) داریم:

$$2R_{2_\circ}(\zeta_\circ, \Psi_{11}) + 2R_{2_\circ}(\bar{\zeta}_\circ, \Psi_{2_\circ}) + 3R_{3_\circ}(\zeta_\circ, \zeta_\circ, \bar{\zeta}_\circ) = \begin{pmatrix} -\frac{35}{2916} - \frac{14i\sqrt{2}}{729} \\ \frac{11}{972} - \frac{10i\sqrt{2}}{243} \end{pmatrix}.$$

با توجه به این که بردار ویژه‌ی

$$\zeta_o^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9i\sqrt{2} \\ 2 - i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

از عمل‌گر الحاقی در شرایط $(-\frac{i}{4\sqrt{2}}\mathbb{I} - L_o^*)\zeta_o^* = 0$ و $\langle \zeta_o, \zeta_o^* \rangle = 1$ صادق است و چون

$$\langle (\frac{i}{4\sqrt{2}}\mathbb{I} - L_o)\Psi_{21}, \zeta_o^* \rangle = \langle \Psi_{21}, (\frac{i}{4\sqrt{2}}\mathbb{I} - L_o)^*\zeta_o^* \rangle = \langle \Psi_{21}, (-\frac{i}{4\sqrt{2}}\mathbb{I} - L_o^*)\zeta_o^* \rangle = 0,$$

پس با ضرب داخلی ζ_o^* در رابطه‌ی (۴.۵) می‌توان نوشت:

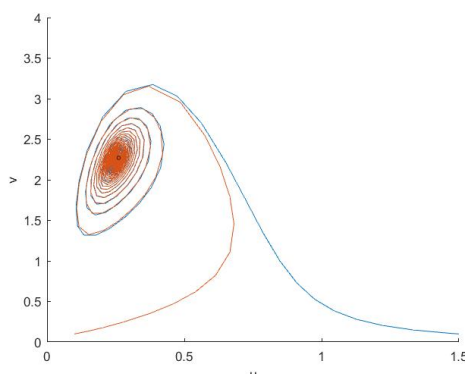
$$\begin{aligned} b &= \langle 2R_{2o}(\zeta_o, \Psi_{11}) + 2R_{2o}(\bar{\zeta}_o, \Psi_{2o}) + 3R_{3o}(\zeta_o, \zeta_o, \bar{\zeta}_o), \zeta_o^* \rangle \\ &= \left\langle \left(-\frac{35}{2916} - \frac{14i\sqrt{2}}{729}, \frac{11}{972} - \frac{10i\sqrt{2}}{243} \right)^T, \frac{1}{4} (9i\sqrt{2}, 2 - i\sqrt{2})^T \right\rangle \\ &= -\frac{13}{216} + \frac{i}{54\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین، $b_r = \text{Re}(b) = -\frac{13}{216} < 0$. حال از قضیه‌ی ۶.۲ در فصل ۱ [۱۰] نتیجه می‌شود که یک انشعاب هایف فوق‌بحرانی در $\mu = 0$ رخ می‌دهد. از آنجایی که $a_r b_r = \frac{13}{108} > 0$ ، دستگاه (۵.۱) برای $\mu < 0$ (یعنی برای $\beta < \frac{1}{3}$ یا $a > 4$) یک جواب تعادلی و یک مدار تناوبی منحصر به فرد دارد. این مدار تناوبی پایدار است؛ زیرا $b_r < 0$ ؛ درحالی که جواب تعادلی ناپایدار است. به‌علاوه، دامنه نوسان مدار تناوبی منشعب‌شده از مرتبه‌ی $O(|\mu|^{1/2})$ است. توجه داشته باشیم که مدار تناوبی ناشی از انشعاب هایف متناظر با یک تعامل بیولوژیکی نوسانی بین دوگونه‌ی شکار و شکارچی در یک محیط حفاظت‌شده است.

۶ شبیه‌سازی عددی

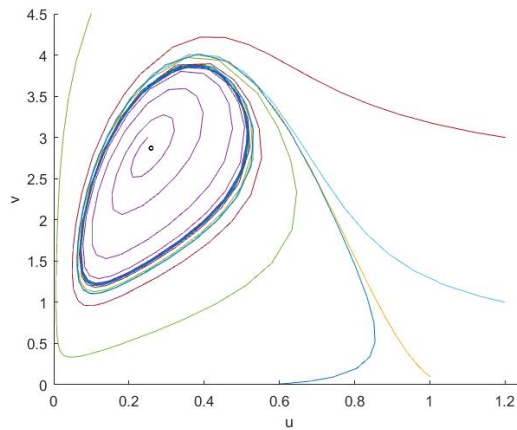
در این بخش، به ارائه‌ی شبیه‌سازی‌های عددی برای تایید یافته‌های تحلیلی بخش‌های قبلی می‌پردازیم. شکل‌های ارائه‌شده در این بخش توسط نرم افزار متلب تولید شده‌اند. بحث را با بیان چند مثال عددی شروع می‌کنیم.

مثال ۱.۶. دستگاه (۷.۱) را با $s = \frac{1}{4}$ ، $a = 4$ و $b = 12$ در نظر می‌گیریم. نمای فاز دستگاه (۷.۱) در ربع اول (ناحیه مثبت صفحه)، در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این حالت، نقطه تعادل مثبت $E^* = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ ، یک کانون ضعیف مرتبه یک است.



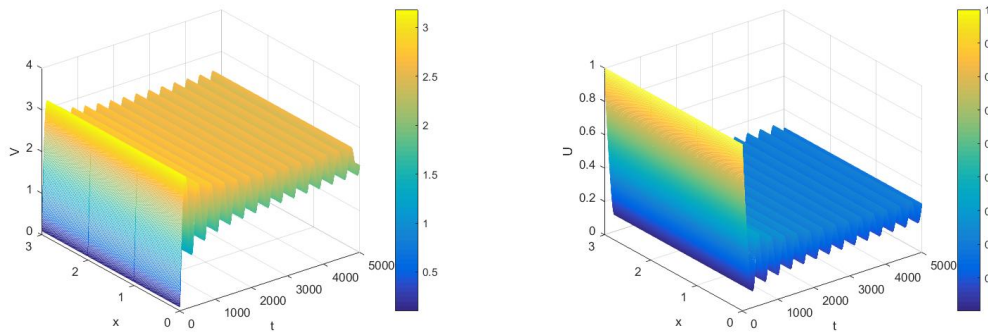
شکل ۱: نمای فاز دستگاه (۷.۱) در ربع اول برای $(s, a, b) = (\frac{1}{4}, 4, 12)$.

مثال ۲.۶. دستگاه (۷.۱) را با $s = \frac{1}{4}$ ، $a = 5$ و $b = \frac{243}{16}$ در نظر می‌گیریم. نمای فاز دستگاه (۷.۱) در ربع اول، در شکل ۲ نمایش داده شده است. در این حالت، نقطه تعادل مثبت $E^* = (\frac{1}{4}, \frac{729}{256})$ یک کانون قوی ناپایدار است و یک دور حدی پایدار وجود دارد که از انشعاب هایف فوق‌بحرانی پدید آمده است.



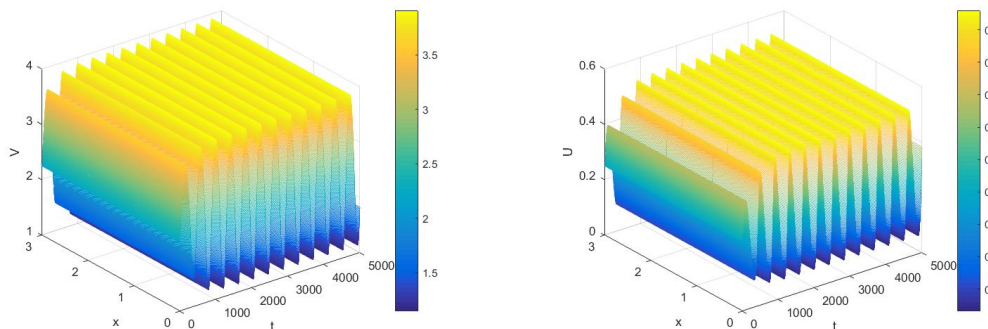
شکل ۲: نمای فاز دستگاه (۷.۱) در ربع اول برای $(s, a, b) = (\frac{1}{4}, 5, \frac{243}{16})$.

مثال ۳.۶. دستگاه (۵.۱) را با $\delta_1 = \delta_2 = 1$ و $a = 4, s = \frac{1}{4}, b = 12$ در نظر می گیریم. جواب دستگاه (۵.۱) با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (1, 0)$ در شکل ۳ برای $0 \leq t \leq 5000$ نشان داده شده است. در این حالت، جواب تعادلی $E^* = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ پایدار است.



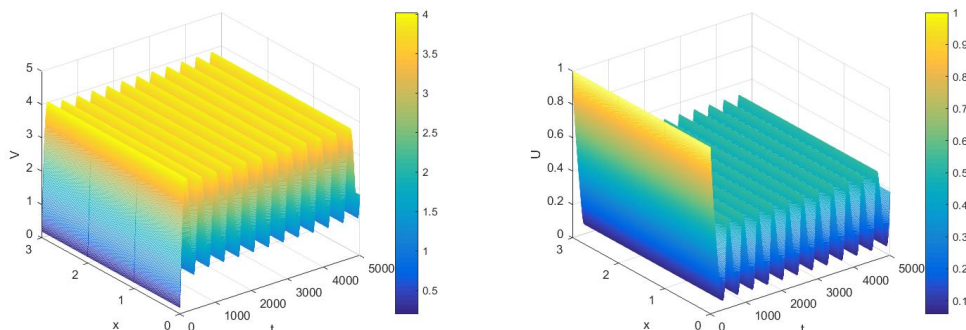
شکل ۳: نمودار توابع $u = u(x, t)$ و $v = v(x, t)$ به عنوان جواب دستگاه (۵.۱) برای $(\delta_1, \delta_2, s, a, b) = (1, 1, \frac{1}{4}, 4, 12)$ و با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (1, 0)$.

مثال ۴.۶. دستگاه (۵.۱) را با $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, a = 5, s = \frac{1}{4}, b = \frac{243}{16}$ در نظر می گیریم. جواب (۵.۱) با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (0.25, 2.25)$ در شکل ۴ برای $0 \leq t \leq 5000$ نشان داده شده است. در این حالت، جواب تعادلی $E^* = (\frac{1}{4}, \frac{249}{16})$ ناپایدار است. به علاوه، یک دور حدی پایدار وجود دارد که در اثر انشعاب هاپف بوجود آمده است.



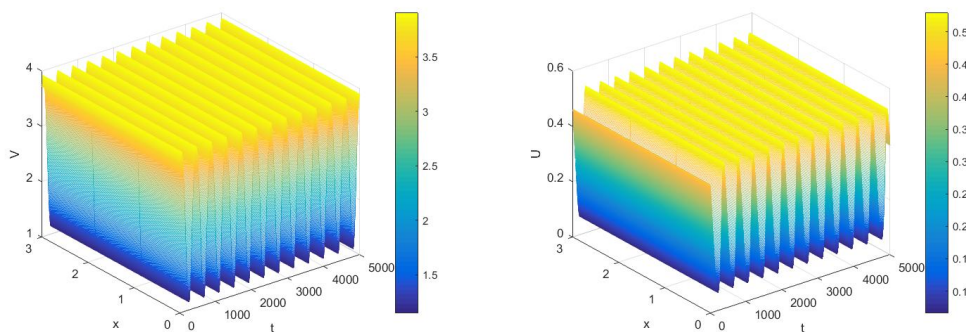
شکل ۴: نمودار توابع $u = u(x, t)$ و $v = v(x, t)$ به عنوان جواب دستگاه (۵.۱) برای $(\delta_1, \delta_2, s, a, b) = (1, 2, \frac{1}{4}, 5, \frac{243}{16})$ و با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (0.25, 2.25)$.

مثال ۵.۶. دستگاه (۵.۱) را با $\delta_1 = 2, \delta_2 = 1, s = \frac{1}{4}, a = 5, b = \frac{243}{16}$ در نظر می‌گیریم. جواب دستگاه (۵.۱) با مقادیر اولیه $E^* = (\frac{1}{4}, \frac{729}{256})$ در شکل ۵ برای $0 \leq t \leq 5000$ نشان داده شده است. در این حالت، جواب تعادلی $(u_0, v_0) = (1, 0.2)$ ناپایدار است. به علاوه، یک دور حدی پایدار وجود دارد که بر اثر انشعاب هاپف بوجود آمده است.



شکل ۵: نمودار توابع $u = u(x, t)$ و $v = v(x, t)$ به‌عنوان جواب دستگاه (۵.۱) برای $(\delta_1, \delta_2, s, a, b) = (2, 1, \frac{1}{4}, 5, \frac{243}{16})$ و با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (1, 0.2)$.

مثال ۶.۶. دستگاه (۵.۱) را با $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, s = \frac{1}{4}, a = 5, b = \frac{243}{16}$ در نظر می‌گیریم. جواب دستگاه (۵.۱) با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (0.462059383406062, 3.724805420772784)$ در شکل ۶ برای $0 \leq t \leq 5000$ نشان داده شده است. این جواب یک دور حدی پایدار است که از انشعاب هاپف پدید آمده است.



شکل ۶: نمودار توابع $u = u(x, t)$ و $v = v(x, t)$ نمایش‌دهنده دور حدی دستگاه (۵.۱) برای $(\delta_1, \delta_2, s, a, b) = (1, 2, \frac{1}{4}, 5, \frac{243}{16})$ و با مقادیر اولیه $(u_0, v_0) = (0.462059383406062, 3.724805420772784)$.

فهرست منابع

[1] Adams R. A., *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York, London, 1975.

[2] Adams R.A. and Fournier J.J.F., *Sobolev spaces*, London: Academic Press, 2003.

[3] Ajraldi V. and Venturino E., *Mimicking spatial effects in predator-prey models with group defense*, Proceedings of the 2009 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, **1** (2009) 57-67.

[4] Ajraldi V., Pittavino M. and Venturino E., *Modeling Herd behavior in population systems*, Nonlin. Anal. Real World App., **12** (2011) 2319-2338.

- [5] Boudjema I. and Djilali S., *Turing-Hopf bifurcation in Gauss-type model with cross diffusion and its application*, Nonlinear Stud., **25** (2018) 665-687.
- [6] Braza P.A., *Predator-prey dynamics with square root functional responses*, Nonlin. Anal. Real World. Appl., **13** (2012) 1837-1843.
- [7] Cosner C., DeAngelis D.L., Ault J.S. and Olson D.B., *Effects of spatial grouping on the functional response of predators*, Theoretical, Population Biology, **56** (1999) 65-75.
- [8] Djilali S., *Herd behavior in a predator-prey model with spatial diffusion: bifurcation analysis and Turing instability*, J. Appl. Math. Comput., **58** (2018) 125-149.
- [9] Djilali S., *Impact of prey herd shape on the predator-prey interaction*, Chaos, Solitons and Fractals, **120** (2019) 139-148.
- [10] Haragus M. and Iooss G., *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Universitext, Springer London, 2011.
- [11] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, Reprint of the 1980 ed. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [12] Lotka A.J., *Relation between birth rates and death rates*, Advanced Science, **26** (1907) 21-22.
- [13] Song Y. and Tang X., *Stability, steady-state bifurcations, and Turing patterns in predator-prey model with herd behavior and prey-taxis*, Stud. Appl. Math., **139** (2017) 371-404.
- [14] Song Y., Yin T. and Shu H., *Dynamics of ratio-dependent stage structured predator-prey model with delay*, Math. Meth. Appl. Sci., **40** (2017) 6451-6467.
- [15] Tang X. and Song Y., *Bifurcation analysis and Turing instability in a diffusive predator-prey model with herd behavior and hyperbolic mortality*, Chaos, Solitons and Fractals, **81** (2015) 303-314.
- [16] Venturino E., *A minimal model for ecoepidemics with group defense*, J. Biol. Syst., **19** (2011) 763-785.
- [17] Venturino E. and Petrovskii S., *Spatiotemporal behavior of a prey-predator system with a group defense for prey*, Ecol. Compl., **14** (2013) 37-47.
- [18] Volterra V., *Sui tentative di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali*, Ann. Radioelectr. Univ. Romandes, **23** (1901) 436-458.
- [19] Yan X.P., *Stability and Hopf bifurcation for a delayed prey-predator system with diffusion effects*, Appl. Math. Comp., **192** (2007) 552-566.
- [20] Yuan S., Xu C. and Zhang T., *Spatial dynamics in a predator-prey model with herd behavior*, Chaos, **23** (2013) 033102.
- [21] Zhang X.C., Sun G.Q. and Jin Z., *Spatial dynamics in a predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response*, Phys. Rev. E, **85** (2012) 021924-14.
- [22] Zuo W.J. and Wei J.J., *Stability and bifurcation in a ratio-dependent Holling-III system with diffusion and delay*, Nonlinear Anal. Model. Control, **19** (2014) 132-153.



Hopf bifurcation in a spatial predator-prey model with the square root functional response for the predator

Rasool Kazemi¹ and Rasoul Asheghi² ¹

⁽¹⁾ Department of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran, 87317-53153

⁽²⁾ Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, 84156-83111

Communicated by: Fatemeh Helen Ghane

Received: 2022/8/25

Accepted: 2023/3/1

Abstract: In this paper, we consider a diffusive predator-prey model, in which the prey population lives in groups and has a social behavior. We show that Hopf bifurcation and the existence of a center manifold may occur. The linear stability analysis shows that a Hopf bifurcation occurs in the corresponding homogeneous system. Next, we study the effect of diffusion parameters on homogeneous dynamics. By choosing a proper bifurcation parameter, we prove that a Hopf bifurcation occurs in the nonhomogeneous system. We compute the normal form of this bifurcation up to the third order and obtain the direction of the Hopf bifurcation. Finally, we provide numerical simulations to illustrate our analytical findings.

Keywords: Hopf bifurcation, Spatial diffusion, Predator-prey model, Functional response.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author.

E-mail addresses: r.kazemi@kashanu.ac.ir (R. Kazemi), r.asheghi@iut.ac.ir (R. Asheghi).