مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۲۶-۲۳۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.42251.2110

یک سرشت‌نمایی برای جبرهای باناخ انقباض‌پذیر

میثم میثمی صدر ×، جمال روئین

دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم‌پایه، زنجان، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۸/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۱۰

چکیده: در این یادداشت کوتاه، یک سرشت‌نمایی تازه برای انقباض‌پذیری بیان و اثبات می‌شود. در واقع نشان می‌دهیم یک جبر باناخ انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زوج از دومدول‌های باناخ روی آن جبر، زیرفضای خطی بسته تمام هم‌ریختی‌های مدولی پیوسته بین آنها، در فضای همه عملگرهای خطی و کران‌دار بین آنها، به‌صورت طبیعی متمم‌پذیر توپولوژیکی باشد. در اینجا، واژه طبیعی به‌مفهوم آن در نظریه رسته به‌کار برده شده است.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، میانگین‌پذیری، انقباض‌پذیری، رسته مدول‌های باناخ.

رده‌بندی ریاضی: 46H20; 46H25

۱ مقدمه

فرض کنید A جبر باناخ باشد. به A انقباض‌پذیر گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر A–دومدول باناخ E، هر اشتقاق پیوسته از A به E درونی باشد. مفهوم انقباض‌پذیری در مبحث کوهمولوژی جبرهای باناخ، گونه‌ای از مفاهیم متنوع و پرشمار میانگین‌پذیری است که پس از مقاله بسیار شاخص و جریان‌ساز جانسون [۱] معرفی شده‌اند. برای توضیحات مفصل در این زمینه مراجع [۲]،[۳]،[۴] را ببینید. می‌دانیم که جبرهای ماتریسی کامل و جمع مستقیم هر تعداد متناهی از آنها انقباض‌پذیراند. هم‌چنین همه جبرهای باناخ انقباض‌پذیر با بعد متناهی بدین شکل‌اند (بخش اول از فصل چهارم مرجع [۴] را ببینید). اینها تنها مثال‌هایی از جبرهای باناخ انقباض‌پذیراند که تاکنون شناخته شده‌اند. درواقع، یکی از قدیمی‌ترین پرسش‌های پاسخ داده نشده در میانگین‌پذیری جبرهای باناخ (مسئله پانزدهم صفحه ۲۲۴ از مرجع [۳]) می‌پرسد که آیا هر جبر باناخ انقباض‌پذیر از بعد متناهی است؟ برای آگاهی از حالت‌های خاص حل‌شده این مسئله، بخش اول از فصل چهارم مرجع [۴] و هم‌چنین صفحه ۱۹۶ آن را ملاحظه کنید. سرشت‌نمایی‌های بیان شده در قضیه زیر برای مفهوم انقباض‌پذیری جبرهای باناخ معروف و شناخته شده‌اند. (بخش اول از فصل چهارم مرجع [۳] را ملاحظه کنید. هم‌چنین در بخش ۳ توضیحاتی پیرامون آنها داده شده است.)

قضیه ۱.۱. برای جبرباناخ A شرایط زیر هم‌ارزند:

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: sadr@iasbs.ac.ir (Maysam Maysami Sadr) rooin@iasbs.ac.ir (Jamal Rooin)

(الف) جبر A انقباض‌پذیر است.

(ب) به‌ازای هر A–دومدول باناخ E، گروه اول کوهمولوژی هاخشیلد توپولوژیکی A با مقادیر در E، بدیهی است.

(ج) به‌ازای هر A–دومدول باناخ E و هر عدد طبیعی $n \geq ۱$، گروه nام کوهمولوژی هاخشیلد توپولوژیکی A با مقادیر در E، بدیهی است.

(د) جبر A یک‌دار است و $A \otimes_\pi A$ شامل حداقل یک قطر برای A است. (برای تعریف قطر، بخش ۳ را ببینید.)

(ه) جبر A یک‌دار است و نگاشت قطری

$$\Delta : A \otimes_\pi A \to A$$

از راست دارای حداقل یک وارون خطی و کران‌دار است که هم‌ریختی دومدولی نیز است.

(و) جبر A یک‌دار است و نگاشت نشاننده

$$\ker(\Delta) \to A \otimes_\pi A$$

از چپ دارای حداقل یک وارون خطی و کران‌دار است که هم‌ریختی دومدولی نیز است.

هدف از این یادداشت کوتاه، ارائه سرشت‌نمایی تازه برای مفهوم انقباض‌پذیری است. در واقع نشان می‌دهیم یک جبر باناخ یک‌دار انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زوج از دومدول‌های باناخ روی آن جبر، زیرفضای بسته تمام هم‌ریختی‌های مدولی کران‌دار بین آنها، در فضای همه عملگرهای خطی و کران‌دار بین آنها، به‌صورت طبیعی متمم‌پذیر توپولوژیکی باشد. در اینجا واژه طبیعی به‌مفهوم آن در نظریه رسته به‌کار برده شده است. در بخش ۲ صورت‌بندی دقیق این سرشت‌نمایی را بیان می‌کنیم و در بخش ۳ آن را اثبات می‌کنیم. امیدواریم که دانستن چنین سرشت‌نمایی از انقباض‌پذیری کمک کند تا در آینده حدس اصلی این مبحث (متناهی بعد بودن جبرهای انقباض‌پذیر) پاسخ داده شود.

۲ صورت‌بندی نتیجه اصلی

فرض کنید A جبر باناخ باشد. به یک A–مدول چپ E، باناخ گفته می‌شود هرگاه روی فضای برداری زمینه E یک نرم کامل داده شده باشد و ضرب مدولی E به‌عنوان یک تابع دوخطی $A \times E \to E$ کران‌دار باشد. به‌طور مشابه، A–مدول‌های باناخ راست و A–دومدول‌های باناخ تعریف می‌شوند. عنصر یکه جبرهای یک‌دار را با ۱ نمایش می‌دهیم. اگر جبر A یک‌دار باشد به A–مدول چپ E یکه‌بان گوییم هرگاه به‌ازای هر x در E داشته باشیم $۱x = x$. به‌طور مشابه، A–مدول‌های راست یکه‌بان و A–دومدول‌های یکه‌بان تعریف می‌شوند.

برای فضاهای باناخ E, F، فضای باناخ همه عملگرهای خطی و کران‌دار از E به F، همراه با نرم عملگری را با $\mathcal{L}(E, F)$ نمایش می‌دهیم. اگر E, F، مدول‌های باناخ چپ (به‌ترتیب، راست) روی A باشند آن‌گاه ${}_A\mathcal{L}(E, F)$ (به‌ترتیب، $\mathcal{L}_A(E, F)$) زیرفضای خطی بسته از $\mathcal{L}(E, F)$ متشکل از همه هم‌ریختی‌های A–مدولی کران‌دار از E به F را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه وقتی که E, F، دومدول باناخ روی A باشند، ${}_A\mathcal{L}_A(E, F)$ تعریف می‌شود.

فرض کنید F زیرفضای خطی بسته فضای باناخ E باشد. به F متمم‌پذیر توپولوژیک در E گویند هرگاه زیرفضای خطی بسته F' از E چنان موجود باشد که $E = F \oplus F'$. در این‌صورت، به F' یک متمم توپولوژیک برای F گویند. مقصود از یک نگاشت تصویر روی F، نگاشت خطی پیوسته و پوشایی مانند $p : E \to F$ است به‌طوری‌که $p^۲ = p$. به‌سادگی دیده می‌شود که تناظر $p \mapsto \ker(p)$ یک تناظر یک‌به‌یک و پوشا از مجموعه تمام نگاشت‌های تصویر به‌روی F، به مجموعه همه متمم‌های توپولوژیک F در E است.

برای جبر باناخ یک‌دار A، رسته همه A–مدول‌های باناخ چپ یکه‌بان را (همراه با هم‌ریختی‌های مدولی به‌عنوان ریختارهای رسته) با ${}_A\mathbf{Mod}$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه نمادهای $\mathbf{Mod}_A$ و ${}_A\mathbf{Mod}_A$ تعریف می‌شوند. هم‌چنین، رسته فضاهای باناخ را (همراه با عملگرهای خطی و کران‌دار به‌عنوان ریختارهای رسته) با $\mathbf{Ban}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که می‌توان $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}_A$ را (به‌طرق گوناگون) به‌عنوان تابعگون انگاشت:

$$\mathcal{L} : {\mathbf{Mod}_A}^{op} \times \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ban}, \qquad (E, F) \mapsto \mathcal{L}(E, F),$$

$$\mathcal{L}_A : {\mathbf{Mod}_A}^{op} \times \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ban}, \qquad (E, F) \mapsto \mathcal{L}_A(E, F),$$

$$\mathcal{L} : {}_A{\mathbf{Mod}_A}^{op} \times {}_A\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ban}, \qquad (E, F) \mapsto \mathcal{L}(E, F),$$

به‌طور مشابه، ${}_A\mathcal{L}$ و ${}_A\mathcal{L}_A$ را می‌توان به‌عنوان تابعگون انگاشت. قضیه زیر نتیجه اصلی این یادداشت است.

قضیه **۱.۲.** فرض کنید A جبرباناخ باشد. شرایط زیر هم‌ارزند:

(الف) جبر A انقباض‌پذیر است.

(ب) جبر A یک‌دار است و یک نگاشت تصویر طبیعی از تابعگون $\mathcal{L}$ به‌روی تابعگون ${}_A\mathcal{L}_A$ وجود دارد.

با استفاده از مطلب مذکور در خصوص تناظر بین نگاشت‌های تصویر و متمم‌های توپولوژیکی، قضیه ۱.۲ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

جبر باناخ A انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر یک‌دار باشد و به‌ازای هر دو A–دومدول باناخ E و F، زیرفضای ${}_A\mathcal{L}_A(E,F)$ در $\mathcal{L}(E,F)$ به‌صورت طبیعی متمم‌پذیر توپولوژیک باشد.

۳ اثبات‌ها

فرض کنید A جبر باناخ باشد. مقصود از نگاشت قطری A نگاشت خطی منحصربه‌فرد $\Delta : A\otimes_\pi A \to A$ است که با

$$(a\otimes b)\mapsto ab \qquad (a,b\in A)$$

تعریف می‌شود. در اینجا، $\otimes_\pi$ حاصل‌ضرب تانسوری تصویری کامل‌شده فضاهای باناخ را نشان می‌دهد. توجه کنید که $A\otimes_\pi A$ یک A–دومدول باناخ است. در اینجا، ضرب مدولی چپ و راست به‌ترتیب با

$$c(a\otimes b) := ca\otimes b$$

و

$$(a\otimes b)c := a\otimes bc$$

به‌طور کامل مشخص می‌شود.

فرض کنید B یک A–دومدول باناخ باشد که فضای باناخ زمینه آن با خود A یکسان باشد و ضرب مدولی چپ آن با

$$ax := ax \qquad (a\in A, x\in B)$$

و ضرب مدولی راست آن با

$$xa := ۰ \qquad (a\in A, x\in B)$$

داده شود. در این‌صورت دیده می‌شود که نگاشت همانی از A به B یک اشتقاق پیوسته است. پس اگر A انقباض‌پذیر باشد این اشتقاق، درونی است و لذا باید عنصر e در $B=A$ موجود باشد که $ae=a$ برای هر a در A. لذا اگر A انقباض‌پذیر باشد دارای عنصر یکه چپ است. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که در این حالت، A دارای عنصر یکه راست نیز است و در نتیجه A یک‌دار است.

عنصر $M\in A\otimes_\pi A$ یک قطر برای A نامیده می‌شود هرگاه

$$\Delta(M)=۱, \qquad aM=Ma \quad (a\in A).$$

از آن‌جا که نگاشت قطری یک همریختی دومدولی است، $\ker(\Delta)$ نیز یک A–دومدول باناخ است. اشتقاق

$$D: A\to \ker(\Delta), \qquad D(a)=۱\otimes a - a\otimes ۱$$

را در نظر بگیرید. اگر A انقباض‌پذیر باشد D درونی است و از این‌رو $N\in\ker(\Delta)$ موجود است که $D(a)=Na-aN$. یعنی، در این حالت، $M:=۱\otimes ۱-N$ یک قطر برای A است. بنابراین دیدیم که جبرهای انقباض‌پذیر یک‌دار و دارای قطراند.

برعکس، فرض کنید A یک‌دار و دارای قطر M باشد. فرض کنید

$$M=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\otimes b_n, \qquad \sum_{n=۱}^{\infty}\|a_n\|\|b_n\|<\infty. \tag{۱.۳}$$

اگر $D : A\to E$ یک اشتقاق پیوسته باشد آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که برای عنصر $z=\sum_{n=۱}^{\infty} a_nD(b_n)$ از E داریم $D(a)=az-za$. یعنی D درونی است. بنابراین، A انقباض‌پذیر است.

اگر A انقباض‌پذیر با قطر M باشد آن‌گاه به‌سادگی بررسی می‌شود که نگاشت $a\mapsto aM$ یک همریختی دومدولی است که وارون راستی برای Δ است، و نگاشت $N\mapsto N-\Delta(N)M$ یک همریختی دومدولی است که وارون چپی برای نگاشت نشاننده $\ker(\Delta)\to A\otimes_\pi A$ است. عکس مطلب فوق نیز به‌سادگی قابل بررسی است.

گزاره **۱.۳.** فرض کنید A انقباض‌پذیر باشد. در این‌صورت، یک نگاشت تصویر طبیعی از $\mathcal{L}$ به‌روی $_A\mathcal{L}$ موجود است.

$$\mathcal{L},\, {}_A\mathcal{L} : {}_A\mathbf{Mod}^{op} \times {}_A\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ban}.$$

اثبات. فرض کنید M قطری از A و M به‌صورت (۱.۳) باشد. برای هر زوج (E,F) از A–مدول‌های چپ باناخ و هر $T \in \mathcal{L}(E,F)$، نگاشت $\mathcal{P}_{E,F}(T)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{P}_{E,F}(T) : E \to F, \qquad x \mapsto \sum_{n=۱}^{\infty} a_n T(b_n x).$$

در این‌صورت، $\mathcal{P}_{E,F}(T)$ عضوی از $_A\mathcal{L}(E,F)$ است. به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $T \in {}_A\mathcal{L}(E,F)$، آن‌گاه

$$\mathcal{P}_{E,F}(T) = T.$$

هم‌چنین، نگاشت

$$\mathcal{P}_{E,F} : \mathcal{L}(E,F) \to {}_A\mathcal{L}(E,F), \qquad T \mapsto \mathcal{P}_{E,F}(T)$$

خطی و کران‌دار است. بنابراین، $\mathcal{P}_{E,F}$ یک نگاشت تصویر به‌روی $_A\mathcal{L}(E,F)$ است. فرض کنید (E',F') زوج دیگری از A–مدول‌های چپ باناخ باشد و $f : E' \to E$ و $g : F \to F'$ هم‌ریختی‌های مدولی پیوسته باشند. (بنابراین (f,g) یک ریختار در $_A\mathbf{Mod}^{op} \times {}_A\mathbf{Mod}$ از شیئ (E,F) به شیء (E',F') است.) به‌سادگی بررسی می‌شود که مربع زیر در $\mathbf{Ban}$ جابه‌جایی است:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}(E,F) & \xrightarrow{\mathcal{L}(f,g)} & \mathcal{L}(E',F') \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}_{E,F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}_{E',F'}} \\
{}_A\mathcal{L}(E,F) & \xrightarrow[{}_A\mathcal{L}(f,g)]{} & {}_A\mathcal{L}(E',F')
\end{array}$$

توجه کنید که

$$\mathcal{L}(f,g)(T) := gTf \qquad (T \in \mathcal{L}(E,F)),$$
$${}_A\mathcal{L}(f,g)(h) := ghf \qquad (h \in {}_A\mathcal{L}(E,F)).$$

بنابراین، $(E,F) \mapsto \mathcal{P}_{E,F}$ یک تبدیل طبیعی از $\mathcal{L}$ به $_A\mathcal{L}$ است. به این ترتیب اثبات کامل شده است. $\square$

برای جبر باناخ A، جبر متقابل A را با A^{op} نشان می‌دهند. (بنابراین، A^{op} یک جبر باناخ است که فضای باناخ زمینه آن همان A است اما ضرب یک عنصر a در عنصر b در A^{op} برابر با عنصر ba در A تعریف می‌شود.) اگر E یک A–مدول چپ باناخ باشد آن‌گاه E به‌صورت کانونی A^{op}–مدول راست باناخ است:

$$xa := ax \qquad (a \in A^{op}, x \in E).$$

بنابراین، تابعگون همانی را می‌توان به‌عنوان یک هم‌ارزی بین $_A\mathbf{Mod}$ و $\mathbf{Mod}_{A^{op}}$ انگاشت. به‌طور مشابه، اگر که E یک A–دومدول باناخ باشد آن‌گاه E به‌صورت کانونی یک $A \otimes_\pi A^{op}$–مدول چپ باناخ است:

$$(a \otimes b)x := axb \qquad (a \in A, b \in A^{op}, x \in E).$$

از این‌رو، تابعگون همانی را می‌توان به‌عنوان یک هم‌ارزی بین $_A\mathbf{Mod}_A$ و $_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod}$ گرفت:

$$ {}_A\mathbf{Mod}_A \cong {}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod} \tag{۲.۳}$$

اگر A جبر باناخ انقباض‌پذیر باشد آن‌گاه A^{op} نیز انقباض‌پذیر است. درواقع، اگر M قطری برای A به‌صورت (۱.۳) باشد، آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \otimes a_n$ یک قطر برای A^{op} است.

اگر A و A' جبرهای باناخ انقباض‌پذیر باشند آن‌گاه $A \otimes_\pi A'$ نیز انقباض‌پذیر است. درواقع، اگر M مانند (۱.۳) قطری برای A باشد و به‌طور مشابه $M' = \sum_{n=۱}^{\infty} a'_n \otimes b'_n$ قطری برای A'، آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{n'=۱}^{\infty} a_n \otimes a_{n'} \otimes b_n \otimes b_{n'}$$

قطری برای $A \otimes_\pi A'$ است.

اثبات قسمت (الف) $\Leftarrow$ (ب) از قضیه ۱.۲

فرض کنید A انقباض‌پذیر باشد. بنابراین، جبر باناخ $A \otimes_\pi A^{op}$ نیز انقباض‌پذیر است. از به‌کار بردن گزاره ۱.۳ برای $A \otimes_\pi A^{op}$ نتیجه می‌شود که یک نگاشت تصویر طبیعی از

$$\mathcal{L} : {}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod}^{op} \times {}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ban}$$

به‌روی

$${}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathcal{L} : {}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod}^{op} \times {}_{A\otimes_\pi A^{op}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ban}$$

وجود دارد. از هم‌ارزی (۲.۳) نتیجه می‌شود که این تبدیل طبیعی را می‌توان به‌صورت یک نگاشت تصویر طبیعی از

$$\mathcal{L} : {}_A\mathbf{Mod}_A{}^{op} \times {}_A\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ban}$$

به‌روی

$${}_A\mathcal{L}_A : {}_A\mathbf{Mod}_A{}^{op} \times {}_A\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ban}$$

انگاشت.

اثبات قسمت (ب) $\Leftarrow$ (الف) از قضیه ۱.۲

فرض کنید A یک‌دار باشد و $\mathcal{P}$ یک نگاشت تصویر طبیعی از $\mathcal{L}$ به ${}_A\mathcal{L}_A$ باشد. فرض کنید E, F, G سه A-دومدول باناخ باشند و فرض کنید

$$f \in {}_A\mathcal{L}_A(F, G), \qquad T \in \mathcal{L}(E, F).$$

می‌دانیم مربع زیر در $\mathbf{Ban}$ جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(E,F) \arrow[r, "\mathcal{L}(\mathrm{id},f)"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{E,F}"'] & \mathcal{L}(E,G) \arrow[d, "\mathcal{P}_{E,G}"] \\
{}_A\mathcal{L}_A(E,F) \arrow[r, "{}_A\mathcal{L}_A(\mathrm{id},f)"'] & {}_A\mathcal{L}_A(E,G)
\end{tikzcd}$$

بنابراین داریم:

$$f\mathcal{P}_{E,F}(T) = \mathcal{P}_{E,G}(fT). \qquad (۳.۳)$$

تساوی (۳.۳) برای

$$E := A, \qquad F := A \otimes_\pi A, \qquad G := A, \qquad f := \Delta$$

و

$$T : A \to A \otimes_\pi A, \qquad T(a) = a \otimes ۱,$$

تبدیل می‌شود به

$$\Delta\mathcal{P}_{A,A\otimes_\pi A}(T) = \mathrm{id}_A.$$

بنابراین نگاشت قطری یک وارون راست خطی و کران‌دار دارد که همریختی دومدولی نیز است. پس، A انقباض‌پذیر است.

ملاحظه ۲.۳. از اثبات‌های بالا دیده می‌شود که برای هر جبر باناخ انقباض‌پذیر A، تناظر یک‌به‌یک و پوشایی بین قطرهای جبر A و نگاشت‌های تصویر طبیعی از $\mathcal{L}$ به ${}_A\mathcal{L}_A$ (به‌ترتیب، ${}_A\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}_A$) وجود دارد.

فهرست منابع

[1] B.E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 127, 1972.

[2] O.T. Mewomo, Various notions of amenability in Banach algebras, Expositiones Mathematicae **29** (2011) 283–299.

[3] V. Runde, *Lectures on amenability*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.

[4] V. Runde, *Amenable Banach algebras*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin, 2020.

A characterization for contractible Banach algebras

Maysam Maysami Sadr [†] **, Jamal Rooin**

Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2022/11/2 Accepted: 2023/7/1

Abstract: In this short note, the following new characterization of contractibility is stated and proved: A Banach algebra is contractible if and only if for any pair of Banach bimodules over that algebra, the closed linear subspace of all continuous bimodule morphisms between them, in the space of all bounded linear operators between them, is naturally topological complemented. Here, the phrase "natural" has been used with its meaning in Category Theory.

Keywords: Banach algebra, amenability, contractibility, category of Banach modules.

[†] *E-mail addresse:* sadr@iasbs.ac.ir (M.M. Sadr)