مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۵۰-۲۵۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.43821.2166

قضیه صفرشدن لیختنبام–هارتشورن برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته

علی فتحی [×]

گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

دبیر مسئول: امیر مافی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۱

چکیده: فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری است و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل سره R است. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد ناصفر است که دارای بُعد تصویری متناهی p است. هم‌چنین فرض کنیم N یک R–مدول متناهی‌مولد ناصفر است به‌طوری‌که $N \neq \mathfrak{a}N$ و c بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی i با این خاصیت است که $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N)$، i–امین مدول کوهمولوژی موضعی N نسبت به $\mathfrak{a}$، ناصفر است. $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$، i–امین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته M و N نسبت به $\mathfrak{a}$، برای هر i که $p+c < i$، صفر است. در این مقاله ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ را به‌دست می‌آوریم. با استفاده از این مطلب، در حالتی که R یک حلقه موضعی است و c برابر بُعد N است، شرط لازم و کافی برای صفرشدن $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ را به‌دست می‌آوریم که قضیه صفرشدن لیختنبام–هارتشورن را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته گسترش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، قضیه صفرشدن لیختنبام–هارتشورن، ایده‌آل اول هم‌وابسته، ایده‌آل اول چسبیده.

رده‌بندی ریاضی: 13D45; 13E05; 13E15

۱ مقدمه

در سراسر این مقاله R یک حلقه جابه‌جایی، یک‌دار و نوتری است. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R و N یک R–مدول است. گروتندیک،[†] i–امین مدول کوهمولوژی موضعی N نسبت به $\mathfrak{a}$ را به‌صورت زیر تعریف کرده است:

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N) := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n, N);$$

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: alif1387@gmail.com (A. Fathi)

[†]Grothendieck

برای جزئیات بیش‌تر به [۲] مراجعه شود. اگر M، R–مدول دیگری باشد، به‌عنوان تعمیمی از مدول کوهمولوژی موضعی، هرزوگ در منبع [۱۳] مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته M و N نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N) := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_R(M/\mathfrak{a}^n M, N);$$

برای جزئیات بیش‌تر به [۱] و [۱۳] مراجعه شود. واضح است که $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(R,N)$ همان $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N)$ است. بُعد کوهمولوژی N نسبت به $\mathfrak{a}$ و بُعد کوهمولوژی M و N نسبت به $\mathfrak{a}$ به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(N) := \sup\{i \in \mathbb{N}_\circ : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N) \neq \circ\},$$

$$\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M,N) := \sup\{i \in \mathbb{N}_\circ : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N) \neq \circ\}.$$

فرض کنیم N متناهی‌مولد و دارای بُعد متناهی d است. برای هر i که $i > d$، مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N)$ صفر است [۲، قضیه ۲.۱.۶] (به‌عبارت دیگر $\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(N) \leq d$) و $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)$ آرتینی است [۲، تمرین ۷.۱.۷]. وقتی حلقه موضعی است، دیبایی و یاسمی به عنوان قضیه اصلی در [۴، قضیه اول] ثابت کرده‌اند که:

$$\mathrm{Att}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(N) : \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = d\}.$$

تساوی فوق بدون شرط موضعی بودن حلقه نیز برقرار است ([۵، قضیه ۵.۲] را ببینید). همچنین اگر M متناهی‌مولد و دارای بُعد تصویری متناهی p باشد، آن‌گاه برای هر i که $i > p+d$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$ صفر است [۱، لم ۱.۵] (یعنی $\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M,N) \leq p+d$) و $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ آرتینی است (خواننده می‌تواند برای اثبات به‌عنوان نمونه به [۱۵، قضیه ۹.۲] یا [۱۲، گزاره ۱.۳] مراجعه کند). گو و چو در منبع [۱۱، قضیه ۳.۲] با فرض این‌که R موضعی است به‌عنوان تعمیمی از قضیه دیبایی–یاسمی نشان می‌دهند که:

$$\mathrm{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(N) : \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M,R/\mathfrak{p}) = p+d\}.$$

در [۱۰، قضیه ۳.۵] فتحی، تهرانیان و ذاکری شرط موضعی بودن حلقه R را برای تساوی فوق حذف کرده‌اند. همچنین آن‌ها با فرض این‌که حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N))$ نیم‌موضعی و کامل است در [۱۰، قضیه ۶.۵] نشان می‌دهند که:

$$\mathrm{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}^p_R(M,R)) \cap \mathrm{Att}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)). \tag{۱.۱}$$

تساوی فوق از آن جهت اهمیت دارد که محاسبه ایده‌آل‌های اول چسبیده مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته بالایی $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ را به محاسبه ایده‌آل‌های اول چسبیده مدول کوهمولوژی موضعی بالایی $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)$ تقلیل می‌دهد. قرار می‌دهیم $c := \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(N)$. در این‌صورت برای هر i که $i > p+c$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$ صفر است [۱۲، گزاره ۸.۲] و چون $c \leq d$، $p+c$ کران بالای تیزتری برای $\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ ارائه می‌کند ولی دیگر لزومی ندارد که $\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)$ و $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ آرتینی باشند. در این مقاله ابتدا ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ را توسط ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته $\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)$ محاسبه می‌کنیم. به‌عبارت دقیق‌تر در قضیه ۱.۳ ثابت می‌کنیم

$$\mathrm{Coass}_R\left(\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)\right) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Coass}_R\left(\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)\right) : \mathrm{proj\,dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = p\}$$

و به‌عنوان نتیجه‌ای از آن در نتیجه ۲.۳ شرط نیم‌موضعی و کامل بودن حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N))$ را جهت برقراری تساوی (۱.۱) حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که:

$$\mathrm{Att}_R\left(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)\right) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N) : \mathrm{proj\,dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = p, \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = d\}. \tag{۲.۱}$$

به‌ویژه اگر R موضعی و M کوهن–مکالی باشد، آن‌گاه در نتیجه ۳.۳ نشان می‌دهیم که:

$$\mathrm{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N) : \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = d\}.$$

در نهایت با استفاده از تساوی (۲.۱)، قضیه صفرشدن لیختنبام–هارتشورن را برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته اثبات می‌کنیم. به‌عبارت دقیق‌تر در قضیه ۵.۳ نشان خواهیم داد که اگر R یک حلقه موضعی باشد، آن‌گاه $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ صفر است اگر و فقط اگر برای هر $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) \cap \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{N})$ که در شرایط $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = d$ و $\mathrm{proj\,dim}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = p$ صدق می‌کند، داشته باشیم $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/(\mathfrak{a}\widehat{R}+\mathfrak{P})) > \circ$.

۲ مفاهیم اولیه

فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R است. موضعی‌سازی M در $\mathfrak{p}$ را با $M_{\mathfrak{p}}$ نشان می‌دهیم و مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}$ که $M_{\mathfrak{p}}$ ناصفر است را محمل M گفته و با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین پوچساز مدول M در R را به‌صورت $\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R : x \in M \text{ برای همه } rx = ۰\}$ تعریف می‌کنیم که به وضوح ایده‌آلی از R است. اگر برای $x \in M$ ای $\mathrm{Ann}_R(Rx)$ ایده‌آلی اول باشد، آن را یک ایده‌آل اول وابسته M می‌نامیم و مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته M را با $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهیم. مجموعه تمام اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و مجموعه تمام اعداد صحیح نامنفی را با $\mathbb{N}_۰$ نشان خواهیم داد.

دوگان مفاهیم ایده‌آل اول وابسته و تجزیه اولیه توسط مک‌دونالد تحت عناوین ایده‌آل اول چسبیده و نمایش ثانویه در مقاله [۱۴] معرفی شده است. مدول M را ثانویه گوییم هرگاه $M \neq ۰$ و برای هر $r \in R$ درون‌ریختی ضربی $\mu_r : M \to M$ که برای هر $x \in M$ با ضابطه $\mu_r(x) = rx$ تعریف می‌شود، پوشا و یا پوچتوان باشد. اگر مدول M ثانویه باشد، آن‌گاه $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ ایده‌آلی اول است و M را $\mathfrak{p}$-ثانویه می‌گوییم. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول چسبیده مدول M گوییم هرگاه M دارای مدول خارج‌قسمتی $\mathfrak{p}$-ثانویه باشد و مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول چسبیده آن را با $\mathrm{Att}_R(M)$ نشان می‌دهیم. اگر مدول M را به‌توان به‌صورت جمع متناهی از زیرمدول‌های ثانویه‌اش مانند

$$M = M_۱ + \cdots + M_t$$

نوشت، می‌گوییم M دارای نمایش ثانویه است و اگر هیچ‌کدام از M_iها را که در آن $۱ \leq i \leq t$ نتوان حذف کرد و ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_۱ := \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M_۱)}$، ...، $\mathfrak{p}_t := \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M_t)}$ متمایز باشند، نمایش فوق را مینیمال می‌گوییم. با توجه به این‌که جمع دو زیرمدول $\mathfrak{p}$-ثانویه، $\mathfrak{p}$-ثانویه است، هر نمایش ثانویه را می‌توان به یک نمایش ثانویه مینیمال تبدیل کرد. اگر نمایش ثانویه فوق مینیمال باشد، آن‌گاه $\mathrm{Att}_R(M) = \{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$ و بنابراین t و $\{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$ مستقل از نمایش ثانویه مینیمال M هستند. همان‌طور که مدول‌های نوتری دارای تجزیه اولیه‌اند، مدول‌های آرتینی نیز دارای نمایش ثانویه‌اند.

یاسمی در [۱۸] دوگان دیگری از ایده‌آل اول وابسته که ایده‌آل اول هم‌وابسته نامیده می‌شود را معرفی کرده است. در تعریف یاسمی، محدودیت نمایش ثانویه داشتن مدول وجود ندارد و وقتی که مدول دارای نمایش ثانویه است مجموعه‌های ایده‌آل‌های اول چسبیده و هم‌وابسته آن یک‌سان می‌شوند (به [۱۸، قضیه ۱۴.۱] مراجعه شود).

تعریف **۱.۲.** R-مدول M را هم‌دوری گوییم هرگاه ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که M زیرمدول $E(R/\mathfrak{m})$، پوش انژکتیو $R/\mathfrak{m}$، باشد.

تعریف **۲.۲.** ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول هم‌وابسته R-مدول M گوییم هرگاه تصویر هم‌ریخت هم‌دوری مانند L از M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(L)$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته M را با $\mathrm{Coass}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

۳ نتایج اصلی

در قضیه زیر ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته بالایی را توسط ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته مدول کوهمولوژی موضعی بالایی می‌یابیم.

قضیه **۱.۳.** فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R است و M یک R-مدول متناهی‌مولد ناصفر با بُعد تصویری متناهی p است. هم‌چنین فرض کنیم N یک R-مدول است به‌طوری‌که $N \neq \mathfrak{a}N$ و $c := \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(N)$. در این‌صورت برای هر n که $p + c < n$ داریم $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M, N) = ۰$ و

$$\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^p_R(M, R) \otimes_R \mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N).$$

به‌ویژه

$$\mathrm{Coass}_R\left(\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M, N)\right) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Coass}_R\left(\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)\right) : \mathrm{proj\,dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = p\}.$$

اثبات. حسن‌زاده و وحیدی در [۱۲، گزاره ۸.۲] نشان داده‌اند برای هر n که $p + c < n$، مدول $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M, N)$ صفر است و هم‌چنین ثابت کرده‌اند که یک‌ریختی زیر وجود دارد

$$\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^p_R(M, \mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)).$$

حال تابع‌گون $\operatorname{Ext}^p_R(M,\cdot)$ جمعی و دقیق‌راست است. هم‌چنین چون M مدولی متناهی‌مولد روی حلقه نوتری است، $\operatorname{Ext}^p_R(M,\cdot)$ حافظ جمع مستقیم است [۹، لم ۱۶.۱.۳] و در نتیجه طبق [۱۷، قضیه ۴۵.۵] داریم $\operatorname{Ext}^p_R(M,\cdot)\cong\operatorname{Ext}^p_R(M,R)\otimes_R(\cdot)$. بنابراین

$$\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)\cong\operatorname{Ext}^p_R(M,R)\otimes_R\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N).$$

در نتیجه طبق [۱۸، قضیه ۲۱.۱] داریم:

$$\operatorname{Coass}_R\left(\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M,N)\right)=\operatorname{Supp}_R\left(\operatorname{Ext}^p_R(M,R)\right)\cap\operatorname{Coass}_R\left(\mathrm{H}^c_{\mathfrak{a}}(N)\right).$$

اکنون برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\operatorname{Supp}_R(\operatorname{Ext}^p_R(M,R))=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(M):\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})=p\}.$$

فرض کنیم $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(\operatorname{Ext}^p_R(M,R))$. چون M مدولی متناهی‌مولد روی حلقه نوتری R است، طبق [۱۷، گزاره ۳۹.۷] داریم:

$$\operatorname{Ext}^p_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},R_\mathfrak{p})\cong(\operatorname{Ext}^p_R(M,R))_\mathfrak{p}\neq ۰.$$

بنابراین $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(M)$ و $\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\geq p$. از آن نتیجه می‌شود $\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})=p$. برعکس فرض کنیم $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(M)$ و $\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})=p$. طبق [۱۶، بند سوم لم ۱ بخش ۱۹] داریم $\operatorname{Ext}^p_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},R_\mathfrak{p})\neq ۰$. در نتیجه $(\operatorname{Ext}^p_R(M,R))_\mathfrak{p}\neq ۰$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

فرض کنیم که مفروضات مانند نتیجه ۲.۳ است. با فرض این‌که حلقه $B:=R/\operatorname{Ann}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N))$ نیم‌موضعی و کامل است، فتحی، تهرانیان و ذاکری در [۱۰، قضیه ۶.۵] نشان می‌دهند که:

$$\operatorname{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N))=\operatorname{Supp}_R(\operatorname{Ext}^p_R(M,R))\cap\operatorname{Att}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)).$$

در نتیجه زیر نشان داده شده است که تساوی فوق بدون شرط نیم‌موضعی و کامل بودن حلقه B نیز برقرار است.

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R است و M و N، R–مدول‌های متناهی‌مولد ناصفرند که $p:=\operatorname{proj\,dim}_R(M)<\infty$ و $d:=\dim_R(N)<\infty$. در این‌صورت $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ آرتینی است و

$$\operatorname{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N))=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(M)\cap\operatorname{Ass}_R(N):\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})=p,\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p})=d\}.$$

اثبات. یادآوری می‌کنیم که تساوی فوق در بخش مقدمه با شماره (۲.۱) مشخص شده است. قرار می‌دهیم $c:=\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(N)$. طبق قضیه صفرشدن گروتندیک [۲، قضیه ۲.۱.۶] داریم $c\leq d$. حال اگر $c<d$، آن‌گاه همان‌طور که در قضیه قبلی اشاره کردیم $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ صفر است و بنابراین مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده آن تهی است. از سوی دیگر با توجه به [۷، قضیه ۲.۱] برای هر $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(N)$ داریم $\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p})\leq c<d$. در نتیجه مجموعه سمت راست در تساوی (۲.۱) نیز تهی خواهد بود و تساوی (۲.۱) در این حالت برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $c=d$. طبق [۲، تمرین ۷.۱.۷]، $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)$ آرتینی است و چون $\operatorname{Ext}^p_R(M,R)$ متناهی‌مولد است، $\operatorname{Ext}^p_R(M,R)\otimes_R\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)$ آرتینی است و از آن‌جا که این مدول با توجه به قضیه ۱.۳ یک‌ریخت با $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ است، $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ نیز آرتینی خواهد بود (آرتینی بودن $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ مطلب جدیدی نیست، برای نمونه خواننده می‌تواند به [۱۵، قضیه ۹.۲] یا [۱۲، گزاره ۱.۳] مراجعه کند). بنابراین برای مدول‌های $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(N)$ و $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)$ مجموعه ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته‌شان با مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده‌شان یک‌سان است [۱۸، قضیه ۱۴.۱]. در نتیجه از [۵، قضیه ۵.۲] و قسمت آخر قضیه ۱.۳ تساوی (۲.۱) به‌دست می‌آید. □

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه موضعی و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R است. فرض کنیم M و N، R–مدول‌های متناهی‌مولد ناصفرند به‌طوری‌که M کوهن–مکالی است، $p:=\operatorname{proj\,dim}_R(M)<\infty$ و $d:=\dim_R(N)$. در این‌صورت داریم:

$$\operatorname{Att}_R\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}_R(M)\cap\operatorname{Ass}_R(N):\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p})=d\}.$$

اثبات. طبق [۳، نتیجه ۶.۴.۹ و بند اول تذکر ۸.۴.۹] و فرمول آسلاندر–بوکسبام [۳، قضیه ۳.۳.۱] داریم:

$$\dim_R(R)\leq\operatorname{proj\,dim}_R(M)+\dim_R(M)=\operatorname{depth}_R(R).$$

بنابراین R کوهن-مکالی است. اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$، آن‌گاه $\dim_R(M/\mathfrak{p}M) = \dim_R(R/\mathfrak{p})$ و لذا طبق فرمول آسلاندر-بوکسباو و [۳، بند دوم قضیه ۳.۱.۲] خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) &= \dim_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) - \dim_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\\ &= (\dim_R(R) - \dim_R(R/\mathfrak{p})) - (\dim_R(M) - \dim_R(M/\mathfrak{p}M))\\ &= \dim_R(R) - \dim_R(M)\\ &= p.\end{aligned}$$

حال از نتیجه قبلی حکم به‌دست خواهد آمد. □

در قضیه ۵.۳، قصد داریم قضیه صفرشدن لیختنبام-هارتشورن را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته گسترش دهیم. ولی قبل از آن لم زیر که قضیه تغییر پایه یک‌دست [۲، قضیه ۲.۳.۴] را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته گسترش می‌دهد مورد نیاز است. این لم در [۸، بند دوم لم ۱.۲] بدون اثبات آمده است. در اینجا جهت راحتی خواننده ابتدا اثباتی برای آن ارائه می‌کنیم. هم‌چنین باید خاطر نشان کنیم که در لم فوق، نویسندگان محدودیتی برای مدول اول در مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته قرار نمی‌دهند ولی در اثباتی که ما در لم زیر ارائه می‌کنیم، نیاز داریم که مدول اول را متناهی‌مولد فرض کنیم.

لم ۴.۳ ([۸، بند دوم لم ۱.۲]). فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایدهآل R است، M یک R-مدول متناهی‌مولد و N یک R-مدول دل‌خواه است. فرض کنیم B یک R-جبر یک‌دست است. در این‌صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$ داریم:

$$B \otimes_R \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,N) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}B}(B\otimes_R M, B\otimes_R N).$$

اثبات. برای هر $n \in \mathbb{N}_\circ$ یک‌ریختی زیر را داریم:

$$\begin{aligned}B\otimes_R (M/\mathfrak{a}^n M) &\cong B\otimes_R M \otimes_R (R/\mathfrak{a}^n)\\ &\cong (B\otimes_R M)\otimes_B B\otimes_R (R/\mathfrak{a}^n)\\ &\cong (B\otimes_R M)\otimes_B (B/\mathfrak{a}^n B)\\ &\cong (B\otimes_R M)\otimes_B (B/(\mathfrak{a}B)^n)\\ &\cong (B\otimes_R M)/(\mathfrak{a}B)^n(B\otimes_R M).\end{aligned}$$

حال طبق [۱۷، قضیه ۲۷.۵]، [۹، قضیه ۵.۲.۳] و یک‌ریختی فوق داریم:

$$\begin{aligned}B\otimes_R \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,N) &\cong B\otimes_R \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_R(M/\mathfrak{a}^n M, N)\\ &\cong \varinjlim_n (B\otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M/\mathfrak{a}^n M, N))\\ &\cong \varinjlim_n (\mathrm{Ext}^i_B((B\otimes_R M)/(\mathfrak{a}B)^n(B\otimes M), B\otimes_R N)\\ &\cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}B}(B\otimes_R M, B\otimes_R N)\end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۵.۳ (قضیه صفرشدن لیختنبام-هارتشورن برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته). فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و $\mathfrak{a}$ یک ایدهآل سره R است. فرض کنیم M و N دو R-مدول متناهی‌مولد ناصفرند به‌طوری‌که $p := \operatorname{proj\,dim}_R(M) < \infty$ و $d := \dim_R(N)$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(آ) $\mathrm{H}^{p+d}_\mathfrak{a}(M,N) = \circ$؛

(ب) برای هر $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) \cap \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{N})$ که در شرایط $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = d$ و $\operatorname{proj\,dim}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) = p$ صدق می‌کند، داریم $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/(\mathfrak{a}\widehat{R}+\mathfrak{P})) > \circ$.

اثبات. $\widehat{R}$ یک حلقه موضعی و نوتری با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}\widehat{R}$ است [۱۶، قضیه ۱۲۸] و برای هر R–مدول متناهی‌مولد مانند L داریم $L \otimes_R \widehat{R} = \widehat{L}$ [۱۶، قضیه ۷۸]. چون $\widehat{R}$ یک R–جبر یک‌دست است [۱۶، قضیه ۸۸]، طبق لم ۴.۳ داریم:

$$\widehat{R} \otimes_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N}).$$

چون $\widehat{R}$ به عنوان R–مدول یک‌دست وفادار است [۱۶، قضیه ۱۴۸]، طبق یکریختی فوق $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$ صفر است اگر و تنها اگر $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N})$ صفر باشد. همچنین برای هر مدول متناهی‌مولد مانند L طبق [۳، بند اول نتیجه ۸.۱.۲] داریم:

$$\operatorname{depth}_{\widehat{R}}(\widehat{L}) = \operatorname{depth}_R(L),\ \dim_{\widehat{R}}(\widehat{L}) = \dim_R(L).$$

علاوه بر آن M دارای تحلیل آزاد متناهی از R–مدول‌های آزاد متناهی‌مولد است که با تانسور این تحلیل آزاد در $\widehat{R}$ یک تحلیل آزاد متناهی روی حلقه $\widehat{R}$ برای $\widehat{M}$ به‌دست می‌آید و بنابراین $\operatorname{proj\,dim}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) < \infty$. در نتیجه طبق تساوی سمت چپ در بالا و فرمول آسلاندر–بوکسبام [۳، قضیه ۳.۳.۱] داریم:

$$\operatorname{proj\,dim}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) = \operatorname{proj\,dim}_R(M).$$

بنابراین بدون این‌که از کلیت مساله کاسته شود می‌توانیم $\widehat{M}$، $\widehat{N}$ و $\widehat{R}$ را با M، N و R عوض کرده و فرض کنیم حلقه کامل است.

(آ)$\Leftarrow$(ب). فرض کنیم $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N) = ۰$. همچنین فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M) \cap \operatorname{Ass}_R(N)$ به‌گونه‌ای است که $\dim_R(R/\mathfrak{p}) = d$ و $\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = p$. چون $\operatorname{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N)) = \emptyset$، طبق نتیجه ۲.۳ داریم $\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) < d$، بنابراین $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = ۰$. از قضیه استقلال [۲، قضیه ۱.۲.۴] داریم $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}+\mathfrak{p}}(R/\mathfrak{p}) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = ۰$. چون $\dim_R(R/\mathfrak{p}) = d$، طبق قضیه ناصفرشدن گروتندیک [۲، قضیه ۴.۱.۶] ایدآل سره $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ نمی‌تواند $\mathfrak{m}$–اولیه باشد و بنابراین $\dim_R(R/(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})) > ۰$.

(ب)$\Leftarrow$(آ). فرض کنیم شرط (ب) برقرار باشد. اگر $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N) \neq ۰$، آن‌گاه $\operatorname{Att}_R(\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N))$ تهی نیست و بنابراین طبق نتیجه ۲.۳، $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M) \cap \operatorname{Ass}_R(N)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = d$ و $\operatorname{proj\,dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = p$. طبق قضیه صفرشدن گروتندیک [۲، قضیه ۲.۱.۶] داریم $\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) \leq \dim_R(R/\mathfrak{p})$. بنابراین $\dim_R(R/\mathfrak{p}) = d$. اکنون طبق شرط (ب)، $\dim_R(R/(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})) > ۰$. در نتیجه از قضیه لیختنبام–هارتشورن ([۲، قضیه ۱.۲.۸ و تمرین ۳.۲.۸]) برای مدول $R/\mathfrak{p}$ داریم $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) = ۰$. از آن نتیجه می‌شود $\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) < d$ که تناقض است. بنابراین $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{a}}(M,N) = ۰$. □

ملاحظه **۶.۳**. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی است. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد ناصفر است که دارای بعد تصویری متناهی p است و همچنین N یک R–مدول متناهی‌مولد ناصفر با بُعد d است. با توجه به قضایای صفرشدن و صفرنشدن گروتندیک [۲، قضایای ۲.۱.۶ و ۴.۱.۶] می‌دانیم $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(N) = \dim_R(N)$. مقدار دقیق $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,N)$ با مفروضات فوق نامعلوم است. البته اگر علاوه بر مفروضات فوق R کوهن–مکالی نیز باشد، دیوانی‌آذر و حاجی‌کریمی در [۶، قضیه ۵.۳] نشان می‌دهند که:

$$\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,N) = \dim_R(R) - \operatorname{grade}_R(\operatorname{Ann}_R(N),M).$$

می‌دانیم $p+d$ کران بالایی برای $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,N)$ است و با فرض $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ در قضیه ۵.۳ ممکن است به اشتباه تصور شود که چون برای هر ایدآل اول $\mathfrak{P}$ از حلقه $\widehat{R}$ داریم $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R}+\mathfrak{P}) = ۰$ پس گزاره (ب) در قضیه ۵.۳ نادرست است و بنابراین $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{m}}(M,N)$ ناصفر است و درنتیجه $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,N) = p+d$. ولی مثال زیر نشان می‌دهد که این تساوی درست نیست و $p+d$ ممکن است کران بالای اکید $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,N)$ باشد. خاطر نشان کنیم که اگر هیچ ایدآل اول $\mathfrak{P}$ در $\operatorname{Supp}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) \cap \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{N})$ وجود نداشته باشد که در شرایط $\dim_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = d$ و $\operatorname{proj\,dim}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) = p$ صدق کند، آن‌گاه گزاره (ب) به انتفای مقدم درست است و بنابراین طبق قضیه ۵.۳، $\mathrm{H}^{p+d}_{\mathfrak{m}}(M,N)$ صفر خواهد شد.

مثال **۷.۳**. فرض کنیم K یک میدان است، x و y متغیرند و $R := K[[x,y]]$ حلقه سری‌های توانی x و y با ضرایب در K است. در این‌صورت R یک حلقه موضعی منظم کامل از بُعد ۲ با ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{m} := (x,y)$ است. قرار می‌دهیم $M := R/(x^۲,xy)$. از $\operatorname{Ass}_R(M) = \{(x),(x,y)\}$ نتیجه می‌شود $\operatorname{depth}_R(M) = ۰$ و $\dim_R(M) = \dim_R(R/(x)) = ۱$. چون حلقه منظم است تمام مدول‌ها دارای بُعد تصویری متناهی‌اند و در نتیجه از فرمول آسلاندر–بوکسبام داریم $\operatorname{proj\,dim}_R(M) = ۲$. بنابراین $\operatorname{proj\,dim}_R(M) + \dim_R(R) = ۴$. اینک چون $\operatorname{Ass}_R(R) = \{۰\}$، پس $\operatorname{Supp}_R(M) \cap \operatorname{Ass}_R(R) = \emptyset$ و در نتیجه طبق قضیه ۵.۳ یا نتیجه ۲.۳ داریم $\mathrm{H}^۴_{\mathfrak{m}}(M,R) = ۰$. بنابراین $\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,R) < \operatorname{proj\,dim}_R(M) + \dim_R(R)$. البته چون حلقه کوهن–مکالی است و M دارای بُعد تصویری متناهی است، طبق فرمول دیوانی‌آذر–حاجی‌کریمی می‌توان دید که

$$\operatorname{cd}_{\mathfrak{m}}(M,R) = \dim_R(R) - \operatorname{grade}_R(\operatorname{Ann}_R(R),M) = ۲ - ۰ = ۲.$$

تشکر و قدردانی

نویسنده بر خود لازم می‌داند از داوران محترم که با مطالعه دقیق مقاله و ارائه راهنمایی‌ها و پیشنهادات آموزنده و ارزشمند موجب ارتقا کیفیت مقاله شدند نهایت سپاس و تشکر را داشته باشد.

فهرست منابع

[1] M. H. Bijan-Zadeh, *A common generalization of local cohomology theories*, Glasgow Math. J. **21**(2) (1980) 173–181.

[2] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **60** (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **39** (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[4] M. T. Dibaei and S. Yassemi, *Attached primes of the top local cohomology modules with respect to an ideal*, Arch. Math. (Basel) **84**(4) (2005) 292–297.

[5] K. Divaani-Aazar, *Vanishing of the top local cohomology modules over Noetherian rings*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **119**(1) (2009) 23–35.

[6] K. Divaani-Aazar and A. Hajikarimi, *Generalized local cohomology modules and homological Gorenstein dimensions*, Comm. Algebra **39**(6) (2011) 2051–2067.

[7] K. Divaani-Aazar, R. Naghipour and M. Tousi, *Cohomological dimension of certain algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **130**(12) (2002) 3537–3544.

[8] K. Divaani-Aazar, R. Sazeedeh and M. Tousi, *On vanishing of generalized local cohomology modules*, Algebra Colloq. **12**(2) (2005) 213–218.

[9] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, Volume 1. Second revised and extended edition. De Gruyter Expositions in Mathematics **30** (Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2011).

[10] A. Fathi, A. Tehranian and H. Zakeri, *Filter regular sequences and generalized local cohomology modules*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **38**(2) (2015) 467–482.

[11] Y. Gu and L. Chu, *Attached primes of the top generalized local cohomology modules*, Bull. Aust. Math. Soc. **79**(1) (2009) 59–67.

[12] S. H. Hassanzadeh and A. Vahidi, *On vanishing and cofiniteness of generalized local cohomology modules*, Comm. Algebra **37**(7) (2009) 2290–2299.

[13] J. Herzog, *Komplexe, Auflösungen und Dualität in der Localen Algebra* (Habilitationsschrift, Universität Regensburg, 1970).

[14] I. G. Macdonald, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, Symp. Math. **11** (1973) 23–43.

[15] A. Mafi, *On the associated primes of generalized local cohomology modules*, Comm. Algebra **34**(7) (2006) 2489–2494.

[16] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8** (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[17] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Second edition, Universitext (Springer, New York, 2009).

[18] S. Yassemi, *Coassociated primes*, Comm. Algebra **23**(4) (1995) 1473–1498.

Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem for generalized local cohomology modules

Ali Fathi [‡]

Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran

Communicated by: Amir Mafi

Received: 2023/5/20 Accepted: 2023/8/2

Abstract: Let R be a commutative Noetherian ring, and let $\mathfrak{a}$ be a proper ideal of R. Let M be a non-zero finitely generated R-module with the finite projective dimension p. Also, let N be a non-zero finitely generated R-module with $N \neq \mathfrak{a}N$, and assume that c is the greatest non-negative integer with the property that $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N)$, the i-th local cohomology module of N with respect to $\mathfrak{a}$, is non-zero. $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M, N)$, the i-th generalized local cohomology module of M and N with respect to $\mathfrak{a}$, is zero for all i with $i > p+c$. In this paper, we obtain the coassociated prime ideals of $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M, N)$. Using this, in the case when R is a local ring and c is equal to the dimension of N, we obtain a necessary and sufficient condition for the vanishing of $\mathrm{H}^{p+c}_{\mathfrak{a}}(M, N)$ which extends the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem for generalized local cohomology modules.

Keywords: Generalized local cohomology module, Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem, coassociated prime ideal, attached prime ideal.

[‡]Corresponding author.
E-mail addresses: alif1387@gmail.com (A. Fathi)