مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۶۸-۲۵۹

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2023.43187.2143

# یک روش هم‌مکانی برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی از طریق جمله اول سری توابع والش

بهنام سپهریان ×

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ایران، کدپستی ۸۳۴۹ − ۸ − ۳۸۱۵۶

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۶

چکیده: دراین مقاله یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی ارائه می‌شود. روش بر پایه تقریب تابع مجهول توسط تک‌جمله اول توابع والش بنا می‌شود. در واقع بازه $[0, 1)$ به $m$ زیربازه با طول یکسان تقسیم و در هر زیربازه تابع مجهول با جمله اول از توابع والش تقریب زده می‌شود. با استفاده از یک روش هم‌مکانی، ضرایب این تقریب‌ها به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب یک تقریب بلاک-پالس برای تابع مجهول حاصل می‌شود که می‌توان با استفاده از آن، تقریب‌های پیوسته و همچنین نقطه‌واری را نیز به‌دست آورد. یک آنالیز همگرایی برای این تقریب‌های پیوسته ارائه می‌شود. نتایج عددی توانایی و دقت روش را تأیید می‌کنند. این روش از نظر محاسباتی جذاب است و به‌سادگی می‌توان آن را برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا نیز تعمیم داد.

واژه‌های کلیدی: توابع والش، معادلات انتگرال، هم‌مکانی، ولترا.

رده‌بندی ریاضی: 33F05; 45G10; 45G15

## ۱ مقدمه

توابع والش به‌طور گسترده‌ای در ارتباطات، پردازش سیگنال و تشخیص الگو [۱۶] مورد استفاده قرار می‌گیرند. در [۱۱] ماتریس عملیاتی انتگرال برای سری توابع والش معرفی شد. نویسندگان از این ماتریس برای حل معادلات خطی استفاده کردند. در [۱۵] سری توابع والش برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی به‌کار برده شد. در روش آنها ابتدا توابع وابسته به زمان مختلفی که در سیستم بودند با یک سری قطع شده از توابع والش با ضرایب مجهول بسط داده می‌شود. سپس با به‌کارگیری ضرب کرونکر و پیدا کردن وارون یک ماتریس مربعی،

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: b-sepehrian@araku.ac.ir (B. Sepehrian)

این ضرایب مجهول به دست می‌آیند. نشان داده شد که این روش با مشکلات محاسباتی مواجه است به‌ویژه اگر ابعاد این ماتریس بزرگ باشد (برای آشنایی بیشتر با توابع والش و ویژگی‌های آنها به منبع [۱۰] رجوع شود). برای رهایی از این مشکلات، روش "تک‌جمله اول سری والش" در [۱۵] پیشنهاد شد. بعدها این روش برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های منفرد [۲، ۳] و هم‌چنین برای حل مسایل غیرخطی درحساب تغییرات به‌کار برده شد [۱۷]. یک روش گالرکین "تک‌جمله اول سری والش" برای معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای همراشتاین در [۲۲] معرفی شد. در [۸، ۹] این روش برای دستگاه‌های خطی و غیرخطی از این معادلات تعمیم داده شد. علاوه بر اینها، در [۲۰] یک مدل جمعیت ولترا با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفت. برای مطالعه بیشتر به‌عنوان مثال مراجع [۷، ۱۳، ۱۴] را ببینید.
در این مقاله ما روش "تک‌جمله اول سری والش" را برای حل معادله ولترای نوع دوم غیرخطی به شکل

$$x(t) = f(t) + \int_{0}^{t} F(t, s, x(s))ds , \quad 0 \le t < 1, \tag{1.1}$$

به‌کار می‌بریم که درآن $f$ و $F$ توابع پیوسته معلوم هستند و $F(t, s, x(s))$ تابعی غیرخطی نسبت به $x$ است.

روش‌های عددی متعددی برای حل معادله‌های انتگرال پیشنهاد شده است. چند روش هم‌مکانی برای معادلات ولترا-فردهلم غیرخطی در مراجع [۵، ۱۲] ارائه شد. در [۲۴، ۲۵] توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادله‌های انتگرال خطی و غیرخطی به‌کار رفتند. سعادتمندی و دهقان با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و یک روش هم‌مکانی، به حل تقریبی معادلات انتگرال آبل نوع اول و دوم پرداختند [۱۸]. یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترا با استفاده از موجک‌های کاردینال چبی‌شف معرفی شد [۱۹]. در [۱] از توابع پایه‌ای کلاه برای حل معادلات انتگرال ولترای همراشتاین غیرخطی استفاده شد. روش آنها نیاز به ماتریس عملیاتی انتگرال و ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب و نیز حل دستگاه‌های غیرخطی جبری بزرگ دارد. درتمام روش‌های طیفی، حل معادلات انتگرال غیرخطی به حل دستگاه‌های معادلات جبری غیرخطی تقلیل می‌یابد. اگر در (۱.۱)، $F(t, s, x(s))$ تابعی پیچیده از $x$ باشد، این دستگاه‌های غیرخطی نیز پیچیده می‌شوند و حل آنها می‌تواند بسیار دشوار باشد به‌ویژه اگر این دستگاه‌ها بزرگ باشند. حتی اگر این دستگاه‌های غیرخطی با برخی روش‌های تکراری قابل حل باشند، هزینه محاسباتی می‌تواند خیلی زیاد باشد. به همین دلیل، بیشتر روش‌های طیفی برای حل معادلات انتگرال غیرخطی که در آنها $F(t, s, x(s))$ تابعی پیچیده از $x$ است، چندان کارآمد نیستند. برای غلبه بر این مشکل یک کاندید، روش "تک‌جمله اول سری والش" است. چرا که در این روش بازه $[0, 1)$ به $m$ زیربازه با طول یکسان تقسیم و در هر زیربازه فقط یک معادله جبری (نه یک دستگاه) باید حل شود. اولین بار در مرجع [۲۳] نویسندگان یک روش گالرکین را برای حل معادلات انتگرال ولترای همراشتاین غیرخطی با "تک‌جمله اول سری والش" ارائه کردند. بعدها در [۴] بالاکومار و موروگسان این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترای خطی گسترش دادند. اما در حالت کلی روش‌های نوع گالرکین برای حل معادله های انتگرال غیرخطی پیچیده چندان مناسب نیستند و تنها برای معادله‌های ساده کارایی دارند.

در این مقاله، ما جمله اول از سری توابع والش را برای حل معادلات انتگرال ولترای غیرخطی به شکل معادله (۱.۱) به‌کار می‌بریم. ابتدا تقریب "تک‌جمله اول سری والش" تابع مجهول را در معادله (۱.۱) قرارمی‌دهیم. سپس خواص "تک‌جمله اول سری والش" را به همراه یک روش هم‌مکانی برای محاسبه ضرایب مجهول و پیدا کردن یک تقریب بلاک-پالس برای $x(t)$ مورد استفاده قرار می‌دهیم. با این تقریب بلاک-پالس، تقریب‌های پیوسته و نقطه‌واری را برای جواب معادله به‌دست می‌آوریم. روش ما نیازی به ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل‌ضرب و حل دستگاه‌های جبری غیرخطی بزرگ ندارد. این روش بسیار ساده است و به‌سادگی می‌توان آن را برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا تعمیم داد. اخیراً در [۲۱] یک روش هم‌مکانی "تک‌جمله اول سری والش" برای حل معادلات انتگرال ولترای همراشتاین معرفی شده است که تقریب پیوسته‌ای از جواب را می‌دهد. روش ما اساساً با آن روش تفاوت دارد و بر خلاف روش آنها که فقط برای معادلات از نوع همراشتاین قابل استفاده است، برای انواع معادلات ولترای نوع دوم نیز می‌توان آن را به‌کار برد. هم‌چنین برخلاف روش مرجع [۲۱]، روش جدید را می‌توان برای معادله‌های دیفرانسیل-انتگرال ولترا گسترش داد که ما این کار را برای آینده کنار گذاشته‌ایم.

درمرجع [۶] نویسندگان نشان دادند که روش‌های طیفی برای جواب‌های انواع معادلات دیفرانسیل و انتگرال، تقریب‌های با دقت بالایی می‌دهند به‌شرطی که این جواب‌ها به اندازه کافی هموار باشند. بدین ترتیب همگرایی تقریب‌های بلاک-پالس و نقطه‌وار حاصل از روش ما تضمین شده است و ما فقط شرایط همگرایی تقریب‌های پیوسته را بررسی می‌کنیم.

بخش‌های بعدی مقاله بدین صورتند: بخش ۲ به بسط‌های والش و تک‌جمله اول سری والش اختصاص دارد. در بخش ۳، حل معادله (۱.۱) با استفاده از "تک‌جمله اول سری والش" و یک روش هم‌مکانی ارائه می‌شود. همگرایی روش، در بخش ۴ بررسی می‌شود. در بخش ۵، برای تأیید توانایی روش جدید، گزارش یافته‌های عددی ارائه می‌شود.

## ۲ بسط‌های توابع والش و تک‌جمله اول سری والش

فرض کنید $f$ یک تابع انتگرال‌پذیرمربعی در بازه $[0, 1)$ باشد. بسط $f(t)$ با توابع والش به‌صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \psi_i(t),$$

که $\psi_i(t)$ همان $i$امین تابع والش و $f_i$ ضریب متناظر با آن است. در عمل یک سری قطع شده توابع والش تابع $f$ به‌صورت

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i \psi_i(t) = F^T \Psi(t),$$

به کار می‌رود که $m$ توانی صحیح و مثبت از ۲ است و

$$F = (f_0, f_1, \cdots, f_{m-1})^T.$$

به‌علاوه

$$\Psi(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), \cdots, \psi_{m-1}(t)\big)^T.$$

ضرایب $f_i$ از رابطه

$$f_i = \int_0^1 f(t)\psi_i(t)dt,$$

به‌دست می‌آیند که خطای مربعی زیر را کمینه می‌سازد

$$E_2 = \int_0^1 \big(f(t) - F^T\Psi(t)\big)^2 dt.$$

برای محاسبه بسط "تک‌جمله اول سری والش"، با تعریف $\tau = mt$ ، بازه $0 \leq t < \frac{1}{m}$ به بازه $0 \leq \tau < 1$ تبدیل و سپس تابع داده شده، با جمله اول از سری توابع والش در بازه نرمال شده $\tau \in [0, 1)$ بسط داده می‌شود.

## ۳ حل معادله ولترای غیرخطی

برای به دست آوردن جواب معادله (۱.۱) با روش "تک‌جمله اول سری والش" ابتدا بازه $[0, 1)$ را به $m$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که $m$ یک عدد صحیح مثبت است. سپس هر بازه $\frac{i-1}{m} \leq s \leq t < \frac{i}{m}$، $i = 1, \cdots, m$ را به‌ترتیب با روابط $\tau_i = mt - (i-1)$ و $\lambda_i = ms - (i-1)$ ، به $\tau_i \in [0, 1)$ و $\lambda_i \in [0, 1)$ تبدیل می‌کنیم. برای $t \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$ و $s \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$ فرض کنید

$$x(t) = x_i(\tau_i), \tag{۱.۳}$$

$$f(t) = f_i(\tau_i), \tag{۲.۳}$$

و

$$F(t, s, x(s)) = F_{i,j}(\tau_i, \lambda_j, x(\lambda_j)), \quad i, j = 1, \cdots, m. \tag{۳.۳}$$

به این ترتیب با استفاده از معادله (۱.۱) ، در بازه اول داریم

$$x_1(\tau_1) = f_1(\tau_1) + \frac{1}{m}\int_0^{\tau_1} F_{1,1}(\tau_1, \lambda_1, x_1(\lambda_1))d\lambda_1, \tag{۴.۳}$$

و به‌طور مشابه در $i$امین بازه

$$x_i(\tau_i) = f_i(\tau_i) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{i-1}\int_0^1 F_{i,j}(\tau_i, \lambda_j, x_j(\lambda_j))d\lambda_j + \frac{1}{m}\int_0^{\tau_i} F_{i,i}(\tau_i, \lambda_i, x_i(\lambda_i))d\lambda_i. \tag{۵.۳}$$

فرض کنید $x_i(\tau_i)$ با "تک‌جمله اول سری والش" به صورت

$$x_i(\tau_i) = X^{(i)}\psi_0(\tau_i), \tag{۶.۳}$$

بسط داده شود که در آن $\psi_0(\tau_i) = 1$ .

برای پیداکردن تقریب‌های "تک‌جمله اول سری والش" برای $x(t)$ ما معادله (۶.۳) را در معادله‌های (۴.۳) و (۵.۳) قرار داده و سپس معادله‌های به‌دست آمده را با نقاط میانی بازه‌ها یعنی $\tau_i = \frac{1}{2}$ ، $i = 1, \cdots, m$ هم‌مکانی می‌کنیم. بدین ترتیب خواهیم داشت

$$X^{(1)} = f_1(\frac{1}{2}) + \frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{2}} F_{1,1}(\frac{1}{2}, \lambda_1, X^{(1)})d\lambda_1, \tag{۷.۳}$$

و

(۸.۳)

$$X^{(i)} = f_i(\frac{1}{2}) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\int_0^1 F_{i,j}(\frac{1}{2}, \lambda_j, X^{(j)})d\lambda_j\right) + \frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{2}} F_{i,i}(\frac{1}{2}, \lambda_i, X^{(i)})d\lambda_i, \quad i = 2, \cdots, m.$$

معادله‌های (۷.۳) و (۸.۳) معادله‌های جبری غیرخطی با مجهول‌های $X^{(1)}$ و $X^{(i)}$ ، $i = 2, \cdots, m$ هستند. با حل معادله (۷.۳) برای $X^{(1)}$ و معادله (۸.۳) برای $X^{(i)}$ ، $i = 2, \cdots, m$ تقریب‌های "تک‌جمله اول سری والش" تابع مجهول به‌دست می‌آیند. سپس با استفاده از معادله‌های (۱.۱) ، (۱.۳) ، (۴.۳) و (۶.۳) ، برای $t \in [0, \frac{1}{m})$ داریم

$$x(t) = f(t) + \int_0^t F(t, s, X^{(1)})ds, \tag{۹.۳}$$

و برای $t \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$ از معادله‌های (۵.۳) و (۶.۳) به‌دست می‌آوریم

$$x(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} F(t, s, X^{(j)})ds\right) + \int_{\frac{i-1}{m}}^{t} F(t, s, X^{(i)})ds, \quad i = 2, \cdots, m. \tag{۱۰.۳}$$

معادله‌های (۹.۳) و (۱۰.۳) به ما تقریب‌های پیوسته‌ای از $x(t)$ را برای هر $t \in [0, 1)$ می‌دهند. همچنین با استفاده از [۱۶]

$$x(\frac{i}{m}) = 2X^{(i)} - x(\frac{i-1}{m}), \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

یک تقریب نقطه وار از $x(t)$ در $t = \frac{i}{m}$ به‌دست می‌آید.

# ۴ آنالیز همگرایی

فرض کنید $x(t)$ جواب دقیق معادله (۱.۱) و $\tilde{x}(t)$ جواب تقریبی پیوسته‌ای باشد که با معادله‌های (۹.۳) و (۱۰.۳) به‌دست می‌آید. همچنین فرض کنید $x(t)$ دارای مشتق مرتبه اول پیوسته در $[0, 1)$ باشد. از آنجایی که $X^{(j)}$ ضریب بلاک-پالس $x(t)$ در بازه $[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$ است، پس

$$X^{(j)} = m\int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} x(s)ds, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \tag{۱.۴}$$

با توجه به با قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، یک $\mu_j \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$X^{(j)} = x(\mu_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m. \tag{۲.۴}$$

از معادله‌های (۱.۱) ، (۹.۳) و (۲.۴) برای $0 \leq t \leq \frac{1}{m}$ داریم

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_0^t \left|F(t, s, x(s)) - F(t, s, x(\mu_1))\right|ds. \tag{۳.۴}$$

فرض کنید $F(t,s,x(s))$ نسبت به متغیر $x(s)$ لیپ‌شیتز با یک ثابت $L$ باشد. بدین ترتیب

$$\left|F(t,s,x(s))-F(t,s,x(\mu_1))\right| \le L|x(s)-x(\mu_1)|. \tag{۴.۴}$$

با استفاده از معادله‌های (۳.۴) و (۴.۴) و قضیه مقدار میانگین می‌توان نوشت

$$|x(t)-\tilde{x}(t)| \le \frac{L}{m}\int_0^t |x'(\nu_s)|ds, \quad 0 \le t \le \frac{1}{m},$$

که در آن $\nu_s$ بین $s$ و $\mu_1$ است. بنابراین برای $0 \le t \le \frac{1}{m}$ به ازای یک $\xi_1 \in [0,\frac{1}{m}]$ داریم

$$|x(t)-\tilde{x}(t)| \le \frac{L}{m^2} max_{0\le s\le \frac{1}{m}}|x'(s)| = \frac{L}{m^2}|x'(\xi_1)|. \tag{۵.۴}$$

به‌طور مشابه، با معادله‌های (۱.۱)، (۱۰.۳) و (۲.۴) برای $\frac{i-1}{m} \le t \le \frac{i}{m}$ می‌توان نوشت

$$|x(t)-\tilde{x}(t)| \le \frac{iL}{m^2}|x'(\xi_i)| \;\; \xi_i \in [0,\frac{i}{m}] \;\; i=2,\cdots,m. \tag{۶.۴}$$

بدین ترتیب با معادله‌های (۵.۴) و (۶.۴) می‌توان نتیجه گرفت

$$|x(t)-\tilde{x}(t)| \le \frac{L}{m}|x'(\xi)|, \quad \xi \in [0,1].$$

نامساوی بالا نشان می‌دهد که با افزایش $m$، دنباله جواب‌های تقریبی پیوسته، به جواب دقیق همگرا می‌شود.

## ۵ مثال‌های عددی

در این بخش چندین مثال با روش جدید حل می‌شوند. در مثال ۱ یک معادله انتگرال همراشتاین بررسی می‌شود که در مرجع [۱] حل شده است. مثال آخر نیز به یک دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی اختصاص داده شده است. ما محاسباتمان را با استفاده از نرم افزار میپل ۱۲ انجام داده‌ایم.

**مثال ۱.۵.** معادله [۱]

$$x(t)=\frac{-1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}-\int_0^t \left(x^2(s)+x(s)\right)ds, \quad t\in[0,1), \tag{۱.۵}$$

را در نظر بگیرید. جواب دقیق معادله عبارتست از $x(t)=e^{-t}$. این معادله در [۱] با استفاده از توابع پایه‌ای کلاه حل شده است. با روش آنها بازه $[0,1)$ به $m$ زیر بازه تقسیم می‌شود و با یک روش گالرکین و با $m$ تابع کلاه، یک تقریب از تابع مجهول به‌دست می‌آید. یک تابع پایه‌ای کلاه یک تابع قطعه‌ای خطی است. در واقع یک تابع پایه‌ای کلاه، در دو زیربازه به‌صورت یک تابع خطی و در زیربازه‌های دیگر برابر با صفر است. ما معادله (۱.۵) را با روش جدید حل کردیم. زمان CPU به ازای $m=40,80,120$ برای تقریب پیوسته به ترتیب ۰/۱۵، ۰/۴۱ و ۰/۶۸ ثانیه و برای تقریب نقطه‌وار نیز ۰/۰۴، ۰/۱۹ و ۰/۴۱ ثانیه بود. روش ما نسبت به روش مرجع [۱] فضای حافظه کمتری را از کامپیوتر می‌گیرد. چرا که در [۱] توابع $f$ (جمله ناهمگنی معادله) و $\kappa(t,s)$ (هسته معادله) با توابع پایه‌ای کلاه، بسط داده می‌شوند و این نیاز به $m$ انتگرال ساده و $\frac{m(m+1)}{2}$ انتگرال دوگانه دارد. علاوه بر این برخلاف تقریب کلاه در [۱] و روش‌های طیفی دیگر، روش جدید به ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصلضرب و نیز حل دستگاه‌های معادلات جبری غیرخطی نیاز ندارد. در مرجع [۱] خطای $E_2$ با $m=8$ و $m=16$ تابع پایه‌ای کلاه به‌ترتیب برابر با ۰/۰۰۴۶ و ۰/۰۰۱۳ گزارش شده است. خطای $E_2$ برای روش ما به ازای $m=8$ و $m=16$ برابر با ۰/۰۰۲۶ و ۰/۰۰۱۱ به‌دست آمد. خطای $E_2$ برای تقریب $\tilde{x}(t)$ از $x(t)$ با رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$E_2=\left[\int_0^1 \left(x(t)-\tilde{x}(t)\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

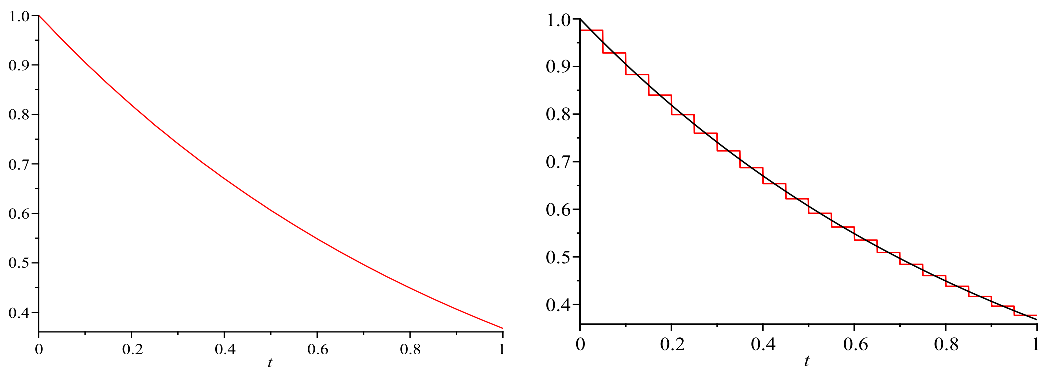
در جدولهای ۱ و ۲ نتایج عددی حاصل از روش جدید با $m=40,80,120$ گزارش می‌شوند. در شکل ۱، تقریب‌های بلاک-پالس و پیوسته به همراه جواب دقیق رسم شده‌اند.

جدول ۱: تقریب‌های نقطه‌وار حاصل از روش جدید برای مثال ۱.

| $t$ | $m = ۴۰$ | $m = ۸۰$ | $m = ۱۲۰$ | جواب دقیق |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۲ | ۰٫۸۱۸۶۱ | ۰٫۸۱۸۷۰ | ۰٫۸۱۸۷۲ | ۰٫۸۱۸۷۳ |
| ۰٫۴ | ۰٫۶۷۰۱۵ | ۰٫۶۷۰۲۸ | ۰٫۶۷۰۳۰ | ۰٫۶۷۰۳۲ |
| ۰٫۶ | ۰٫۵۴۸۶۲ | ۰٫۵۴۸۷۶ | ۰٫۵۴۸۷۹ | ۰٫۵۴۸۸۱ |
| ۰٫۸ | ۰٫۴۴۹۱۳ | ۰٫۴۴۹۲۸ | ۰٫۴۴۹۳۱ | ۰٫۴۴۹۳۳ |
| ۱٫۰ | ۰٫۳۶۷۶۸ | ۰٫۳۶۷۷۸ | ۰٫۳۶۷۸۶ | ۰٫۳۶۷۸۸ |

جدول ۲: تقریب‌های پیوسته حاصل از روش جدید برای مثال ۱.

| $t$ | $m = ۴۰$ | $m = ۸۰$ | $m = ۱۲۰$ | جواب دقیق |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۲ | ۰٫۸۱۸۶۶ | ۰٫۸۱۸۷۱ | ۰٫۸۱۸۷۲ | ۰٫۸۱۸۷۳ |
| ۰٫۴ | ۰٫۶۷۰۲۳ | ۰٫۶۷۰۳۰ | ۰٫۶۷۰۳۱ | ۰٫۶۷۰۳۲ |
| ۰٫۶ | ۰٫۵۴۸۷۱ | ۰٫۵۴۸۷۹ | ۰٫۵۴۸۸۰ | ۰٫۵۴۸۸۱ |
| ۰٫۸ | ۰٫۴۴۹۲۵ | ۰٫۴۴۹۳۱ | ۰٫۴۴۹۳۲ | ۰٫۴۴۹۳۳ |
| ۱٫۰ | ۰٫۳۶۷۸۱ | ۰٫۳۶۷۸۶ | ۰٫۳۶۷۸۷ | ۰٫۳۶۷۸۸ |




شکل ۱: نمودار تقریب بلاک-پالس و جواب دقیق (راست) و تقریب پیوسته (چپ) برای مثال ۱ به ازای $m = ۲۰$.

**مثال ۲.۵.** معادله

$$x(t) = ۱ + t^{۲} - e^{t^{۳}} + \int_{۰}^{t} ۲tse^{tx(s)}ds, \quad t \in [۰, ۱), \tag{۲.۵}$$

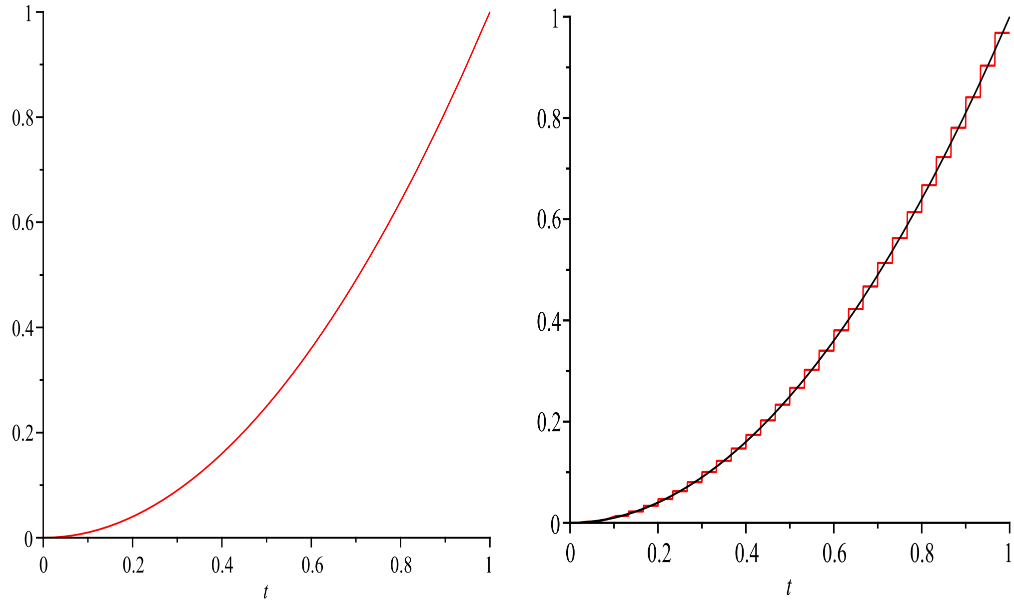
را در نظر بگیرید. جواب دقیق معادله عبارتست از $x(t) = t^{۲}$. جواب‌های عددی حاصل از روش جدید با $m = ۱۰, ۲۰, ۵۰$ در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه می‌شوند. زمانهای CPU به ازای $m = ۱۰, ۲۰, ۵۰$ برای تقریب‌های پیوسته برابر با ۰٫۰۷، ۰٫۱۲ و ۰٫۷۸ ثانیه و برای تقریب‌های نقطه‌وار نیز ۰٫۰۶ ، ۰٫۰۸ و ۰٫۵۸ ثانیه بودند. در شکل ۲ تقریب‌های بلاک-پالس و پیوسته همراه با جواب دقیق رسم می‌شوند.

جدول ۳: تقریب‌های نقطه‌وار حاصل از روش جدید برای مثال ۲.

| $t$ | $m = ۱۰$ | $m = ۲۰$ | $m = ۵۰$ | جواب دقیق |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۲ | ۰٫۰۴۰۰۰ | ۰٫۰۴۰۰۰ | ۰٫۰۴۰۰۰ | ۰٫۰۴۰۰۰ |
| ۰٫۴ | ۰٫۱۶۰۰۶ | ۰٫۱۶۰۰۲ | ۰٫۱۶۰۰۰ | ۰٫۱۶۰۰۰ |
| ۰٫۶ | ۰٫۳۶۰۴۰ | ۰٫۳۶۰۱۱ | ۰٫۳۶۰۰۲ | ۰٫۳۶۰۰۰ |
| ۰٫۸ | ۰٫۶۴۲۰۲ | ۰٫۶۴۰۵۳ | ۰٫۶۴۰۰۹ | ۰٫۶۴۰۰۰ |
| ۱٫۰ | ۱٫۰۱۲۳۴ | ۱٫۰۰۳۳۱ | ۱٫۰۰۰۵۴ | ۱٫۰۰۰۰۰ |

جدول ۴: تقریب‌های پیوسته حاصل از روش جدید برای مثال ۲.

| $t$ | $m = ۱۰$ | $m = ۲۰$ | $m = ۵۰$ | جواب دقیق |
|---|---|---|---|---|
| ۰/۲ | ۰/۰۴۰۰۰ | ۰/۰۴۰۰۰ | ۰/۰۴۰۰۰ | ۰/۰۴۰۰۰ |
| ۰/۴ | ۰/۱۵۹۹۳ | ۰/۱۵۹۹۸ | ۰/۱۶۰۰۰ | ۰/۱۶۰۰۰ |
| ۰/۶ | ۰/۳۵۹۶۳ | ۰/۳۵۹۹۱ | ۰/۳۵۹۹۹ | ۰/۳۶۰۰۰ |
| ۰/۸ | ۰/۶۳۸۷۵ | ۰/۶۳۹۶۹ | ۰/۶۳۹۹۵ | ۰/۶۴۰۰۰ |
| ۱/۰ | ۰/۹۹۹۸۲ | ۰/۹۹۹۹۸ | ۱/۰۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰۰ |




شکل ۲: نمودار تقریب بلاک–پالس و جواب دقیق (راست) و تقریب پیوسته (چپ) برای مثال ۲ به ازای $m = ۳۰$.

مثال **۳.۵**. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_۱(t) = ۲te^{\frac{t}{۴}} - \int_۰^t \frac{t}{۴}\left(e^{\frac{۱}{۸}x_۱(s)} + \sqrt{x_۲(s)}\right)ds, \\ x_۲(t) = ۱ + \frac{t}{۲}e^{\frac{t}{۲}} - \frac{۱}{۸}\int_۰^t x_۱(s)x_۲(s)ds. \end{cases} \tag{۳.۵}$$

جواب دقیق دستگاه $x_۱(t) = ۲t$ و $x_۲(t) = e^{\frac{t}{۲}}$ است. ما روشمان را برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترای غیرخطی تعمیم دادیم و دستگاه (۳.۵) را حل کردیم. چون این دستگاه شامل دو معادله انتگرال است، در هر گام یک دستگاه دو معادله دو مجهولی جبری حل می‌شود. جواب‌های عددی به همراه جواب‌های دقیق در جدول‌های ۵ و ۶ نمایش داده می‌شوند.

## ۶ نتیجه‌گیری

یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترای غیرخطی با "تک‌جمله اول سری والش" پیشنهاد می‌شود. با استفاده از ویژگی‌های جمله اول توابع والش و با انتخاب نقطه میانی هر زیربازه به‌عنوان نقطه هم‌مکانی حل معادلات انتگرال به حل معادلات جبری تقلیل می‌یابد. این روش جدید بسیار ساده است و تقریب‌های بلاک–پالس، نقطه‌وار و پیوسته‌ای را ارائه می‌دهد. به‌علاوه، برخلاف سایر روش‌های طیفی به ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب و حل دستگاه‌های جبری بزرگ نیاز ندارد. ما شرایط همگرایی را برای تقریب‌های پیوسته حاصل از روش بررسی کردیم. نشان دادیم که اگر مشتق مرتبه اول $x(t)$ در بازه $[۰, ۱)$ پیوسته و $F(t, s, x(s))$ نسبت به $x(s)$ لیپ‌شیتز باشد، این تقریب‌های پیوسته همگرایند. روش جدید از نظر محاسباتی جذاب و به‌سادگی برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترای غیرخطی قابل تعمیم است. مثال‌های عددی توانایی و دقت روش را تأیید می‌کنند.

جدول ۵: تقریب‌های $x_۱(t)$ حاصل از روش جدید به همراه مقادیر واقعی برای مثال ۳.

| جواب دقیق | تقریب پیوسته برای $x_۱(t)$ | | تقریب نقطه‌وار برای $x_۱(t)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m=۲۰$ | $m=۱۰$ | $m=۲۰$ | $m=۱۰$ | $t$ |
| ۰٫۴۰۰۰۰ | ۰٫۴۰۰۰۰ | ۰٫۴۰۰۰۰ | ۰٫۳۹۹۹۹ | ۰٫۳۹۹۹۷ | ۰٫۲ |
| ۰٫۸۰۰۰۰ | ۰٫۸۰۰۰۰ | ۰٫۸۰۰۰۱ | ۰٫۷۹۹۹۹ | ۰٫۷۹۹۹۴ | ۰٫۴ |
| ۱٫۲۰۰۰۰ | ۱٫۲۰۰۰۱ | ۱٫۲۰۰۰۲ | ۱٫۱۹۹۹۸ | ۱٫۱۹۹۹۱ | ۰٫۶ |
| ۱٫۶۰۰۰۰ | ۱٫۶۰۰۰۱ | ۱٫۶۰۰۰۴ | ۱٫۵۹۹۹۷ | ۱٫۵۹۹۸۹ | ۰٫۸ |
| ۲٫۰۰۰۰۰ | ۲٫۰۰۰۰۲ | ۲٫۰۰۰۰۶ | ۱٫۹۹۹۹۷ | ۱٫۹۹۹۸۶ | ۱٫۰ |

جدول ۶: تقریب‌های $x_۲(t)$ حاصل از روش جدید به همراه مقادیر واقعی برای مثال ۳.

| جواب دقیق | تقریب پیوسته برای $x_۲(t)$ | | تقریب نقطه‌وار برای $x_۲(t)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m=۲۰$ | $m=۱۰$ | $m=۲۰$ | $m=۱۰$ | $t$ |
| ۱٫۱۰۵۱۷ | ۱٫۱۰۵۱۸ | ۱٫۱۰۵۲۰ | ۱٫۱۰۵۱۵ | ۱٫۱۰۵۱۰ | ۰٫۲ |
| ۱٫۲۲۱۴۰ | ۱٫۲۲۱۴۲ | ۱٫۲۲۱۴۶ | ۱٫۲۲۱۳۶ | ۱٫۲۲۱۲۵ | ۰٫۴ |
| ۱٫۳۴۹۸۶ | ۱٫۳۴۹۸۸ | ۱٫۳۴۹۹۶ | ۱٫۳۴۹۸۰ | ۱٫۳۴۹۶۱ | ۰٫۶ |
| ۱٫۴۹۱۸۲ | ۱٫۴۹۱۸۶ | ۱٫۴۹۱۹۸ | ۱٫۴۹۱۷۴ | ۱٫۴۹۱۴۹ | ۰٫۸ |
| ۱٫۶۴۸۷۲ | ۱٫۶۴۸۷۸ | ۱٫۶۴۸۹۵ | ۱٫۶۴۸۶۱ | ۱٫۶۴۸۲۸ | ۱٫۰ |

## فهرست منابع


[1] E. Babolian, M. Mordad, A numerical method for solving system of linear and nonlinear integral equations of the second kind by hat basis functions, Comput. Math. Appl. **62** (2011) 187-198.

[2] K. Balachandran, K. Murugesan, Analysis of nonlinear singular systems via STWS method, Int. J. Comp. Math. **36** (1990) 9-12.

[3] K. Balachandran, K. Murugesan, Numerical solution of a singular non-linear system from fluid dynamics, Int. J. Comp. Math. **38** (1991) 211-218.

[4] V. Balakumar, M. Murugesan, Single-Term Walsh Series method for systems of linear Volterra integral equations of the second kind, Appl. Math. Comp. **228** (2014) 371-376.

[5] H. Brunner, On the numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations by collocation methods, SIAM J. Numer. Anal. **27**(4) (1990) 987-1000.

[6] C. Canuto and M.Y. Hussaini and A. Quarteroni and T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamic*, Springer-Verlag, 1987.

[7] R. Chandra Guru Sekar, V. Balakumar, K. Murugesan, Method of Solving Linear System of Volterra Integro-Differential Equations Using the Single Term Walsh Series, International Journal of Applied and Computational Mathematics, **3**(2) (2017) 549-559.

[8] R. Chandra Guru Sekar, K. Murugesan, STWS approach for Hammerstein system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind, International Journal of Computer Mathematics, **94**(9) (2017) 1867–1878.

[9] R. Chandra Guru Sekar, K. Murugesan, System of linear second order Volterra integro-differential equations using Single Term Walsh Series technique, Applied Mathematics and Computation, **273**(C) (2016) 484-492.

[10] K.B. Datta and M.M. Bosukonda, *Orthogonal functions in systems and control*, World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 1995.

[11] C.H. Hsiao and C.F. Chen, Solving integral equations via Walsh functions, Comput. Elec. Engng. **6** (1979) 279-292.

[12] F. Mirzaee, Numerical solution of nonlinear Fredholm-Volterra integral equations via Bell polynomials, Computational Methods for Differential Equations, **5**(2) (2017) 88-102.

[13] A. Pushpam, P. Anandhan, Numerical Solution of Non-linear Fuzzy Differential Equations using Single Term Walsh Series Technique, International Journal of Mathematics Trends and Technology, **45**(1) (2017) 35-39.

[14] A. Pushpam, P. Anandhan, Solving Higher Order Linear System of Time-Varying Fuzzy Differential Equations Using Generalized STWS Technique, International Journal of Science and Research, **5**(4) (2016) 57-61.

[15] G.P. Rao, K.R. Palanisamy, T. Srinivasan, Extension of computation beyond the limit of normal interval in Walsh series analysis of dinamical systems, IEEE. Trans. Autom. control, **25** (1980) 317-319.

[16] M. Razzaghi, J. Nazarzadeh, Walsh Functions, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, **23**(2) (1999) 429-440.

[17] M. Razzaghi, B. Sepehrian, Single-Term Walsh Series Direct Method for the Solution of Nonlinear problems in the Calculus of Variations, Journal of Vibration and Control, **10** (2004) 1071-1081.

[18] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A collocation method for solving Able’s integral equations of first and second kinds, Z. Naturforsch. **63**a (2008) 752-756.

[19] B. Salehi, L. Torkzadeh, K. Nouri, Chebyshev cardinal wavelets for nonlinear Volterra integral equations of the second kind, Mathematics interdiciplinary Research, **7** (2022) 281-299.

[20] B. Sepehrian, Single-term Walsh series method for solving Volterra’s population model, Int. J. Appl. Math. Reaserch, **3**(4) (2014) 458-463.

[21] B. Sepehrian, M. Razzaghi, A new method for Solving nonlinear Volterra-Hammerstein integral equations via single-term Walsh series, Mathematical Analysis and Convex Optimization, **1**(2) (2020) 59-70.

[22] B. Sepehrian, M. Razzaghi, Single-term Walsh series method for the Volterra integro-differential equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, **28** (2004) 1315-1319.

[23] B. Sepehrian, M. Razzaghi, Solution of nonlinear Volterra-Hammerstein integral equations via single-term Walsh series method, Math. prob. Eng. **5** (2005) 547-554.

[24] H. Zhang, Y. Chen, C. Guo, Z. Fu, Application of radial basis function method for solving nonlinear integral equations, Journal of applied mathematics, J. Appl. Math. (2014). DOI: 10.1155/2014/381908.

[25] H. Zhang, Y. Chen, X. Nie, Solving the linear integral equations based on radial basis function interpolation, J. Appl. Math. (2014), DOI: 10.1155/2014/793582.

# A collocation method for solving nonlinear second kind Volterra integral equations through single-term Walsh series

**Behnam Sepehrian** †

Department of Mathematics, Arak University, Arak, Iran. P. O. Box 38156-8943.

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2023/3/6 Accepted: 2023/8/7

**Abstract:** In this paper, a numerical method for solving second kind nonlinear Volterra integral equations is presented. The method is based upon the extension of unknown function by single term Walsh series. Indeed, the interval $[0, 1)$ is divided to $m$ equal subinterval and in each interval, the unknown function is extended by the first term of Walsh series functions. By using a collocation method the coefficients of these extensions are computed and a block-pulse approximation of the unknown function is obtained. By the block-pulse approximation both continuous and pointwise approximations can be obtained. A convergence analysis for continuous approximations are investigated. The numerical examples confirm the ability and accuracy of the method. The method is computationally attractive and can be easily generalized for the systems of nonlinear Volterra equations.

**Keywords**: Collocation, Integral equation, Volterra, Walsh functions.



†Corresponding author.

*E-mail addresses:* b-sepehrian@araku.ac.ir (B. Sepehrian).