



حل یک مدل اپیدمی $SEIRS-\alpha$ با استفاده از توابع کلاهی درجه سوم

سمیه نعمتی *

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۵

چکیده: در این مقاله، به حل عددی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری، که مدل ریاضی مربوط به یک بیماری اپیدمی است، پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا توابع کلاهی درجه سوم و خواص آنها معرفی می‌شوند. پس از آن، با استفاده از بسط توابع موجود در دستگاه بر اساس توابع پایه‌ای، مسأله مورد نظر به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با روش‌های تکراری حل کرد. سپس، با حل مسأله با توجه به داده‌های اولیه مشخص و مقایسه نتایج حاصل با داده‌های واقعی گزارش شده، کارآیی روش نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ویروس سین‌سیشیال تنفسی انسانی، توابع کلاهی درجه سوم، دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری.

رده‌بندی ریاضی: 65M70; 26A33; 92B05

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، حسابان کسری که شامل مشتقات و انتگرال‌ها از مرتبه دلخواه است، به عنوان ابزاری مفید برای فرمول‌بندی بسیاری از مسائل در علوم مختلف استفاده شده است [۲، ۳، ۶، ۹، ۲۰-۲۲]. در بیشتر موارد، این فرمول‌بندی‌ها شامل معادلات دیفرانسیل کسری و معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری هستند که نمی‌توان آنها را با استفاده از روش‌های تحلیلی حل کرد و جواب دقیق این مسائل را ارائه داد. از این رو، روش‌های عددی برای به دست آوردن تقریبی از جواب برای معادلات مرتبه کسری معرفی شده‌اند که غالباً تعمیم روش‌های موجود برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی به مرتبه کسری هستند [۱۱، ۱۳، ۱۵]. هم‌چنین، برخی از پدیده‌ها با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل‌سازی می‌شوند که در آنها نویز گاوسی کسری برای توصیف دقیق‌تر پدیده ظاهر می‌شود. اخیراً، در [۷، ۸]، روش‌های طیفی برای حل این دسته از معادلات معرفی شده‌اند.

بسیاری از بیماری‌های اپیدمی می‌توانند با استفاده از دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری مدل‌سازی شوند. برای نمونه، در [۴]، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به عنوان مدلی جدید بر مبنای عمل‌گرهای مشتق و انتگرال کسری برای مدل‌سازی عفونت اچ‌آی‌وی

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: s.nemati@umz.ac.ir (S. Nemati)

معرفی شده است. همچنین، از این نوع دستگاه‌ها برای مدل سازی بیماری کووید ۱۹ استفاده شده است [۱، ۵]. برخی از محققین نیز به حل این مدل‌ها با استفاده از روش‌های عددی پرداختند [۱۰، ۱۲].

ویروس سین‌سیشیال تنفسی انسانی (HRSV) ویروسی است که باعث عفونت دستگاه تنفسی می‌شود. این ویروس یک علت اصلی عفونت‌های دستگاه تنفسی و مراجعه به بیمارستان در طول دوران نوزادی و کودکی است. اپیدمی سالیانه این عفونت در آب و هوای معتدل در طول فصل زمستان رخ می‌دهد، در حالی که در آب و هوای گرمسیری، این عفونت بیشتر در طول فصل بارانی مشاهده می‌شود. تنها در یک فصل از شیوع HRSV افراد چندین بار می‌توانند به این عفونت آلوده شوند.

یک مدل ریاضی می‌تواند نشان دهد که چگونه بیماری عفونی با HRSV پیشرفت می‌کند و پیامدهای اپیدمی این ویروس چیست. Rosa و Torres در [۱۹]، یک مدل تقسیمی بر اساس طبقه‌بندی جمعیت به چهار وضعیت سلامتی پیشنهاد داده‌اند: گروه افراد مستعد ابتلا به عفونت که با S نشان داده می‌شود. گروهی از افراد E که آلوده شده‌اند اما هنوز عفونی نشده‌اند و با نرخ ε عفونی می‌شوند. گروه شامل افراد آلوده و عفونی که با I نشان داده می‌شود و افراد بهبودیافته که در گروه R قرار می‌گیرند. قابل ذکر است که با معرفی گروه E یک دوره نهفتگی در مدل در نظر گرفته می‌شود که معادل با زمان بین عفونی شدن و بروز اولین علائم است. یک ویژگی خاص HRSV موقت بودن ایمنی پس از عفونت است، یعنی؛ افراد بهبودیافته دوباره می‌توانند مستعد بیماری شوند. به همین دلیل، این مدل را مدل SEIRS می‌نامند. در [۱۹]، با فرض فصلی بودن نرخ شیوع با توجه به دوره‌های باز و بسته شدن مدارس، دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری زیر برای مدل سازی این بیماری اپیدمی پیشنهاد شد:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = \lambda(t) - \mu S(t) - \beta(t)S(t)I(t) + \gamma R(t), \\ {}^C D_t^\alpha E(t) = \beta(t)S(t)I(t) - \mu E(t) - \varepsilon E(t), \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = \varepsilon E(t) - \mu I(t) - \nu I(t), \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = \nu I(t) - \mu R(t) - \gamma R(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

با شرایط اولیه داده شده:

$$S(\circ), E(\circ), I(\circ), R(\circ) \geq \circ,$$

که در آن، μ به نرخ تولد اشاره دارد که با نرخ مرگ و میر برابر فرض می‌شود، γ نرخ از دست دادن ایمنی و ν نرخ از بین رفتن عفونت است. β نشان‌دهنده پارامتر انتقال است که با تابع کسینوسی به شکل $\beta(t) = b_0(1 + b_1 \cos(2\pi t + \Phi))$ فرمول‌بندی می‌شود که در آن b_0 میانگین β و b_1 دامنه نوسان فصلی است، $\lambda(t) = \mu(1 + c_1 \cos(2\pi t + \Phi))$ نرخ شیوع است که شامل نوزادان و مهاجران می‌شود و در آن، c_1 دامنه نوسان فصلی است. همچنین، ${}^C D_t^\alpha$ به مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha \in (0, 1]$ اشاره دارد. در پارامترهای β و λ ، پارامتر Φ زاویه‌ای است که مطابق با داده‌های واقعی انتخاب می‌شود. در این پژوهش، با در نظر گرفتن توابع کلاهی درجه سوم و خواص آنها به حل عددی مدل (۱.۱) می‌پردازیم. به دلیل ساختار ساده‌ای که توابع کلاهی دارند، این روش از حجم محاسباتی پایینی برخوردار است. به علاوه، این روش را می‌توان به سادگی برای حل سایر دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری تعمیم داد. با در نظر گرفتن یک مثال نشان می‌دهیم در صورتی که جواب دستگاه همواری بالایی داشته باشد، مرتبه همگرایی روش حاضر $O(h^4)$ خواهد بود.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: ابتدا، مقدماتی از حسابان کسری و تعریف و خواص توابع پایه‌ای مورد نظر در بخش ۲ ارائه می‌شود. بخش ۳ به معرفی روشی جدید برای حل مسأله مورد نظر اختصاص می‌یابد. نتایج عددی در بخش ۴ گزارش می‌شود. در نهایت، در بخش ۵ نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ مفاهیم اساسی

در این بخش، ابتدا به مرور برخی مفاهیم اساسی در حسابان کسری می‌پردازیم. در ادامه، توابع پایه‌ای کلاهی درجه سوم و خواص اساسی آنها معرفی می‌شوند.

تعریف ۱.۲. عملگر انتگرال کسری (چپ) ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \geq 0$ از یک تابع داده شده‌ی y به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\begin{aligned} I_t^\alpha y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds, \\ I_t^0 y(t) &= y(t), \end{aligned}$$

که در آن، $\Gamma(\circ)$ تابع گامای اوپلر است.

تعریف ۲.۲. مشتق کسری (چپ) کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ از تابع y به صورت زیر تعریف می شود [۱۷]:

$${}^C D_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds,$$

به طوری که $m-1 < \alpha \leq m$.

یک خاصیت مهم ترکیب عمل گرهای انتگرال ریمان-لیوویل و مشتق کاپوتو که در این کار مورد استفاده قرار می گیرد به شکل زیر است:

$$I_t^\alpha ({}^C D_t^\alpha y(t)) = y(t) - \sum_{i=0}^{m-1} y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

تعریف ۳.۲. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و مضربی از ۳ باشد و $h = \frac{\tau}{n}$. یک مجموعه از توابع کلاهی درجه سوم روی بازه $[0, \tau]$ به صورت زیر تعریف می شود [۱۴]:

$$h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3} (t-h)(t-2h)(t-3h), & 0 \leq t \leq 3h, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای $i = 3k + 1$ اگر $k = 0, 1, \dots, \frac{n}{3} - 1$ داریم

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3} (t-(i-1)h)(t-(i+1)h)(t-(i+2)h), & (i-1)h \leq t \leq (i+2)h, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای $i = 3k + 2$ اگر $k = 0, 1, \dots, \frac{n}{3} - 1$ تعریف می کنیم

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3} (t-(i-2)h)(t-(i-1)h)(t-(i+1)h), & (i-2)h \leq t \leq (i+1)h, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای $i = 3k$ اگر $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{3} - 1$ آن گاه

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3} (t-(i-3)h)(t-(i-2)h)(t-(i-1)h), & (i-3)h \leq t \leq ih, \\ \frac{1}{6h^3} (t-(i+1)h)(t-(i+2)h)(t-(i+3)h), & ih \leq t \leq (i+3)h, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3} (t-(\tau-h))(t-(\tau-2h))(t-(\tau-3h)), & \tau-3h \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این توابع پایه ای در فضای $L^2([0, \tau])$ مستقل خطی هستند و در خواص زیر صدق می کنند

$$h_i(jh) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^n h_i(t) = 1.$$

تابع دلخواه $y \in L^2([0, \tau])$ را می توان با استفاده از توابع کلاهی درجه سوم به شکل زیر تقریب زد

$$y(t) \simeq y_n(t) = \sum_{i=0}^n a_i h_i(t) = A^T H(t) = H^T(t) A,$$

که در آن،

$$H(t) = [h_0(t), h_1(t), \dots, h_n(t)]^T, \tag{۲.۲}$$

و

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T,$$

به طوری که $a_i = y(ih)$.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $y \in C^4([0, \tau])$ و $y_n(t) = \sum_{i=0}^n y(ih)h_i(t)$ تقریب y بر اساس توابع کلاهی درجه سوم باشد، آن گاه [۱۶]

$$\|y - y_n\|_2 = O(h^4).$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید بردار توابع کلاهی درجه سوم داده شده در (۲.۲) باشد و $\alpha > 0$ ، آن گاه [۱۶]:

$$I_t^\alpha H(t) \simeq P^{(\alpha)} H(t), \tag{۳.۲}$$

که در آن $P^{(\alpha)}$ ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبه $(n+1) \times (n+1)$ است که به شکل زیر داده می شود:

$$P^{(\alpha)} = \chi_{\alpha, h} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_{n-3} & \eta_{n-2} & \eta_{n-1} \\ 0 & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{n-4} & \xi_{n-3} & \xi_{n-2} \\ 0 & \beta_{-2} & \beta_{-1} & \beta_0 & \dots & \beta_{n-5} & \beta_{n-4} & \beta_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{-2} & \beta_{-1} & \beta_0 \end{bmatrix}.$$

جزئیات درایه های ماتریس $P^{(\alpha)}$ در [۱۶] ذکر شده است.

۳ روش حل

در این بخش، با استفاده از خواص توابع کلاهی درجه سوم به حل عددی مسأله (۱.۱) می پردازیم. برای این منظور این مسأله را به شکل زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = f_1(t, S(t), I(t), R(t)), \\ {}^C D_t^\alpha E(t) = f_2(t, S(t), E(t), I(t)), \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = f_3(t, E(t), I(t)), \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = f_4(t, I(t), R(t)), \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_1(t, S(t), I(t), R(t)) &= \lambda(t) - \mu S(t) - \beta(t)S(t)I(t) + \gamma R(t), \\ f_2(t, S(t), E(t), I(t)) &= \beta(t)S(t)I(t) - \mu E(t) - \varepsilon E(t), \\ f_3(t, E(t), I(t)) &= \varepsilon E(t) - \mu I(t) - \nu I(t), \\ f_4(t, I(t), R(t)) &= \nu I(t) - \mu R(t) - \gamma R(t). \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha S(t) &= X_1^T H(t), & {}^C D_t^\alpha E(t) &= X_2^T H(t), \\ {}^C D_t^\alpha I(t) &= X_3^T H(t), & {}^C D_t^\alpha R(t) &= X_4^T H(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

با توجه به شرایط اولیه و خواص (1.2) و (3.2)، تقریب‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} S(t) &= (X_1^T P^{(\alpha)} + Y_1^T) H(t) = Z_1 H(t), & E(t) &= (X_2^T P^{(\alpha)} + Y_2^T) H(t) = Z_2 H(t), \\ I(t) &= (X_3^T P^{(\alpha)} + Y_3^T) H(t) = Z_3 H(t), & R(t) &= (X_4^T P^{(\alpha)} + Y_4^T) H(t) = Z_4 H(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Y_1 &= [S(\circ), S(\circ), \dots, S(\circ)]^T, & Y_2 &= [E(\circ), E(\circ), \dots, E(\circ)]^T, \\ Y_3 &= [I(\circ), I(\circ), \dots, I(\circ)]^T, & Y_4 &= [R(\circ), R(\circ), \dots, R(\circ)]^T. \end{aligned}$$

فرض کنید

$$\Theta = [\circ, h, 2h, \dots, \tau],$$

آن‌گاه با جایگذاری تقریب‌های معرفی شده در (2.3) و (3.3) در (1.3) و با استفاده از خاصیت استقلال خطی توابع پایه‌ای، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} X_1^T = f_1(\Theta, Z_1, Z_3, Z_4), \\ X_2^T = f_2(\Theta, Z_1, Z_2, Z_3), \\ X_3^T = f_3(\Theta, Z_2, Z_3), \\ X_4^T = f_4(\Theta, Z_3, Z_4). \end{cases} \quad (4.3)$$

با حل دستگاه (4.3) مولفه‌های مجهول بردارهای X_i , $i = 1, 2, 3, 4$ حاصل می‌شوند و با جایگذاری مقادیر حاصل در (3.3)، تقریبی از جواب مسأله (1.1) بدست می‌آید.

۴ نتایج عددی

هدف اصلی در این بخش نشان دادن کارایی روش معرفی شده برای حل مدل (1.1) است. قابل ذکر است که نتایج این بخش با استفاده از نرم افزار ممتیکا نسخه ۱۳ و کامپیوتر شخصی Core i7 با پردازنده $2/5^\circ$ گیگاهرتز و حافظه ۸ گیگابایت حاصل شده‌اند. قبل از حل (1.1)، به منظور بررسی دقت روش، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به شکل زیر را در نظر می‌گیریم [۱۸]

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha y_1(t) = y_1(t) + y_2(t), \\ {}^C D_t^\alpha y_2(t) = -y_1(t) + y_2(t). \end{cases} \quad (1.4)$$

شرایط اولیه برای دستگاه (1.4) به صورت

$$y_1(\circ) = \circ, \quad y_2(\circ) = 1, \quad (2.4)$$

در نظر گرفته می‌شود. به ازای $\alpha = 1$ ، مسأله فوق دارای جواب دقیق زیر است

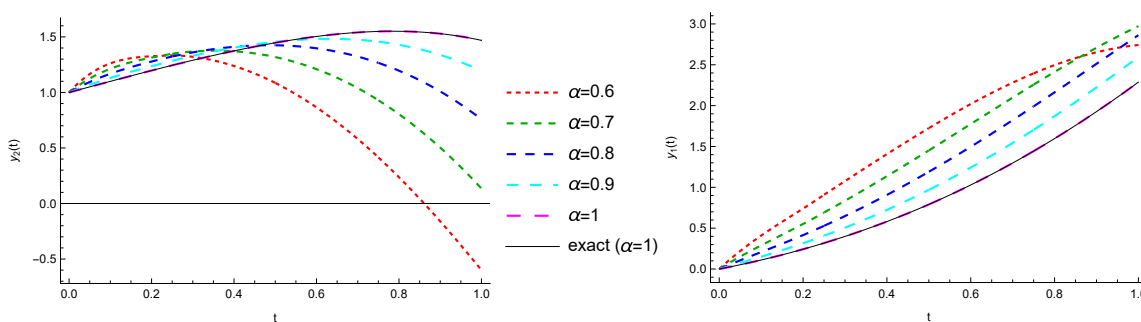
$$y_1(t) = e^t \sin(t), \quad y_2(t) = e^t \cos(t).$$

با به‌کارگیری روش پیشنهادی روی مسأله (1.4)–(2.4)، خطا و مرتبه همگرایی به ازای مقادیر مختلف n ، به‌همراه نتایج حاصل از روش موجک هار [۱۸]، در جدول ۱ گزارش شده‌اند. در این جدول، k نشان‌دهنده‌ی تعداد توابع هار استفاده شده در [۱۸] برای تقریب توابع است و نماد زیر برای نشان دادن مرتبه همگرایی روش معرفی شده است:

$$\varepsilon_{i,n} = \log_2 \left(\frac{\|y_i - y_{i,n}\|_2}{\|y_i - y_{i,2n}\|_2} \right), \quad i = 1, 2,$$

جدول ۱: نتایج عددی برای مسأله (۱.۴)-(۲.۴).

روش موجک هار [۱۸]			روش حاضر				
$\ y_2 - y_{2,k}\ _2$	$\ y_1 - y_{1,k}\ _2$	k	$\varepsilon_{2,n}$	$\ y_2 - y_{2,n}\ _2$	$\varepsilon_{1,n}$	$\ y_1 - y_{1,n}\ _2$	n
4.99×10^{-5}	1.75×10^{-4}	۴	۳۹۲	1.67×10^{-3}	۳۸۵	1.91×10^{-3}	۳
2.53×10^{-5}	8.75×10^{-5}	۸	۳۹۷	1.10×10^{-4}	۳۹۶	1.32×10^{-4}	۶
1.27×10^{-5}	4.38×10^{-5}	۱۶	۳۹۹	7.02×10^{-6}	۳۹۹	8.46×10^{-6}	۱۲
6.34×10^{-6}	2.19×10^{-5}	۳۲	۴۰۰	4.41×10^{-7}	۴۰۰	5.32×10^{-7}	۲۴
3.15×10^{-6}	1.09×10^{-5}	۶۴	۴۰۰	2.76×10^{-8}	۴۰۰	3.33×10^{-8}	۴۸
1.54×10^{-6}	5.30×10^{-6}	۱۲۸	۳۹۹	1.72×10^{-9}	۴۰۰	2.08×10^{-9}	۹۶
6.88×10^{-7}	2.37×10^{-6}	۲۵۶	—	1.08×10^{-10}	—	1.30×10^{-10}	۱۹۲



شکل ۱: جواب‌های تقریبی با مقادیر مختلف α به همراه جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$.

که در آن، y_i و $y_{i,2n}$ ؛ به ترتیب، جواب‌های دقیق و تقریبی مسأله هستند. با توجه به مقادیر حاصل برای $\varepsilon_{i,n}$ ، مشاهده می‌شود، در صورتی که جواب دستگاه به اندازه کافی هموار باشد، مرتبه همگرایی روش $O(h^4)$ است. هم‌چنین، جواب‌های حاصل از اجرای روش با استفاده از $n = 12$ و مقادیر مختلف α ، به همراه جواب دقیق متناظر با $\alpha = 1$ ، در شکل ۱ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن مقدار α به ۱، جواب‌های تقریبی به جواب دقیق نزدیک می‌شوند.

اکنون به حل مدل (۱.۱) می‌پردازیم. بر اساس داده‌های مرکز سلامت فلوریدا، Rosa و Torres مرتبه کسری مشتق α ای را جستجو کردند که به بهترین شکل با تعداد تست‌های مثبت بیماری HRSV مطابقت داشته باشد. این داده‌ها به ازای هر ماه، در طول ۳۵ ماه و دقیقاً بین سپتامبر ۲۰۱۱ و جولای ۲۰۱۴ در ایالت فلوریدا گزارش شده‌اند. آنها یافتند که به ازای $\alpha = 0.993$ مدل به خوبی با داده‌های بیماری HRSV مطابقت دارد. با استفاده از مقادیر داده شده در جدول ۲ برای $\mu, \nu, \gamma, \varepsilon, b_0, b_1, c_1$ و Φ که از مرجع [۱۹] اتخاذ شده است، و مقادیر اولیه داده شده در جدول ۳، روش پیشنهادی برای حل مدل SEIRS- α (۱.۱) با $\alpha = 0.993$ و $n = 90$ اعمال شده است. از آنجایی که معمولاً اهداف سازمان جهانی بهداشت برای دوره‌های ۵ ساله در نظر گرفته می‌شود، با فرض $\tau = 5$ ، نمودار جواب‌های تقریبی برای $S(t), E(t), I(t)$ و $R(t)$ در شکل ۲ مشاهده می‌شود. این نتایج کاملاً با نتایج گزارش شده در [۱۹] مطابقت دارند. در این نمودارها، تعداد تقریبی افرادی که در زمان‌های مختلف در هر یک از دسته‌های طبقه‌بندی شده از لحاظ وضعیت سلامتی قرار دارند مشاهده می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

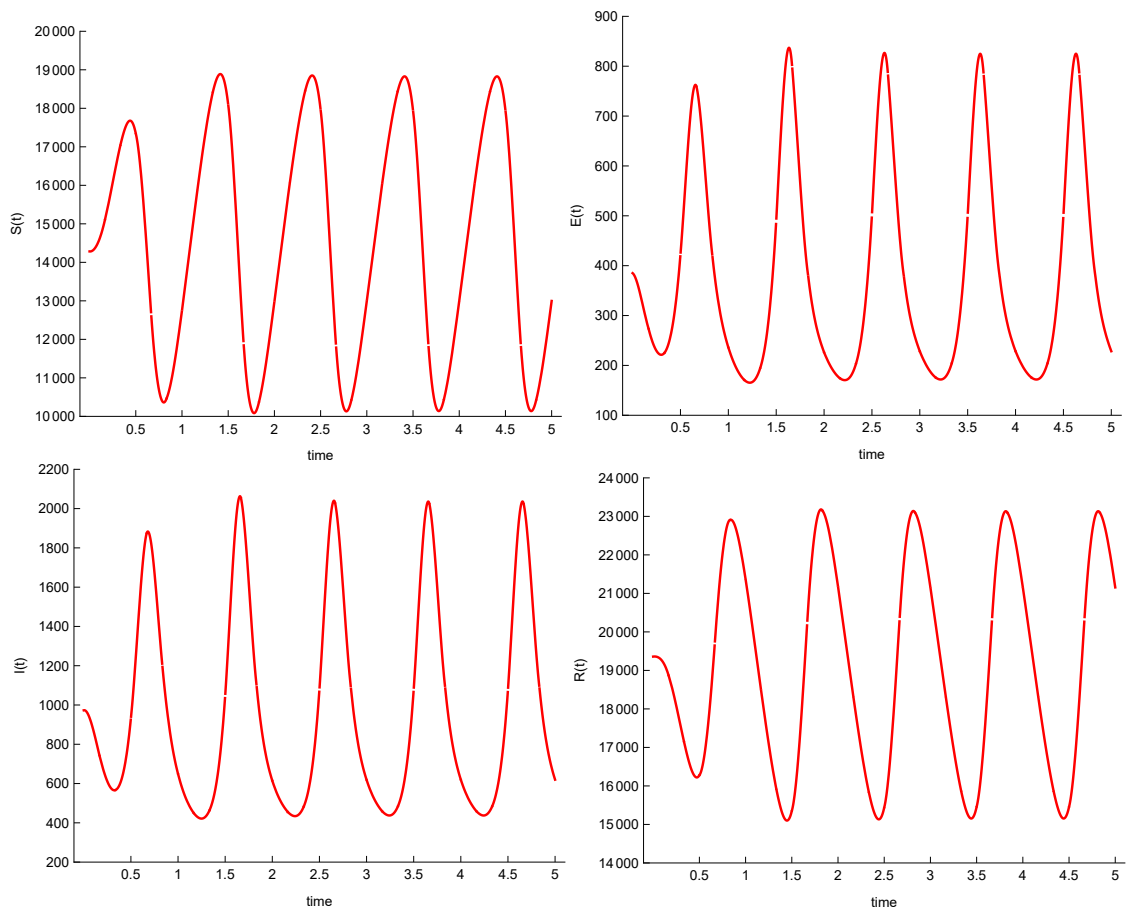
در این مقاله، با استفاده از خواص توابع کلاهی درجه سوم به حل عددی مدل بیماری اپیدمی ناشی از ویروس سین‌سیشیال تنفسی انسانی، که شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری است، پرداخته شده است. در روش حاضر، دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد نظر به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌شود. نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی روی مدل مورد نظر و مقایسه آنها با نتایج حاصل از روش‌های موجود دیگر و داده‌های واقعی به‌خوبی کارایی روش را نشان می‌دهد.

جدول ۲: پارامترهای مدل SEIRS- α .

Φ	c_1	b_1	b_0	ε	γ	ν	μ
$\frac{\pi}{4}$	۰/۱۷	۰/۱۷	۸۸/۲۵	۹۱	۱/۸	۳۶	۰/۰۱۱۳

جدول ۳: مقادیر اولیه بر حسب درصد جمعیت کل.

$R(0)$	$I(0)$	$E(0)$	$S(0)$
۰.۵۵۳۱	۰.۰۲۷۸	۰.۰۱۱۰	۰.۴۰۸۱



شکل ۲: نتایج عددی حاصل برای متغیرهای وضعیت مدل SEIRS- α با $\alpha = ۰.۹۹۳$.

فهرست منابع

- [1] A. Atangana, A novel Covid-19 model with fractional differential operators with singular and non-singular kernels: Analysis and numerical scheme based on Newton polynomial, *Alex. Eng. J.* **60**(4) (2021) 3781–3806.
- [2] A. Atangana, S. Jain, The role of power decay exponential decay and Mittag-Leffler function's waiting time distribution: Application of cancer spread, *Phys. A* **512** (2018) 330–351.
- [3] D. Baleanu and A. Mendes Lopes, *Handbook of fractional calculus with applications*, in: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A, Southampton: Comput Mech Publicat, vol. 7, De Gruyter, Berlin, Boston, 2019, Retrieved 28 Aug. 2019.
- [4] M.A. Barakat, A.A. Hyder, A.A. Almoneef, A novel HIV model through fractional enlarged integral and differential operators, *Sci. Rep.* **13**(1) (2023) 7764.
- [5] A.N. Chatterjee, B. Ahmad, A fractional-order differential equation model of COVID-19 infection of epithelial cells. *Chaos Solit. Fractals* **147** (2021) 110952.
- [6] A. Debbouche, J.J. Nieto, Relaxation in controlled systems described by fractional integro-differential equations with nonlocal control conditions, *Electron. J. Differ. Equ.* **89** (2015) 1–18.
- [7] T. Eftekhari, J. Rashidinia, A novel and efficient operational matrix for solving nonlinear stochastic differential equations driven by multi-fractional Gaussian noise, *Appl. Math. Comput.* **429** (2022) 127218.
- [8] T. Eftekhari, J. Rashidinia, A new hybrid approach for nonlinear stochastic differential equations driven by multifractional Gaussian noise, *Math. Methods Appl. Sci.* **46**(12) (2023) 13469–13484.
- [9] Z. Hammouch, T. Mekkaoui, Circuit design and simulation for the fractional-order chaotic behavior in a new dynamical system, *Complex Intell. Syst.* **4**(4) (2018) 251–260.
- [10] M. Higazy, F.M. Allehiany, E. Mahmoud, Numerical study of fractional order COVID-19 pandemic transmission model in context of ABO blood group, *Results Phys.* **22** (2021) 103852.
- [11] A. Jafarian, F. Rostami, A.K. Golmankhaneh, D. Baleanu, Using ANNs approach for solving fractional order Volterra integro-differential equations, *Int. J. Comput. Sys.* **10**(1) (2017), 470–480.
- [12] S. Kumar, R. Kumar, J. Singh, K.S. Nisar, D. Kumar, An efficient numerical scheme for fractional model of HIV-1 infection of CD4+ T-cells with the effect of antiviral drug therapy, *Alex. Eng. J.* **59**(4) (2020) 2053–2064.
- [13] A.B. Malinowska, T. Odziejewicz, D.F.M. Torres, *Advanced methods in the fractional calculus of variations*, SpringerBriefs in applied sciences and technology, Springer, Cham 2015.
- [14] F. Mirzaee, A. Hamzeh, A computational method for solving nonlinear stochastic Volterra integral equations, *Comput. Appl. Math.* **306** (2016) 166–178.
- [15] S. Nemati, P.M. Lima, Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions, *Appl. Math. Comput.* **327** (2018) 79–92.
- [16] S. Nemati, P.M. Lima, Numerical solution of a third-kind Volterra integral equation using an operational matrix technique, *European Control Conference (ECC)*, (2018) 3215–3220.

- [17] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, san diego, ca: Academic, 1999.
- [18] B. Prakash, A. Setia, S. Bose, Numerical solution for a system of fractional differential equations with applications in fluid dynamics and chemical engineering, *Int. J. Chem. React. Eng.* **5** (2017) 20170093.
- [19] S. Rosa, D.F.M. Torres, Optimal control of a fractional order epidemic model with application to human respiratory syncytial virus infection, *Chaos Solit. Fractals* **117** (2018) 142–149.
- [20] X.J. Yang, *General fractional derivatives: Theory, methods and applications*, CRC Press, New York, 2019.
- [21] X.J. Yang, New general calculi with respect to another functions applied to describe the newton-like dashpot models in anomalous viscoelasticity, *Therm. Sci.* **23**(6B) (2019) 3751–3757.
- [22] X.J. Yang, F. Gao, H.W. Jing, New mathematical models in anomalous viscoelasticity from the derivative with respect to another function view point, *Therm. Sci.* **23**(3A) (2019) 1555–1561.



Solving an SEIRS- α epidemic model using the third degree hat functions

Somayeh Nemati[†]

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2023/5/5

Accepted: 2023/9/16

Abstract: In this paper, numerical solution of a system of fractional differential equations which is the model of an epidemic disease is considered. To this aim, first, third degree hat functions and their properties are introduced. After that, using the expansion of the existing functions in the system in terms of the basis functions, the system under consideration is transformed to a system of algebraic equations that can be solved using iterative methods. Then, by solving the problem with a given initial data and comparing the results with the reported real data, efficiency of the method is shown.

Keywords: Human respiratory syncytial virus, Third degree hat functions, System of fractional differential equations.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: s.nemati@umz.ac.ir (S. Nemati)