مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۳۰۷-۳۱۵
شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.43770.2164

بررسی دوگان جبرهای گروهی تحت یک توپولوژی محدب‌موضعی

علی غفاری [۱] [×]، مرجان شیبانی [۱] و ابراهیم تمیمی [۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۱۶

چکیده: برای یک گروه فشرده‌موضعی G، $L^1(G)$ جبر گروهی و $L^\infty(G)$ دوگان $L^1(G)$ است. روی $L^\infty(G)$ توپولوژی τ را در نظر می‌گیریم که در واقع توپولوژی ضعیف تولید شده توسط ضرب‌گرهای راست القاشده توسط عناصر $L^1(G)$ است. برای گروه دلخواه G، توپولوژی τ از توپولوژی ضعیف ستاره ظریفتر و از توپولوژی نرم قوی‌تر است. در میان نتایج به‌دست آمده، نشان دادیم که تنها برای گروه گسسته G توپولوژی نرم با توپولوژی τ با هم سازگار هستند. خواص توپولوژی τ را بررسی کرده و به مطالعه توابع τ تقریباً متناوب از $L^\infty(G)$ پرداختیم.

واژه‌های کلیدی: گروه فشرده‌موضعی، جبرهای گروهی، توپولوژی ضعیف، توپولوژی محدب‌موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 43A60; 22A20

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. مجموعه همه توابع پیوسته روی G را که در بی‌نهایت صفر می‌شود با نماد $C_0(G)$ و مجموعه همه توابع پیوسته یکنواخت چپ را با $LUC(G)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $f \in LUC(G)$ اگر و تنها اگر نگاشت $x \mapsto L_x f$ از G به‌توی $L^\infty(G)$ پیوسته باشد. $M(G)$ فضای همه اندازه‌های بورل، منظم و کراندار روی G است و می‌دانیم $C_0(G)^* = M(G)$. روی هر گروه هاسدورف و فشرده‌موضعی، اندازه هار چپ موجود است و از این‌رو $L^1(G)$ تعریف می‌شود [۶]. فضای برداری $L^1(G)$ با عمل ضرب پیچشی و نرم روی $L^1(G)$ یک جبر باناخ است. دوگان اول و دوم این جبر باناخ را به ترتیب با $L^1(G)^*$ و $L^1(G)^{**}$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم $L^1(G)$ ایده آلی دو طرفه در $M(G)$ بوده و همه اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ را با $P^1(G)$ نمایش می‌دهیم. $P^1(G)$ یک نیم‌گروه است. ضرب‌های زیادی روی جبرهای متنوع تعریف و مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه در جبر ابرگروه‌ها خواننده می‌تواند به [۲] مراجعه کند. ضرب آرنز از مهم‌ترین ضرب‌ها روی دوگان دوم جبرهای باناخ است که در حالت خاص به تعریف آن می‌پردازیم.

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: aghaffari@semnan.ac.ir (A. Ghaffari), m.sheibani@semnan.ac.ir (M. Sheibani)
e.tamimi@velayat.ac.ir (E. Tamimi)

برای $\varphi \in L^1(G)$ و $f \in L^1(G)^* = L^\infty(G)$، تابع $f\varphi \in L^\infty(G)$ را با ضابطه $\langle f\varphi, \psi\rangle = \langle f, \varphi * \psi\rangle$ تعریف می‌کنیم. برای $F \in L^\infty(G)^*$ تابع $Ff \in L^\infty(G)$ را به‌صورت $\langle Ff, \varphi\rangle = \langle F, f\varphi\rangle$ و در نهایت برای $G \in L^\infty(G)^*$ تابع $GF \in L^\infty(G)^*$ را به‌صورت $\langle GF, f\rangle = \langle G, Ff\rangle$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم $L^\infty(G)^*$ با این ضرب یک جبر باناخ است و به این ضرب، ضرب آرنز نوع اول گویند [۶].

برای $f \in L^\infty(G)$ و $x \in G$، نگاشت $L_x : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ را با ضابطه $L_xf(y) = f(xy)$ تعریف می‌کنیم. برای $\varphi \in L^1(G)$، ضرب‌گر چپ روی $L^1(G)$ به‌صورت $\lambda_\varphi(\psi) = \varphi * \psi$ تعریف می‌شود. بنا به قضیه وندل، مجموعه همه ضرب‌گرهای چپ روی $L^1(G)$ با جبر همه اندازه‌های بورل منظم کراندار به‌طور طولپا یکریخت است. ضرب‌گرها و از جمله ضرب‌گرهای فشرده روی دوگان دوم جبرهای گروهی مورد بحث و بررسی قرار گرفت و نتایج ارزشمندی به‌دست آمده است [۶].

یک میانگین روی $L^\infty(G)$، تابعک خطی M است که $||M|| = \langle M, 1\rangle = 1$. گروه G را میانگین‌پذیر گوئیم هرگاه یک میانگین پایای چپ روی $L^\infty(G)$ موجود باشد. به عبارت دیگر میانگین M موجود باشد که برای هر $f \in L^\infty(G)$ و $x \in G$، $\langle M, L_xf\rangle = \langle M, f\rangle$. میانگین M یک میانگین پایای چپ توپولوژیک است هرگاه برای هر $f \in L^\infty(G)$ و $\varphi \in P^1(G)$، $\langle M, f\varphi\rangle = \langle M, f\rangle$. مجموعه همه میانگین‌های پایای چپ و میانگین‌های پایای چپ توپولوژیک را به ترتیب با نمادهای $LIM(L^\infty(G))$ و $TLIM(L^\infty(G))$ نمایش می‌دهیم [۱۶]. البته میانگین پایای چپ توپولوژیک و میانگین پایای چپ روی زیر فضاهای انتقال پایا و پایای چپ توپولوژیک نیز تعریف می‌شود [۱۵]. توجه کنید که هر گروه فشرده و همین‌طور هر گروه جابجایی میانگین‌پذیر است. هر گروه که شامل یک زیر گروه آزاد با حداقل دو مولد باشد، میانگین‌پذیر نیست [۱۵]. بحث میانگین‌پذیری گروه‌ها و نیم گروه‌ها و همین‌طور میانگین پذیری جبرهای باناخ از دیر باز مورد توجه ریاضیدانان مشهور بوده است. وجود میانگین پایای چپ و ارتباط آنها با میانگین پایای چپ توپولوژیک روی دوگان جبر گروهی مسئله مهمی در آنالیز هارمونیک بوده و نیز هست. کاردینال میانگین‌های پایای چپ و مسائلی از این قبیل بحث داغ علاقه‌مندان می‌باشد. بحث ما نیز ادامه موضوعات یاد شده در بالا می‌باشد.

واضح است که اگر تور $\{f_\alpha\}$ به f در $L^\infty(G)$ همگرا باشد، در این‌صورت برای هر $\varphi \in L^1(G)$ تور $\{f_\alpha\varphi\}$ به $f\varphi$ همگراست. سوال این است که آیا عکس این موضوع همواره صحیح است؟ این سوال منجر به تعریف یک توپولوژی جدیدی شده است که در زیر توضیحات تکمیلی آورده شده است.

برای هر $\varphi \in L^1(G)$، تابع $\rho_\varphi(f) = ||f\varphi||$ یک شبه‌نرم روی $L^\infty(G)$ است و خانواده همه چنین شبه‌نرم‌هایی یک توپولوژی محدب‌موضعی روی $L^\infty(G)$ تولید می‌کند. ما این توپولوژی را با τ نمایش می‌دهیم. واضح است که خانواده همه زیر مجموعه‌هایی چون $\bigcap_{i=1}^n \{f \in L^\infty(G); ||f\varphi_i|| < \epsilon\}$ پایه‌ای موضعی برای صفر در توپولوژی τ است. این توپولوژی را می‌توان به شکل دیگری نیز بیان کرد. در واقع $L^\infty(G)$ قابل نشاندن در $\mathcal{B}(L^1(G), L^\infty(G))$ بوده و از این‌رو توپولوژی نسبی حاصل از توپولوژی عمل‌گر قوی همان توپولوژی τ است [۹]. توپولوژی‌های متنوعی روی فضای تبدیلات خطی روی یک فضای باناخ تعریف و مطالعات زیادی روی آنها انجام شده است، خواننده برای دیدن توپولوژی‌های مشابه به [۱۳]، [۸] ، [۷] مراجعه کند.

در بخش ۲، یک توپولوژی محدب‌موضعی روی دوگان جبر گروهی $L^1(G)$ قرار می‌دهیم. این توپولوژی را با توپولوژی های شناخته شده روی دوگان این جبر، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شرایط لازم و کافی برای سازگار بودن این توپولوژی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان دادیم در بیشتر مواقع این توپولوژی‌ها با هم سازگار نیستند. عمل‌گرهای کراندار روی $L^\infty(G)$ که با انتقال و با پیچش جابه‌جا می‌شوند از مسائل مهم بوده و هست. قهرمانی و لائو روی قدر مطلق این نوع عمل‌گرها مطالعات خوبی انجام داده‌اند. یکی از نتایج مهم که چندین سال به عنوان مسئله حل نشده مطرح بوده، در این مقاله ثابت شده است. در واقع فشردگی گروه G با وجود یک ضرب‌گر چپ ضعیف فشرده ناصفر روی دوگان دوم جبر گروهی معادل است [۱۰]. همین‌طور بیکر، لائو و پیم فضای باناخ همه همریختی‌های موجود روی دوگان یک جبر باناخ، با واحد تقریبی کراندار را به‌طور دقیق مشخص کرده‌اند [۵]. ثابت شده است عمل‌گری روی $L^\infty(G)$ موجود است که با انتقال جابه‌جا می‌شود ولی با پیچش جابه‌جا نمی‌شود. عمل‌گرهای بطور ضعیف فشرده نسبت به یک توپولوژی خاص در [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفت. یکی از نتایج اصلی در این بخش، قضیه ۲.۴ می‌باشد. ثابت کردیم اگر عمل‌گر نسبت به توپولوژی تعریف شده در بالا پیوسته باشد، این عمل‌گر با عمل‌گر انتقال جابه‌جا می‌شود اگر و تنها اگر با عمل‌گر پیچش جابه‌جا شود و به‌طور دقیق این نوع عمل‌گرها را مشخص کردیم.

در بخش سوم، توابع تقریباً متناوب نسبت به توپولوژی تعریف شده را مطالعه می‌کنیم. توابع تقریباً متناوب و نیز توابع تقریباً متناوب ضعیف روی جبرهای گروهی، جبرهای نیم‌گروهی، جبرهای ابرگروهی و در حالت کلی روی جبرهای باناخ مورد مطالعه قرار گرفته که برای آشنایی بیشتر، خواننده می‌تواند به [۴]، [۵]، [۶] و [۱۷] مراجعه کند. میانگین‌پذیری جبرهای باناخ و در حالت خاص میانگین‌پذیری گروه‌ها، مسئله مهم در آنالیز هارمونیک است. اطلاعات خوبی در این زمینه در مراجع [۳]، [۶] یافت می‌شود. در حالتی که G یک گروه است، ثابت شده است که روی فضای همه توابع تقریباً متناوب ضعیف یک میانگین پایای چپ توپولوژیک وجود دارد و نیز هر میانگین پایای چپ نیز یک میانگین پایای چپ توپولوژیک است. وجود تنها یک میانگین روی فضای همه توابع تقریباً متناوب نیز ثابت شده است. موارد فوق در حالت‌های خاص برای بعضی نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها در [۳] و [۱۷] نیز ثابت شده است. در این بخش نشان دادیم که گروه G فشرده است اگر و تنها اگر دوگان جبر گروهی با فضای همه توابع تقریباً متناوب با هم برابر باشند (نسبت به توپولوژی فوق). وجود یک میانگین پایا نیز روی این فضا ثابت شده است.

۲ بررسی خواص توپولوژی τ

فرض کنیم تور $\{f_\alpha\}$ به f در توپولوژی τ همگرا باشد. برای $\varphi \in L^1(G)$ و $\epsilon > 0$، α_0 موجود است که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$، $\|f_\alpha\varphi - f\varphi\| \leq \epsilon$. اکنون فرض کنیم تور $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in J}$ یک واحد تقریبی برای $L^1(G)$ بوده که اعضای آن اندازه‌های احتمال هستند. برای $\alpha \geq \alpha_0$،

$$|\langle f_\alpha, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| \leq \sup\{|\langle f_\alpha\varphi - f\varphi, \varphi_\beta\rangle|; \beta \in J\} \leq \|f_\alpha\varphi - f\| \leq \epsilon.$$

این بدین معناست که تور $\{f_\alpha\}$ به f در توپولوژی ضعیف ستاره همگراست. بنابراین توپولوژی τ ظریفتر از توپولوژی ضعیف ستاره است.

گزاره ۱.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. G گسسته است اگر و تنها اگر توپولوژی‌های نرم و τ روی $L^\infty(G)$ با هم سازگار باشند.

اثبات. اگر G گروهی گسسته باشد، $\delta_e \in L^1(G)$. به‌وضوح تور $\{f_\alpha\}$ به f در $L^\infty(G)$ همگراست اگر و تنها اگر $\{f_\alpha\}$ به f در توپولوژی τ همگرا باشد.

برعکس، فرض کنیم توپولوژی نرم با توپولوژی τ روی $L^\infty(G)$ با هم سازگار باشند. فرض کنید $F \in L^\infty(G)^*$، $f \in L^\infty(G)$ و $\{\varphi_\alpha\}$ واحد تقریبی از اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ باشد [1]. بدون این‌که از کلیت کاسته شود، فرض می‌کنیم $\{\varphi_\alpha\}$ به عنصری چون $E \in L^\infty(G)^*$ در توپولوژی ضعیف ستاره همگرا باشد. واضح است که تور $\{f\varphi_\alpha\}$ به f در توپولوژی τ همگرا بوده و از این‌رو

$$\langle EF, f\rangle = \langle E, Ff\rangle = \lim_\alpha \langle Ff, \varphi_\alpha\rangle = \lim_\alpha \langle F, f\varphi_\alpha\rangle = \langle F, f\rangle.$$

این نشان می‌دهد که E همانی چپ برای $L^\infty(G)^*$ بوده و چون همانی راست نیز هست [6]، بنابراین $L^\infty(G)^*$ دارای همانی دوطرفه است. از طرف دیگر E در مرکز توپولوژیک $L^\infty(G)^*$ قرار دارد. چون مرکز توپولوژیک $L^\infty(G)^*$، جبر باناخ $L^1(G)$ است [11]، از این‌رو E عنصر همانی $L^1(G)$ بوده و بنابراین G گسسته است. □

در گزاره بالا نشان دادیم که در حالتی که گروه، غیرگسسته باشد توپولوژی نرم و توپولوژی τ با هم متفاوت هستند و تنها در حالت گسسته این دو توپولوژی با هم سازگار هستند. سوال این است که ارتباط بین توپولوژی ضعیف و توپولوژی τ با هم چگونه است؟ در زیر به این سوال پاسخ می‌دهیم.

گزاره ۲.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. G متناهی است اگر و تنها اگر توپولوژی‌های ضعیف و τ روی $L^\infty(G)$با هم سازگار باشند.

اثبات. اگر G گروهی متناهی باشد، $L^\infty(G)$ دارای بعد متناهی است و از این‌رو هر دو توپولوژی محدب‌موضعی روی این فضا با هم سازگار هستند. بنابراین توپولوژی ضعیف و توپولوژی τ با هم سازگار هستند [14].

برعکس، فرض کنیم توپولوژی ضعیف با توپولوژی τ با هم سازگار باشند. اگر G گسسته نباشد، میانگین پایای چپ M موجود است که میانگین پایای چپ توپولوژیک نیست [16]. چون هر میانگین پایای چپ، یک میانگین پایای چپ توپولوژیک است اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشد، از این‌رو M نسبت به توپولوژی τ پیوسته نیست. از طرف دیگر یک تابعک با نرم پیوسته است اگر و تنها اگر با توپولوژی ضعیف پیوسته باشد [14]. با این توضیحات مشخص می‌شود که M پیوسته نیست و این یک تناقض است. پس G گسسته است. نتیجه این‌که توپولوژی نرم با توپولوژی τ روی $L^\infty(G)$ با هم سازگار هستند. در نتیجه توپولوژی ضعیف با توپولوژی نرم با هم سازگار هستند. از آن‌جا که دو توپولوژی نرم و توپولوژی ضعیف در صورتی روی یک فضای باناخ با هم سازگار هستند که آن فضا دارای بعد متناهی باشد [6]، بنابراین $L^\infty(G)$ دارای بعد متناهی است و در نتیجه G متناهی است. □

توجه کنیم که ترکیبات محدب زیرمجموعه X از $L^\infty(G)$ را با coX نمایش می‌دهیم. لم زیر کلید نتایج به‌دست آمده در زیر خواهد بود.

لم ۳.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. برای $f \in L^\infty(G)$،

$$\overline{co\{L_xf; x \in G\}} = \overline{\{\varphi * f; \varphi \in P^1(G)\}}$$

که در آن بستار نسبت به توپولوژی τ در نظر گرفته می‌شود.

اثبات. فرض کنیم $\varphi \in P^1(G)$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x^{-1})\Delta(x^{-1})$. واضح است که $\hat{\varphi} \in P^1(G)$ و نیز برای هر $f \in L^\infty(G)$، $\hat{\varphi} * f = f\varphi$. اکنون فرض کنیم $\{\varphi_\alpha\}$ یک واحد تقریبی از اندازه‌های احتمال در $P^1(G)$ باشد [1]. برای $a \in G$، خواهیم داشت

$$\Delta(a)R_a\hat{\varphi}_\alpha * f = \hat{\varphi}_\alpha * L_af = L_af\varphi_\alpha.$$

برای هر α و هر عنصر $\psi \in L^1(G)$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\|[\Delta(a)R_a\hat{\varphi}_\alpha * f - L_af]\psi\| &= \|[\hat{\varphi}_\alpha * L_af - L_af]\psi\| \\ &= \|[L_af\varphi_\alpha - L_af]\psi\| \\ &\leq \|L_af\|\|\varphi_\alpha * \psi - \psi\|_1.\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $W = \bigcap_{i=1}^n \{h \in L^\infty(G); \|h\psi_i - L_af\psi_i\| < \epsilon\}$ یک همسایگی از L_afنسبت به توپولوژی τ باشد. چون $\{\varphi_\alpha\}$ یک واحد تقریبی است، یک α موجود است که برای هر i، $\|L_af\|\|\varphi_\alpha * \psi_i - \psi_i\|_1 < \epsilon$. از آن‌جا که برای هر α، $\Delta(a)R_a\hat{\varphi}_\alpha \in P^1(G)$، به آسانی دیده می‌شود که $L_af \in \overline{\{\varphi * f; \varphi \in P^1(G)\}}$.

برای اثبات عکس شمول، ابتدا ثابت می‌کنیم نگاشت $x \mapsto L_xf$ از گروه G به فضای $L^\infty(G)$ با توپولوژی τ پیوسته است. برای این‌کار فرض کنیم تور $\{x_\alpha\}$ از عناصر G به $x \in G$ همگرا بوده و نیز فرض کنیم عناصر $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ از اعضای $L^1(G)$ داده شده باشد. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|L_{x_\alpha}f\varphi_i - L_xf\varphi_i\| &= \|\hat{\varphi}_i * L_{x_\alpha}f - \hat{\varphi}_i * L_xf\| \\ &= \|\Delta(x_\alpha)R_{x_\alpha}\hat{\varphi}_i * f - \Delta(x)R_x\hat{\varphi}_i * f\| \\ &\leq \|\Delta(x_\alpha)R_{x_\alpha}\hat{\varphi}_i - \Delta(x)R_x\hat{\varphi}_i\|_1\|f\|\end{aligned}$$

چون تابع مدولار Δ و نیز تابع $x \mapsto R_x\hat{\varphi}_i$ پیوسته هستند [6]، بنابراین نگاشت $x \mapsto L_xf$ نسبت به توپولوژی τ پیوسته است.

اکنون فرض کنیم $\varphi \in P^1(G)$ و $\varphi_n, \dots, \varphi_1$ عناصری از $L^1(G)$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $\delta(\|\varphi_1\|_1 + \dots + \|\varphi_n\|_1)4\|f\| = \epsilon$. بنابر منظم بودن اندازه‌ها در $M(G)$، زیرمجموعه فشرده K در Gوجود دارد که $\int_{G\setminus K}\varphi(x)dx < \epsilon$ [1]. برای هر $x \in G$ یک همسایگی باز و متقارن U_x از x موجود است که برای هر $y \in U_x$ و $1 \leq i \leq n$، $\|L_{y^{-1}}f\varphi_i - L_{x^{-1}}f\varphi_i\| < \epsilon$ [16]. از آن‌جا که K فشرده است، تعداد متناهی نقطه از G چون $x_1, \dots, x_m$ و نیز تعدادی همسایگی متناظر U_{x_1} و ... و U_{x_m} وجود دارد که پوششی از K بوده و اگر $i \in \{1, \dots, m\}$، $k \in \{1, \dots, n\}$ و $y \in U_{x_i}$ خواهیم داشت

$$\|L_{y^{-1}}f\varphi_k - L_{x_i^{-1}}f\varphi_k\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

قرار می‌دهیم $A_0 = G \setminus K$، $A_1 = U_{x_1} \cap K$ و برای $2 \leq i \leq m$، $A_i = (U_{x_i} \cap K) \setminus A_{i-1}$. واضح است که A_iها بورل اندازه‌پذیر و دو به دو مجزا بوده و اجتماع همه A_iها مجموعه Kخواهد بود. قرار می‌دهیم $c_0 = \int_{G\setminus K}\varphi(x)dx$ و برای $i \in \{1, \dots, m\}$، قرار می‌دهیم $c_i = \int_{A_i}\varphi(x)dx$. برای هر $\phi \in L^1(G)$ و هر $1 \leq k \leq n$ می‌توان نوشت

$$\Big|\int_{A_0}\int [L_{x_0^{-1}}f - L_{y^{-1}}f](x)\varphi_k * \phi(x)dx\varphi(y)dy\Big| < 2\|f\|\|\varphi_k\|_1\|\phi\|_1\delta.$$

همین‌طور داریم

$$\begin{aligned}\Big|\langle\sum_{i=0}^m c_iL_{x_i^{-1}}f - \varphi * f, \varphi_k * \phi\rangle\Big| &= \Big|\int\sum_{i=0}^m c_iL_{x_i^{-1}}f(x) - \int f(y^{-1}x)\varphi(y)dy\varphi_k * \phi(x)dx\Big| \\ &\leq \Big|\int\sum_{i=0}^m\int_{A_i}[L_{x_i^{-1}}f - L_{y^{-1}}f](x)\varphi(y)dy\varphi_k * \phi(x)dx\Big| \\ &\leq \Big|\sum_{i=0}^m\int_{A_i}\int [L_{x_i^{-1}}f - L_{y^{-1}}f](x)\varphi_k * \phi(x)dx\varphi(y)dy\Big|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|_1 + \Big|\sum_{i=1}^{m}\int_{A_i}\langle L_{x_i^{-1}}f - L_{y^{-1}}f, \varphi_k * \phi\rangle\varphi(y)dy\Big| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|_1 + \Big|\sum_{i=1}^{m}\int_{A_i}\langle (L_{x_i^{-1}}f - L_{y^{-1}}f)\varphi_k, \phi\rangle\varphi(y)dy\Big| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|_1 + \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|_1\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\varphi(y)dy < \epsilon\|\phi\|_1.
\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $\varphi * f \in \overline{co\{L_x f; x \in G\}}$ و برهان کامل می‌شود. $\square$

عمل‌گرهایی که با انتقال و پیچش جابه‌جا می‌شوند از مسائل مهم و مورد توجه بوده و هست. همین‌طور در حالت‌کلی ضرب‌گرها روی جبرهای باناخ مسئله مهم برای مطالعه، مخصوصاً روی دوگان دوم جبرهای باناخ است [۶]. لارسن دو کتاب درباره ضرب‌گرها به چاپ رسانده و نیز قهرمانی و لائو قدر مطلق ضرب‌گرها را روی جبرهای گروهی و هم‌چنین روی دوگان دوم جبرهای گروهی مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. ضرب‌گرهای فشرده و بطور ضعیف فشرده روی گروه‌های کوانتوم در [۱۲] مطالعه و بررسی شده است. می‌دانیم یک عمل‌گر پیوسته که با انتقال‌ها جابه‌جا می‌شود لزومی ندارد که با عمل‌گر پیچش جابه‌جا شود. در زیر با شرط پیوستگی عمل‌گر نسبت به توپولوژی τ این مهم برقرار خواهد شد.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف، فشرده و فرض کنیم $T : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ عمل‌گری کراندار بوده که نسبت به توپولوژی τ نیز پیوسته است. برای هر $x \in G$ و $f \in L^\infty(G)$، $T(L_x f) = L_x T(f)$ اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in L^1(G)$ و $f \in L^\infty(G)$، $T(f\varphi) = T(f)\varphi$. در این حالت اندازه μ در $L^1(G)$ موجود است که $T = \lambda_\mu^*$.

اثبات. فرض کنیم $f \in L^\infty(G)$، $\varphi \in L^1(G)$ و $x \in G$. بنا به لم ۳.۲، به‌وضوح $T(L_x f) = L_x T(f)$ اگر و تنها اگر $T(f\varphi) = T(f)\varphi$. اکنون فرض کنیم که $T^* : L^\infty(G)^* \to L^\infty(G)^*$ نگاشت الحاقی عمل‌گر T و نیز فرض کنید $\varphi \in L^1(G)$ عنصری دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم $T^*(\varphi) \in L^1(G)$. برای این‌کار فرض کنیم تور $\{f_\alpha\}$ در $L^\infty(G)$ به تابع f در توپولوژی τ همگرا باشد. می‌توان نوشت

$$\lim_\alpha\langle T^*(\varphi), f_\alpha\rangle = \lim_\alpha\langle T(f_\alpha), \varphi\rangle = \langle T(f), \varphi\rangle = \langle T^*(\varphi), f\rangle.$$

بنابراین $T^*(\varphi)$ نسبت به توپولوژی τ پیوسته است. چون دوگان $L^\infty(G)$ نسبت به توپولوژی τ جبر گروهی $L^1(G)$ است، بنابراین $T^*(\varphi) \in L^1(G)$. نتیجه این‌که $T^* : L^1(G) \to L^1(G)$ یک ضرب‌گر چپ بوده، از این‌رو بنا به قضیه مشهور وندل یک اندازه $\mu \in M(G)$ موجود است که $T^* = \lambda_\mu$. چون گروه G فشرده است، بنابراین نگاشت $\lambda_\mu : L^1(G) \to L^1(G)$ فشرده است. نتیجه این‌که $\{\mu * \nu; \nu \in L^1(G), \|\nu\|_1 \leq 1\}$ در $L^1(G)$ فشرده‌نسبی است. فرض کنید $\{\varphi_\alpha\}$ یک واحد تقریبی از اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ باشد. واضح است که برای هر α، $\mu * \varphi_\alpha \in \{\mu * \nu; \nu \in L^1(G), \|\nu\|_1 \leq 1\}$. تور $\{\mu * \varphi_\alpha\}$ دارای زیرتور همگرایی چون $\{\mu * \varphi_\beta\}$ بوده که به عنصری چون $\nu \in L^1(G)$ همگراست. برای $f \in C_0(G) \subseteq LUC(G) = L^\infty(G)L^1(G)$ [۶]، به آسانی می‌توان دید که

$$\langle f, \nu\rangle = \lim_\alpha\langle f, \mu * \varphi_\alpha\rangle = \langle f, \mu\rangle.$$

این نشان می‌دهد که $\mu \in L^1(G)$. از آنجا که $L^1(G)$ با توپولوژی ضعیف ستاره در $L^\infty(G)^*$ چگال و نیز T^* با توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته است [۶]، بنابراین $T = \lambda_\mu^*$. $\square$

۳ توابع تقریباً متناوب نسبت به توپولوژی τ

فرض کنیم $f \in L^\infty(G)$. اگر $\{L_x f; x \in G\}$ نسبت به توپولوژی نرم (τ) فشرده‌نسبی باشد، گوئیم f تقریباً متناوب است. مجموعه همه چنین توابعی را با $(\tau - AP(L^\infty(G))$ $AP(L^\infty(G))$ نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که توپولوژی نرم ظریفتر از توپولوژی τ است، بوضوح $AP(L^\infty(G)) \subseteq \tau - AP(L^\infty(G))$. واضح است که $\tau - AP(L^\infty(G))$ زیر فضایی از $L^\infty(G)$ است.

گزاره ۱.۳. اگر G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(i) بستار $AP(L^\infty(G))$ نسبت به توپولوژی τ با فضای $\tau - AP(L^\infty(G))$ برابر است.

(ii) گروه G فشرده است اگر و تنها اگر $L^\infty(G) = \tau - AP(L^\infty(G))$.

(iii) اگر G گروه فشرده باشد، آن‌گاه G متناهی است اگر و تنها اگر $AP(L^\infty(G)) = \tau - AP(L^\infty(G))$.

اثبات. می‌دانیم $f \in AP(L^\infty(G))$ اگر و تنها اگر $\{\varphi * f; \varphi \in P^1(G)\}$ نسبت به توپولوژی نرم فشرده‌نسبی باشد [۴]. بنا به لم ۳.۲، $f \in \tau - AP(L^\infty(G))$ اگر و تنها اگر $\{\varphi * f; \varphi \in P^1(G)\}$ نسبت به توپولوژی τ فشرده‌نسبی باشد. اکنون فرض کنیم $\{f_\alpha\}$ توری در $\tau - AP(L^\infty(G))$ بوده که در توپولوژی τ به f همگرا باشد. برای هر $\varphi \in L^1(G)$، $\{\varphi * f_\alpha\}$ به $\varphi * f$ در نرم همگراست. از آن‌جا که برای هر α، $\varphi * f_\alpha \in AP(L^\infty(G))$ و نیز $AP(L^\infty(G))$ نسبت به نرم بسته است. بنابراین برای هر $\varphi \in L^1(G)$، $\varphi * f \in AP(L^1(G))$. از این‌رو $\tau - AP(L^1(G))$ بسته است. این نتیجه می‌دهد که $\overline{AP(L^\infty(G))} \subseteq \tau - AP(L^\infty(G))$.

برای اثبات عکس شمول، فرض کنیم $f \in \tau - AP(L^1(G))$ داده شده باشد. واحد تقریبی کراندار در $L^1(G)$ از اندازه‌های احتمال چون $\{\varphi_\alpha\}$ را در نظر می‌گیریم [۱]. اگر $\epsilon > 0$ و نیز عناصر $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ از اعضای $L^1(G)$ داده شده باشد، α موجود است که برای هر i، $\|\varphi_\alpha * \varphi_i - \varphi_i\| < \epsilon$. برای هر i،

$$\|f\varphi_\alpha * \varphi_i - f\varphi_i\| \leq \|f\|\|\varphi_\alpha * \varphi_i - \varphi_i\| \leq \|f\|\epsilon.$$

این نشان می‌دهد که تور $\{f\varphi_\alpha\}$ از اعضای $AP(L^1(G))$ نسبت به توپولوژی τ به f همگراست. در نتیجه $\overline{AP(L^1(G))} = \tau - APL^1(G))$.

برای اثبات قسمت (ii)، فرض کنیم G گروهی فشرده باشد. در برهان لم ۳.۲ ثابت شده است که برای هر عنصر $f \in L^\infty(G)$، نگاشت $x \mapsto L_x f$ از گروه G به $L^\infty(G)$ نسبت به توپولوژی τ پیوسته است. چون G فشرده است، از این‌رو $\{L_x f; x \in G\}$ فشرده است. بنابراین $f \in AP(L^\infty(G))$.

برعکس، فرض کنیم $L^\infty(G) = \tau - AP(L^\infty(G))$. برای هر $f \in L^\infty(G) = \tau - AP(L^\infty(G))$ و $\varphi \in L^1(G)$، $\varphi * f \in AP(L^1(G))$. بنابراین $\varphi * f \in AP(L^\infty(G)) \cap LUC(G)$. از آن‌جا که $C_0(G) \subseteq LUC(G)$ و برای گروه غیرفشرده G، $\{0\} = C_0(G) \cap AP(L^\infty(G))$ [۴]، نتیجه می‌گیریم که G فشرده است.

برای اثبات قسمت (iii)، اگر G متناهی باشد، از این‌رو گروهی گسسته است و بنا به گزاره ۱.۲، توپولوژی نرم با توپولوژی τ سازگار بوده و از این‌رو $AP(L^\infty(G)) = \tau - AP(L^\infty(G))$.

برعکس، بنا به فرض و قسمت (ii)، $AP(L^\infty(G)) = L^\infty(G))$. اولگر ثابت کرده که هر تابع تقریباً متناوب، لزوماً پیوسته است. بنابراین $L^\infty(G) \subseteq C(G)$. نتیجه این‌که G گروهی گسسته و از این‌رو متناهی است. □

قصد داریم ارتباط دیگری بین توابع تقریباً متناوب نسبت به نرم و توابع تقریباً متناوب نسبت به توپولوژی τ را بیان کنیم. فرض کنیم $f \in \tau - AP(L^\infty(G)) \cap LUC(G)$ داده شده باشد. فرض کنید $\{\varphi_\alpha\}$ توری از اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ باشد [۱]. واضح است که برای هر α، $f\varphi_\alpha \in AP(L^\infty(G))$. چون $f \in LUC(G) = L^\infty(G)L^1(G)$، از این‌رو $h \in L^\infty(G)$ و $\psi \in L^1(G)$ وجود دارند که $f = h\psi$. واضح است که $f\varphi_\alpha = h\psi * \varphi_\alpha$ به تابع $f = h\psi$ در نرم همگراست. چون $AP(L^\infty(G))$ نرم بسته است، از این‌رو $f \in AP(L^\infty(G))$.

برعکس فرض کنیم $f \in AP(L^\infty(G))$. واضح است که $f \in \tau - AP(L^\infty(G))$. دوباره فرض کنیم $\{\varphi_\alpha\}$ توری از اندازه های احتمال در $L^1(G)$ باشد [۱]. واضح است که برای هر α، $f\varphi_\alpha \in LUC(G) = L^\infty(G)L^1(G)$. چون $\{f\varphi; \varphi \in P^1(G)\}$ فشرده‌نسبی است، بدون این‌که به کلیت خللی وارد آید فرض کنیم $f\varphi_\alpha$ به تابع $h \in L^\infty(G)$ در نرم همگرا باشد. واضح است که $f\varphi_\alpha$ به f نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره همگراست و از این‌رو $f = h$. چون $LUC(G)$ نسبت به نرم بسته است، بنابراین $f \in LUC(G)$ و در نهایت $AP(L^\infty(G)) = \tau - AP(L^\infty(G)) \cap LUC(G)$.

گزاره **۲.۳**. فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. میانگین پایای چپ توپولوژیک منحصربه‌فرد روی $\tau - AP(L^\infty(G))$ وجود دارد.

اثبات. ثابت شده است که تابعک خطی M روی $L^\infty(G)$ موجود است که یک میانگین پایای چپ توپولوژیک روی $AP(L^\infty(G))$ بوده و چنین میانگین پایای چپ توپولوژیک منحصر به‌فرد نیز است [۴]. اکنون تور کراندار $\{\varphi_\alpha\}$ از اندازه‌های احتمال که یک واحد تقریبی کراندار برای $L^1(G)$ است را در نظر بگیرید [۶]. عنصر $\varphi \in P^1(G)$ را ثابت در نظر گرفته و نشان می‌دهیم φM یک میانگین پایای چپ توپولوژیک منحصربه‌فرد روی $\tau - AP(L^\infty(G))$ است. واضح است که $\langle \varphi M, 1\rangle = \langle M, 1\varphi\rangle = \langle M, 1\rangle = 1$ و همین‌طور

$1 = \|M\| \leq \|\varphi\|_1 \|M\| \leq \|\varphi M\|$، بنابراین $\|\varphi M\| = 1$ و از این‌رو φM یک میانگین است. برای $f \in \tau - AP(L^\infty(G))$ و $\psi \in P^1(G)$،

$$\begin{aligned} \langle \varphi M, f\psi \rangle &= \lim_\alpha \langle M, f\varphi_\alpha * \psi * \varphi \rangle = \lim_\alpha \langle M, f\varphi_\alpha * \varphi \rangle \\ &= \langle M, f\varphi \rangle = \langle \varphi M, f \rangle. \end{aligned}$$

در تساوی بالا توجه داشته باشید که M یک میانگین پایای چپ توپولوژیک روی $AP(L^\infty(G))$ است و واضح است که برای هر $f \in \tau - AP(L^\infty(G))$ و هر $\phi \in P^1(G)$، $f\phi \in AP(L^\infty(G))$. از این‌رو

$$\lim_\alpha \langle M, f\varphi_\alpha * \psi * \varphi \rangle = \lim_\alpha \langle M, f\varphi_\alpha * \varphi \rangle.$$

اکنون فرض کنیم M_1 و M_2 دو میانگین پایای چپ توپولوژیک روی $\tau - AP(L^\infty(G))$ باشد. برای هر عنصر $f \in \tau - AP(L^\infty(G))$،

$$\langle M_1, f \rangle = \lim_\alpha \langle M_1, f\varphi_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle M_2, f\varphi_\alpha \rangle = \langle M_2, f \rangle.$$

توجه کنید که M_1 و M_2 روی $AP(L^\infty(G))$ با هم برابرند. این نشان می‌دهد که تنها و تنها یک میانگین پایای چپ توپولوژیک روی $\tau - AP(L^\infty(G))$ وجود دارد. $\square$

اگر G گروهی فشرده باشد، بنا به گزاره ۱.۳، $L^\infty(G) = \tau - AP(L^\infty(G))$. بنابر گزاره ۲.۳، $L^\infty(G)$ تنها یک میانگین پایای چپ توپولوژیک منحصربه‌فرد دارد. نشان می‌دهیم که این میانگین پایای چپ توپولوژیک عضوی از $P^1(G)$ است. در واقع اگر M چنین میانگینی باشد، M تابعک خطی پیوسته روی $L^\infty(G)$ بوده و چون پایای چپ توپولوژیک است، نسبت به توپولوژی τ پیوسته است. از آن‌جا که دوگان $L^\infty(G)$ نسبت به توپولوژی τ جبر گروهی $L^1(G)$ است، بنابراین $M \in P^1(G)$.

فهرست منابع

[۱] ع. غفاری، مقدمه‌ای بر آنالیز هارمونیک، انتشارات دانشگاه سمنان، ۱۳۹۰.

[2] M. Amini, H. Nikpey and S.M. Tabatabaie, *Crossed product of C^*-algebras by hypergroups,* Math. Nachr. **292** (2019) 1897–1910.

[3] A. Aminpour, A. Dianatifar and R. Nasr Isfahani, *Asymptotically non-expansive actions of strongly amenable semigroups and fixed points,* J. Math. Anal. Appl. **461** (2018) 364-–377.

[4] J.F. Berglund, H.D. Junghenn and P. Milnes, *Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compactifications, Representations*, Wiley-Interscience and Canadian Mathematics Series of Monographs and Texts, 1988.

[5] J. Baker, A.T. Lau and J. Pym, *Module homomorphisms and topological centres associated with weakly sequentially complete Banach algebras*, J. Funct. Anal. **158** (1998) 186-–208.

[6] H.G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series 24, Oxford Univ. Press, 2000.

[7] M. Eshaghi, A. Ghaffari and M.B. Sahabi, *Induced topologies on certain Banach algebras*, Filomat **37** (2023) 1311–1318.

[8] A. Ghaffari, T. Hadadi, S. Javadi and M. Sheibani, *On the structure of hypergroups with respect to the induced topology*, Rocky Mountain J. Math. **52** (2022) 519–533.

[9] A. Ghaffari and S. Amirjan, *Invariantly complemented and amenability in Banach algebras related to locally compact groups*, Rocky Mountain J. Math. **47** (2017) 445–461.

[10] F. Ghahramani and A.T. Lau, *Multipliers and Modulus on Banach algebras related to locally compact groups,* J. Funct. Anal. **150** (1997) 478-–497.

[11] R.A. Kamyabi-Gol, *Topological center of dual Banach algebras associated to hypergroups and invariant complemented subspaces,* Ph.D. Thesis, University of Alberta, 1997.

[12] A. Medghalchi and A. Mollakhalili, *Compact and weakly compact multipliers of locally compact quantum groups,* Bull. Iran. Math. Soc. **44** (2018) 101-–136.

[13] A.M. Peralta, I. Villanueva, J.D.M. Wright and K. Ylinen, *Weakly compact operators and the strong* topology for a Banach space*, Proc. R. Soc. Edinb. A **140** (2020) 1249–1267.

[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw Hill, New York, 1991.

[15] V. Runde, *Amenable Banach Algebras,* Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2020.

[16] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2002.

[17] J.M. Sepulcre and T. Vidal, *A note on spaces of almost periodic functions with values in Banach spaces,* Canad. Math. Bull. **65** (2022) 953–962.

On dual of group algebras under a locally convex topology

Ali Ghaffari[1] † **, Marjan Sheibani**[1]**, Ebrahim Tamimi**[2]

(1) Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran
(2) Department of Mathematics, Velayat University, Iranshahr, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2023/5/17 Accepted: 2023/9/7

Abstract: For a locally compact group G, $L^1(G)$ is its group algebra and $L^\infty(G)$ is the dual of $L^1(G)$. We consider on $L^\infty(G)$ the τ-topology, i.e. the weak topology under all right multipliers induced by measures in $L^1(G)$. For such an arbitrary G the τ-topology is not weaker than the weak*-topology and not stronger than the norm topology on $L^\infty(G)$. Among the other results we mention that except for discrete G the τ-topology is always different from the norm-topology. The properties of τ are then studied further and we pay attention to the τ-almost periodic elements of $L^\infty(G)$.

Keywords: Locally compact group, Group algebras, Weak topology, Locally convex topology.

†Corresponding author.
E-mail addresses: aghaffari@semnan.ac.ir (A. Ghaffari), m.sheibani@semnan.ac.ir (M. Sheibani), e.tamimi@velayat.ac.ir (E. Tamimi).