مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۳۵۴-۳۴۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2023.43447.2151

روش تکراری هسته بازتولیدی فضای هیلبرت مبتنی بر چندجمله‌ای‌های فیبوناچی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با شرایط مرزی انتگرالی کسری

بابک آذرنوید، (۱) [۱] محمد نباتی، (۲) مهدی امام جمعه (۳)

(۱) گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه بناب، بناب، ایران
(۲) گروه علوم پایه، دانشکده مهندسی نفت آبادان، دانشگاه صنعت نفت، آبادان، ایران
(۳) گروه علوم پایه، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، گلپایگان، ۸۷۷۱۷-۶۷۴۹۸، ایران

دبیر مسئول: البرز آذرنگ

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۱۶

چکیده: در این مقاله به حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با شرایط مرزی انتگرالی کسری می‌پردازیم. به منظور حل مسائل اشاره شده از یک روش تکراری مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت استفاده می‌کنیم. در این روش هسته‌های بازتولیدی یک فضای هیلبرت با بعد متناهی، با استفاده از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی ساخته می‌شوند. به کمک هسته معین و مثبت به‌دست آمده پایه‌هایی را تولید می‌کنیم که به صورت دقیق در شرایط مرزی انتگرالی داده شده صدق می‌کنند. پس از آن به کمک پایه‌های به‌دست آمده ماتریس‌های عملیاتی مشتق کسری ساخته شده و با استفاده از آن‌ها و استفاده از روش تکرار ساده تقریبی از جواب مسأله را به‌دست می‌آوریم. در واقع تقریبی از جواب در یک فضای با بعد متناهی ساخته می‌شود. هم‌چنین همگرایی روش پیشنهادی را تحت شرایط خاص نشان داده‌ایم. به منظور بررسی کارایی روش، چند مثال را با استفاده از آن حل کرده و نتایج عددی به‌دست آمده را ارائه داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: هسته بازتولیدی فضای هیلبرت ، چندجمله‌ای‌های فیبوناچی، معادلات دیفرانسیل کسری، شرایط مرزی انتگرالی کسری.

رده‌بندی ریاضی: 26A33; 46E22; 34A45

۱ مقدمه

مشتق از مرتبه کسری یا با عبارت دقیق‌تر آن از مرتبه دلخواه توجه محققین فراوانی را در دهه‌های اخیر به خود جلب کرده است. هم‌چنین معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری به صورت گسترده در مدل‌سازی پدیده‌های علمی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله می‌توان به مدل‌هایی در ریاضیات مالی [۶]، فیزیک پلاسما [۱۶] و مکانیک [۱۷] اشاره کرد. هم‌چنین در بخش مقدمه کتاب [۷] تاریخچه‌ای از مدل‌های کاربردی

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(B. Azarnavid) babakazarnavid@ubonab.ac.ir

که با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری بیان می‌شوند ارائه شده است. از طرفی معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط مرزی غیر هم‌محل از جمله شرایط مرزی انتگرالی و شرایط مرزی چند نقطه‌ای در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۳، ۱۲]. در [۱، ۲] و مقالات دیگر که در مراجع مقالات ذکر شده موجود هستند شرایط لازم و کافی برای وجود و یکتایی یا چندگانگی جواب معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با شرایط مختلف انتگرالی بررسی و اثبات شده‌اند. اما تا جایی که ما بررسی کردیم روشی برای حل تحلیلی یا تقریبی بسیاری از این مسائل ارائه نشده است. این موضوع ما را بر آن داشت که به ارائه یک روش عددی کارآمد برای حل این دسته از مسائل بپردازیم. در مقاله [۱] شرایط وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل از مرتبه دلخواه $\nu \in (1, 2]$ با شرایط مرزی غیر هم‌محل چهار نقطه‌ای شامل انتگرال ریمان–لیوویل به صورت کلی زیر بررسی شده است:

$$\begin{cases} D^{\nu}u(x) = g(x, u(x)), 1 < \nu \leq 2, x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha_1 I^{\beta_1}u(\eta_1) = \alpha_1 \int_0^{\eta_1} \frac{(\eta_1 - s)^{\beta_1 - 1}}{\Gamma(\beta_1)} u(s)ds, 0 < \beta_1 \leq 1, \\ u(1) = \alpha_2 I^{\beta_2}u(\eta_2) = \alpha_2 \int_0^{\eta_2} \frac{(\eta_2 - s)^{\beta_2 - 1}}{\Gamma(\beta_2)} u(s)ds, 0 < \beta_2 \leq 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

که در آن D^{ν} مشتق کسری کاپوتو، g یک تابع پیوسته، $\alpha_1, \alpha_2, \eta_1, \eta_2$ مقادیر ثابت حقیقی هستند به‌طوری‌که $0 < \eta_1, \eta_2 < 1$. ما در این مقاله یک روش تکراری برای حل تقریبی مسأله (۱.۱) ارائه خواهیم داد. ما در روش پیشنهادی ابتدا با استفاده از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی هسته بازتولیدی یک فضای هیلبرت با بعد متناهی را ساخته و با کمک این هسته ماتریس مشتق کسری را به‌دست می‌آوریم. پس از آن با استفاده از ماتریس مشتق کسری و روش تکرار ساده تقریب‌هایی برای جواب مسأله مورد نظر به‌دست می‌آوریم. هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت در دهه اخیر مورد توجه بسیاری از محققین در زمینه‌های مختلف از جمله آنالیز عددی بوده و در حل تقریبی بسیاری از مسائل مختلف شامل معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرالی و مانند آن‌ها [۴، ۱۱، ۱۵] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از ویژگی‌های بسیار مهم هسته بازتولیدی فضای هیلبرت که در حل مسائل با شرایط مرزی غیر هم‌محل و انتگرالی کاربرد دارد این است که می‌توان به کمک این هسته‌های معین و مثبت پایه‌هایی را بسازیم که در شرایط مرزی به صورت دقیق صدق می‌کنند. این ویژگی مهم هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و روش ساختن این هسته‌ها در بخش‌های بعد شرح داده خواهد شد. قابل توجه است که چند مقاله پژوهشی از جمله [۴، ۱۳] در مورد کاربرد هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت ساخته شده با استفاده از چندجمله‌ای‌ها ارائه شده است. ما در این مقاله از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی برای ساخت هسته‌های بازتولیدی و تقریب جواب مسأله استفاده می‌کنیم. از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی با توجه به ویژگی‌های آن‌ها برای حل مسائل مختلف در روش‌های عددی استفاده شده است [۸، ۱۰]. ویژگی‌ها، مزایا و کاربردهای چندجمله‌ای‌های فیبوناچی، همچنین چندین تعمیم از این چندجمله‌ای‌ها در [۱۴] به‌صورت مفصل مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. به منظور بررسی کارایی و توانایی روش در حل مسائل به فرم (۱.۱)، با کمک روش پیشنهادی به حل چند مسأله پرداخته و نتایج عددی را ارائه داده‌ایم.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش به بیان برخی تعاریف و مقدمات مورد نیاز در مورد مشتق و انتگرال کسری، چندجمله‌ای‌های فیبوناچی و هسته‌های بازتولیدی می‌پردازیم.

۱.۲ مشتق و انتگرال کسری

در این‌جا به‌صورت خلاصه تعاریف و نتایج مورد نیاز از حسابان کسری را آورده‌ایم. برای مطالعه بیشتر و دقیق‌تر در این زمینه به کتاب [۷] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲. انتگرال کسری ریمان–لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - s)^{\alpha - 1} f(s)ds, x > 0. \tag{1.2}$$

تعریف ۲.۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ از تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} \int_0^x (x - s)^{\lceil \alpha \rceil - \alpha - 1} f^{(\lceil \alpha \rceil)}(s)ds, x > 0, \tag{2.2}$$

که در آن $\lceil \alpha \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی α است.

لم ۳.۲. برای $\alpha > 0$ و $t > 0$ خواهیم داشت:

$$D^{\alpha} I^{\alpha} f(x) = f(x), \tag{۳.۲}$$

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \Sigma_{j=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} f^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!}, \tag{۴.۲}$$

$$I^{\alpha} t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} t^{\gamma+\alpha}, \gamma > -1. \tag{۵.۲}$$

۲.۲ چندجمله‌ای‌های فیبوناچی

در ادامه ابتدا به معرفی چندجمله‌ای‌های فیبوناچی پرداخته و پس از آن به کمک آن‌ها هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت را می‌سازیم. چندجمله‌ای‌های فیبوناچی دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها هستند که با استفاده از رابطه تکراری زیر تعریف می‌شوند[۱۴]:

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), n \geq 3, \tag{۶.۲}$$

که در آن $F_1(x) = 1$ و $F_2(x) = x$. هم‌چنین این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر نیز صدق می‌کنند [۱۴]:

$$F'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{2} F_n(x) + \frac{x}{2} F'_n(x). \tag{۷.۲}$$

تعدادی از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی در زیر آورده شده‌اند:

$$\begin{aligned} &F_1(x) = 1, \\ &F_2(x) = x, \\ &F_3(x) = x^2 + 1, \\ &F_4(x) = x^3 + 2x, \\ &F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1, \end{aligned}$$

در [۱۴] فرم صریح چندجمله‌ای‌های فیبوناچی به صورت زیر به‌دست آمده است:

$$F_n(x) = \Sigma_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \begin{pmatrix} n-j-1 \\ j \end{pmatrix} x^{n-2j-1}, \tag{۸.۲}$$

که در آن $[.]$ تابع جزء صحیح است. هم‌چنین در [۹] نشان داده شده است که پایه‌های استاندارد توابع چندجمله‌ای، x^{n-1} برای $n \geq 1$ را می‌توان به صورت یکتا بر حسب $F_0, F_1, F_2, ..., F_n$ به صورت زیر نوشت:

$$x^{n-1} = \Sigma_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^j \left(\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix} \right) F_{n-2j}, \tag{۹.۲}$$

که در آن $F_0(x) = 0$ فرض شده است.

۳.۲ هسته بازتولیدی فضای هیلبرت با بعد متناهی

در این‌جا به کمک چندجمله‌ای‌های فیبوناچی یک فضای هیلبرت با بعد متناهی ساخته و هسته بازتولیدی آن را به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۴.۲. قرار می‌دهیم $H_N[0,1] = span\{F_1(x), F_2(x), ..., F_N(x)\}$. هر تابع $f \in H_N[0,1]$ را می‌توان به صورت یکتای زیر نوشت:

$$f(x) = \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j F_j(x), \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $\omega_1, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}$. ضرب داخلی و نرم در H_N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f,h)_{H_N} = \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j \mu_j, \tag{۱۱.۲}$$

$$\|f\|_{H_N} = \sqrt{(f,f)_{H_N}} = \sqrt{\Sigma_{j=1}^{N} \omega_j^2}, \tag{۱۲.۲}$$

که در آن $f(x) = \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j F_j(x)$ و $h(x) = \Sigma_{j=1}^{N} \mu_j F_j(x)$.

قضیه **۵.۲**. $H_N[0,1]$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی با بعد متناهی است و هسته بازتولیدی آن به‌صورت $\mathfrak{K}(x,y) = \Sigma_{j=1}^{N} F_j(x) F_j(y)$ بوده که دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{aligned}
&1)\mathfrak{K}(.,y) \in H_N, \forall y \in [0,1],\\
&2)(\mathfrak{K}(.,y), f(.))_{H_N} = f(y), \forall f \in H_N, \forall y \in [0,1],
\end{aligned}$$

که در آن خاصیت دوم را خاصیت بازتولیدی هسته گوییم.

اثبات. به سادگی می‌توان دید که برای هر y ثابت در $[0,1]$ داریم:

$$\mathfrak{K}(x,y) = \Sigma_{j=1}^{N} F_j(x) F_j(y) \in H_N[0,1].$$

همچنین به ازای هر تابع عضو $H_N[0,1]$ مانند $f(x) = \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j F_j(x)$ با توجه به تعریف ضرب داخلی در (۱۱.۲) خاصیت بازتولیدی هسته را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{K}(.,y), f(.))_{H_N} &= (\Sigma_{j=1}^{N} F_j(x) F_j(y), f(.))_{H_N}\\
&= (\Sigma_{j=1}^{N} F_j(.) F_j(y), \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j F_j(.))_{H_N}\\
&= \Sigma_{j=1}^{N} \omega_j F_j(y)\\
&= f(y).
\end{aligned}$$

□

در ادامه هسته بازتولیدی $\mathfrak{K}(x,y)$ را به صورتی بازسازی می‌کنیم که در شرایط مرزی چهار نقطه‌ای انتگرالی مسأله (۱.۱) صدق کند. به این منظور قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
L_1 u &= u(0) - \alpha_1 I^{\beta_1} u(\eta_1) = u(0) - \alpha_1 \int_0^{\eta_1} \frac{(\eta_1 - s)^{\beta_1 - 1}}{\Gamma(\beta_1)} u(s) ds,\\
L_2 u &= u(1) - \alpha_2 I^{\beta_2} u(\eta_2) = u(1) - \alpha_2 \int_0^{\eta_2} \frac{(\eta_2 - s)^{\beta_2 - 1}}{\Gamma(\beta_2)} u(s) ds.
\end{aligned}$$

پس از آن با استفاده از هسته بازتولیدی فیبوناچی $\mathfrak{K}(x,y)$، هسته‌های $\mathfrak{K}_1(x,y)$ و $\mathfrak{K}_2(x,y)$ به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1(x,y) &= \mathfrak{K}(x,y) - \frac{L_{1,x}\mathfrak{K}(x,y) L_{1,y}\mathfrak{K}(x,y)}{L_{1,x}L_{1,y}\mathfrak{K}(x,y)}\\
\mathfrak{K}_2(x,y) &= \mathfrak{K}_1(x,y) - \frac{L_{2,x}\mathfrak{K}_1(x,y) L_{2,y}\mathfrak{K}_1(x,y)}{L_{2,x}L_{2,y}\mathfrak{K}_1(x,y)},
\end{aligned}$$

که در آن اندیس x در $L_{1,x}$ نشان می‌دهد که عملگر L_1 با ثابت در نظر گرفتن y در هسته بر روی تابعی یک متغیره بر حسب x عمل می‌کند. در قضیه بعدی می‌بینیم که $\mathfrak{K}_2(x,y)$ تحت شرایطی یک هسته بازتولیدی بوده و در شرایط مرزی مسأله (۱.۱) به صورت دقیق صدق خواهد کرد:

قضیه ۶.۲. [۵] اگر $L_{1,x}L_{1,y}\mathfrak{K}(x,y) \neq 0$ و $L_{2,x}L_{2,y}\mathfrak{K}_1(x,y) \neq 0$، آن‌گاه $\mathfrak{K}_2(x,y)$ یک هسته بازتولیدی بوده و در شرایط مرزی مسأله (۱.۱) به صورت دقیق صدق می‌کند.

۳ روش عددی

در این بخش با استفاده از هسته‌های بازتولیدی به‌دست آمده در بخش قبل، ماتریس‌های مشتق کسری را ساخته و به کمک روش تکرار ساده تقریبی از جواب مسأله را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم نقاط $x_i, i = 1, ..., N$ را به عنوان نقاط هم‌محلی داریم. در این‌جا می‌توان از نقاط هم‌فاصله، نقاط گاوس لژاندر انتقال یافته، نقاط چبیشف انتقال یافته و ... به عنوان نقاط هم‌محلی استفاده کرد. با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان نقاط چبیشف در درونیابی چندجمله‌ای، در این‌جا ما از نقاط چبیشف انتقال یافته به صورت زیر:

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right), \quad i = 1, ..., N, \tag{۱.۳}$$

به عنوان نقاط هم‌محلی استفاده کرده‌ایم. پس از آن از پایه‌های $\psi_i(x) = \mathfrak{K}_2(x, x_i), i = 1, ..., N$ به عنوان توابع پایه‌ای برای تقریب جواب استفاده می‌کنیم. واضح است که توابع پایه‌ای $\psi_i(x), i = 1, ..., N$ در شرایط مرزی مسأله داده شده صدق می‌کنند. تقریبی از جواب مسأله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_N(x) = \Sigma_{k=1}^{N} c_k \psi_k(x). \tag{۲.۳}$$

حال نقاط $x_i, i = 1, ..., N$ را در (۲.۳) قرار می‌دهیم:

$$u_N(x_j) = \Sigma_{k=1}^{N} c_k \psi_k(x_j), j = 1, ..., N. \tag{۳.۳}$$

دستگاه معادلات فوق دارای فرم ماتریسی زیر است:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{c}, \tag{۴.۳}$$

که در آن بردار ضرایب $\boldsymbol{c}$، ماتریس $\boldsymbol{F}$ و بردار $\boldsymbol{u}$ به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= [c_1, c_2, ..., c_N]^T. \\ \boldsymbol{F}_{jk} &= \psi_k(x_j) = \mathfrak{K}_2(x_j, x_k), \quad j,k = 1, ..., N, \\ \boldsymbol{u} &= [u_N(x_1), ..., u_N(x_N)]^T. \end{aligned}$$

با اعمال عملگر مشتق کاپوتو D^ν بر طرفین رابطه (۲.۳) خواهیم داشت:

$$D^\nu u_N(x) = \Sigma_{k=1}^{N} c_k D^\nu \psi_k(x). \tag{۵.۳}$$

با قرار دادن نقاط $x_i, i = 1, ..., N$ در (۵.۳) به فرم ماتریسی زیر خواهیم رسید:

$$\boldsymbol{D}_\nu \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_\nu.\boldsymbol{c}, \tag{۶.۳}$$

که در آن بردار ضرایب $\boldsymbol{c}$ و بردار $\boldsymbol{u}$ مانند قبل بوده و مؤلفه های ماتریس $\boldsymbol{F}_\nu$ به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\boldsymbol{F}_{\nu,jk} = D^\nu \psi_k(x_j), \quad j,k = 1, ..., N.$$

پس از آن از رابطه (۴.۳) بردار ضرایب را به‌صورت $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}^{-1}.\boldsymbol{u}$ به‌دست آورده و با توجه به (۶.۳) خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{D}_\nu \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_\nu.\boldsymbol{F}^{-1}.\boldsymbol{u}. \tag{۷.۳}$$

بنابراین ماتریس مشتق $\boldsymbol{D}_\nu$ متناظر با عملگر مشتق کاپوتو D^ν را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{D}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu.\boldsymbol{F}^{-1}. \tag{۸.۳}$$

قابل توجه است که از آن‌جا که هسته بازتولیدی فضای هیلبرت یک هسته معین مثبت بوده، ماتریس $\boldsymbol{F}$ نیز یک ماتریس معین مثبت و در نتیجه معکوس‌پذیر است، بنابراین ماتریس مشتق کسری مورد نظر خوش‌تعریف است. حال با توجه به این‌که توابع پایه‌ای مورد استفاده در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کنند، معادله اصلی مسأله (۱.۱) را به کمک ماتریس مشتق به‌دست آمده در نقاط هم‌محلی $x_i, i = ۱, \dots, N$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\boldsymbol{D}_\nu.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}, \tag{۹.۳}$$

که در آن $\boldsymbol{G} = [g(x_۱, u_N(x_۱)), \dots, g(x_N, u_N(x_N))]^T$. پس از آن برای مقابله با غیرخطی بودن مسأله از طرح تکرار ساده زیر با فرض اولیه $\boldsymbol{u}^\circ = \circ$ استفاده می‌کنیم:

$$\boldsymbol{u}^{n+۱} = \boldsymbol{D}_\nu^{-۱}\boldsymbol{G}^n, \tag{۱۰.۳}$$

که در آن $\boldsymbol{G}^n = [g(x_۱, u_N^n(x_۱)), \dots, g(x_N, u_N^n(x_N))]^T$. در قضیه بعد شرط همگرایی طرح تکراری ارائه شده را بررسی خواهیم کرد. واضح است که هر چقدر فرض اولیه به جواب نزدیک‌تر باشد سرعت همگرایی به جواب بیشتر خواهد بود. اما با توجه به قضیه زیر مشاهده می‌کنیم که در صورت برقراری شرایط داده شده در صورت قضیه، روش تکراری ارائه شده با هر فرض اولیه دلخواه همگرا خواهد بود.

قضیه ۱.۳. فرض می‌کنیم $g(x, \boldsymbol{u})$ در شرط لیپ–شیتز زیر صدق کند:

$$|g(x, \boldsymbol{u}_۱) - g(x, \boldsymbol{u}_۲)| \leq \mathcal{L}|\boldsymbol{u}_۱ - \boldsymbol{u}_۲|, \tag{۱۱.۳}$$

که در آن $\mathcal{L}$ ثابت لیپ–شیتز است. اگر $\rho(\boldsymbol{D}_\nu^{-۱}) < \frac{۱}{\mathcal{L}}$، آن‌گاه طرح تکراری (۱۰.۳) همگراست. $\rho(\boldsymbol{D}_\nu^{-۱})$ شعاع طیفی ماتریس $\boldsymbol{D}_\nu^{-۱} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{F}_\nu^{-۱}$ است.

اثبات. برای هر $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ قرار می‌دهیم $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max_{۱\leq k\leq N} |u_k|$. با استفاده از شرط لیپ–شیتز می‌توان نشان داد

$$\|g(x, \boldsymbol{u}_۱) - g(x, \boldsymbol{u}_۲)\|_\infty \leq \mathcal{L}\|\boldsymbol{u}_۱ - \boldsymbol{u}_۲\|_\infty. \tag{۱۲.۳}$$

پس از آن با استفاده از (۱۰.۳) خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{u}^{n+۱} - \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{D}_\nu^{-۱}\left(\boldsymbol{G}^n - \boldsymbol{G}^{n-۱}\right). \tag{۱۳.۳}$$

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathfrak{C} = \mathcal{L} \times \rho(\boldsymbol{D}_\nu^{-۱})$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}^{n+۱} - \boldsymbol{u}^n\|_\infty &\leq \mathfrak{C}\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-۱}\|_\infty \\
&\leq \mathfrak{C}^۲\|\boldsymbol{u}^{n-۱} - \boldsymbol{u}^{n-۲}\|_\infty \\
&\;\vdots \\
&\leq \mathfrak{C}^n\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty.
\end{aligned}$$

فرض کنید $n, m \in \mathbb{N}$ و $m > n$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^n\|_\infty &\leq \|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-۱}\|_\infty + \|\boldsymbol{u}^{m-۱} - \boldsymbol{u}^{m-۲}\|_\infty + \dots + \|\boldsymbol{u}^{n+۱} - \boldsymbol{u}^n\|_\infty \\
&\leq \mathfrak{C}^{m-۱}\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty + \mathfrak{C}^{m-۲}\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty + \dots + \mathfrak{C}^n\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty \\
&\leq \mathfrak{C}^n\left(\Sigma_{i=\circ}^{m-n-۱}\mathfrak{C}^i\right)\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty \\
&\leq \mathfrak{C}^n\left(\Sigma_{i=\circ}^{\infty}\mathfrak{C}^i\right)\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty \\
&\leq \mathfrak{C}^n\left(\frac{۱}{۱ - \mathfrak{C}}\right)\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty.
\end{aligned}$$

عدد دلخواه $\varepsilon > \circ$ را در نظر بگیرید. از آن‌جا که $\mathfrak{C}^n \in [\circ, ۱)$، آن‌گاه عدد طبیعی به دلخواه بزرگی مانند M وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathfrak{C}^M < \frac{\varepsilon(۱-\mathfrak{C})}{\|\boldsymbol{u}^۱ - \boldsymbol{u}^\circ\|_\infty}, \tag{۱۴.۳}$$

بنابراین برای اعداد طبیعی m و n بزرگتر از M داریم:

$$\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^n\|_\infty \leq \varepsilon, \tag{۱۵.۳}$$

که نشان می‌دهد دنباله $\boldsymbol{u}^n$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}^N$ بوده و همگراست. □

۴ نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی کارایی روش به حل دو مثال و ارائه نتایج عددی می‌پردازیم. با توجه به این‌که جواب‌های دقیق مثال‌های ارائه شده در دست نیست، خطاهای نسبی و مطلق نقطه‌ای زیر را برای بررسی عملگرد روش مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$E_N = \sqrt{\frac{\Sigma_{j=۱}^N (u_{\bar{N}}(x_j) - u_N(x_j))^۲}{\Sigma_{j=۱}^N (u_{\bar{N}}(x_j)}},$$
$$\mathcal{E}_N = \max_{۱\leq j\leq N} |u_{\bar{N}}(x_j) - u_N(x_j)|,$$

که در آن $\bar{N} = ۲۵$.

مثال ۱.۴. معادله دیفرانسیل غیرخطی کسری با شرایط انتگرالی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^{\frac{۳}{۲}}u(x) = \frac{۱}{(t^۲+۲)^۲}\left(\frac{|u(x)|}{۱+|u(x)|}\right) + sin^۲ x, & x \in [\circ, ۱], \\ u(\circ) = I^{\frac{۱}{۲}}u(\frac{۱}{۴}), \quad u(۱) = I^{\frac{۱}{۲}}u(\frac{۱}{۲}). \end{cases} \tag{۱.۴}$$

در [۱] اثبات شده است که مسأله فوق دارای یک جواب یکتا است، اما جواب مورد نظر به‌دست نیامده است. ما در این‌جا به کمک روش پیشنهادی، تقریبی برای جواب مسأله فوق به‌دست آورده و نتایج را ارائه داده‌ایم. در جدول ۱ جواب تقریبی به‌دست آمده به ازای مقادیر مختلف N و تعداد تکرار $n = ۱۵$ گزارش شده است. در جدول ۲ خطاهای مطلق و نسبی برای مثال ۱.۴ به ازای مقادیر مختلف N و تعداد تکرار $n = ۱۵$ گزارش شده است.

جدول ۱: جواب تقریبی به‌دست آمده برای مثال ۱.۴.

x	N=5	N=10	N=15	N=20
0	-0.046132	-0.045586	-0.045589	-0.045591
0.1	-0.068016	-0.067174	-0.067196	-0.067194
0.2	-0.088991	-0.087916	-0.087916	-0.087923
0.3	-0.108037	-0.10697	-0.106972	-0.106973
0.4	-0.124143	-0.123292	-0.123307	-0.123313
0.5	-0.136317	-0.135813	-0.135837	-0.13584
0.6	-0.143574	-0.143389	-0.143393	-0.143397
0.7	-0.144944	-0.144877	-0.144882	-0.144887
0.8	-0.139469	-0.139272	-0.139292	-0.139296
0.9	-0.126203	-0.125734	-0.125747	-0.125751
1	-0.104213	-0.103553	-0.103567	-0.103571

جدول ۲: خطاهای $\mathcal{E}_N$ و E_N برای مثال ۱.۴ با مقادیر مختلف N.

N	5	10	15	20
$\mathcal{E}_N$	1.0725×10^{-3}	2.7906×10^{-5}	1.0321×10^{-5}	2.9937×10^{-6}
E_N	5.9295×10^{-3}	1.5445×10^{-4}	4.8700×10^{-5}	1.3344×10^{-5}

مثال **۲.۴**. معادله دیفرانسیل غیرخطی کسری با شرایط انتگرالی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u(x) = \frac{e^{-cos^2 u(x)}[1+3cos2x+2ln(2+3sin^2 u(x))]}{2+|sinu(x)|}, & x \in [0,1], \\ u(0) = I^{\frac{1}{2}}u(\frac{1}{4}), \quad u(1) = I^{\frac{1}{2}}u(\frac{1}{2}). \end{cases} \tag{۲.۴}$$

در [۱] اثبات شده است که مسأله فوق دارای حداقل یک جواب است، اما جواب مورد نظر به‌دست نیامده است. ما در این‌جا به کمک روش پیشنهادی، تقریبی برای جواب مسأله فوق به‌دست آورده و نتایج را ارائه داده‌ایم. در جدول ۳ جواب تقریبی به‌دست آمده به ازای مقادیر مختلف N و تعداد تکرار $n = ۱۵$ گزارش شده است. در جدول ۴ خطاهای مطلق و نسبی برای مثال ۲.۴ به ازای مقادیر مختلف N و تعداد تکرار $n = ۱۵$ گزارش شده است.

جدول ۳: جواب تقریبی به‌دست آمده برای مثال ۲.۴.

x	N=5	N=10	N=15	N=20
0	-0.073794	-0.063152	-0.064183	-0.064104
0.1	-0.120093	-0.100471	-0.101623	-0.101766
0.2	-0.141367	-0.120366	-0.122761	-0.122437
0.3	-0.146093	-0.13221	-0.133326	-0.133536
0.4	-0.141279	-0.134186	-0.133977	-0.134815
0.5	-0.132466	-0.129544	-0.13048	-0.130749
0.6	-0.123728	-0.12381	-0.12624	-0.125889
0.7	-0.11767	-0.119241	-0.120692	-0.12085
0.8	-0.11543	-0.114736	-0.114636	-0.115156
0.9	-0.11668	-0.111009	-0.111962	-0.112141
1	-0.119623	-0.112042	-0.112737	-0.113047

جدول ۴: خطاهای $\mathcal{E}_N$ و E_N برای مثال ۲.۴ با مقادیر مختلف N.

N	5	10	15	20
$\mathcal{E}_N$	1.7176×10^{-2}	3.7768×10^{-3}	1.6230×10^{-3}	1.6634×10^{-3}
E_N	8.1937×10^{-2}	1.9108×10^{-2}	8.9150×10^{-3}	8.0627×10^{-3}

۵ نتیجه گیری

با توجه به این‌که معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با شرایط مرزی انتگرالی کسری در اغلب مقالات تنها از نظر وجود و یکتایی جواب مورد بررسی قرار گرفته و به حل تحلیلی یا تقریبی این مسائل پرداخته نشده است، هدف ما در این مقاله ارائه یک روش تکراری مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت با بعد متناهی برای حل عددی این گونه از مسائل بوده است. در این‌جا هسته‌های بازتولیدی را با استفاده از چندجمله‌ای‌های فیبوناچی به‌دست آورده‌ایم. یکی از ویژگی‌های بسیار مهم هسته بازتولیدی فضای هیلبرت که در حل مسائل با شرایط مرزی غیر هم‌محل و انتگرالی کاربرد دارد این است که می‌توان به کمک این هسته‌های معین و مثبت پایه‌هایی را بسازیم که در شرایط مرزی به صورت دقیق صدق می‌کنند. با استفاده از پایه‌های به‌دست آمده ماتریس‌های مشتق کسری را ساخته و به کمک روش تکرار ساده تقریبی از جواب مسأله را به‌دست می‌آوریم. همچنین همگرایی روش را تحت شرایط خاص نشان داده‌ایم. به منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی دو مثال را به کمک آن حل کرده و نتایج را ارائه داده‌ایم.

فهرست منابع

[1] Ahmad, B., Ntouyas, S. K. and Assolami, A., 2013. Caputo type fractional differential equations with nonlocal Riemann-Liouville integral boundary conditions. *Journal of Applied Mathematics and computing, 41*, pp. 339-350. doi: 10.1007/s12190-012-0610-8

[2] Ahmad, B., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. and Alsaedi, A., 2017. Caputo type fractional differential equations with nonlocal Riemann-Liouville and Erdelyi-Kober type integral boundary conditions. *Filomat, 31(14)*, pp.4515-4529. doi: 10.2298/FIL1714515A

[3] Azarnavid, B., Emamjomeh, M. and Nabati, M., 2022. A shooting like method based on the shifted Chebyshev polynomials for solving nonlinear fractional multi-point boundary value problem. *Chaos, Solitons & Fractals, 159*, p.112159. doi: 10.1016/j.chaos.2022.112159

[4] Azarnavid, B., 2023. The Bernoulli polynomials reproducing kernel method for nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order with convergence analysis. *Computational and Applied Mathematics, 42(1)*, p.8. doi: 10.1007/s40314-022-02148-y

[5] Azarnavid, B., Nabati, M., Emamjome, M. and Parand, K., 2019. Imposing various boundary conditions on positive definite kernels. *Applied Mathematics and Computation, 361*, pp.453-465. doi: 10.1016/j.amc.2019.05.052

[6] Cartea, A. and del-Castillo-Negrete, D., 2007. Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 374(2)*, pp.749-763. doi: 10.1016/j.physa.2006.08.071

[7] Kai, D., 2010. The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. *In Lecture Notes in Mathematics.* Springer. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2

[8] Dwivedi, K. D. and Gomez-Aguilar, J. F., 2023. An efficient numerical method to solve ordinary differential equations using Fibonacci neural networks. *Computational and Applied Mathematics, 42(1)*, p.54. doi: 10.1007/s40314-023-02197-x

[9] Esmaeili, M. and Esmaeili, M., 2010. A Fibonacci-polynomial based coding method with error detection and correction. *Computers & Mathematics with Applications, 60(10)*, pp.2738-2752. doi: 10.1016/j.camwa.2010.08.091

[10] Haq, S. and Ali, I., 2022. Approximate solution of two-dimensional Sobolev equation using a mixed Lucas and Fibonacci polynomials. *Engineering with Computers, 38(3)*, pp.2059-2068. doi: 10.1155/2012/106343

[11] Heydari, M., Shivanian, E., Azarnavid, B. and Abbasbandy, S., 2019. An iterative multistep kernel based method for nonlinear Volterra integral and integro-differential equations of fractional order. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 361*, pp.97-112. doi: 10.1016/j.cam.2019.04.017

[12] Hosseiny, R.M., Allahviranloo, T., Abbasbandy, S. and Babolian, E., 2022. Reproducing kernel method to solve non-local fractional boundary value problem. *Mathematical Sciences, 16(3)*, pp.261-268. doi: 10.1007/s40096-021-00418-0

[13] Khaleghi, M., Moghaddam, M. T., Babolian, E. and Abbasbandy, S., 2018. Solving a class of singular two-point boundary value problems using new effective reproducing kernel technique. *Applied Mathematics and Computation, 331*, pp.264-273. doi: 10.1016/j.amc.2018.03.023

[14] Koshy, T., 2019. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2. *John Wiley & Sons.* doi: 10.1002/9781118742297

[15] Nabati, M., Emamjome, M. and Jalalvand, M., 2018. Reproducing kernel pseudospectral method for the numerical investigation of nonlinear multi-point boundary value problems. *Computational and Applied Mathematics, 37*, pp.6530-6543. doi: 10.1155/2015/158134

[16] Talarposhti, R. A., Alipour, M. and Ghasemi, S. E., 2022. A novel computational approach for a nonlinear fractional model of plasma physics. *International Journal of Modern Physics C, 33(09)*, p.2250124. doi: 10.1142/S0129183122501248

[17] Torvik, P. J. and Bagley, R. L., 1984. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics, 51(2)*, pp.294-298. doi: 10.1115/1.3167615

The iterative reproducing kernel Hilbert space method based on the Fibonacci polynomials for the nonlinear fractional differential equations with fractional integral conditions

Babak Azarnavid,(1) [2] Mohammad Nabati,(2) Mahdi Emamjomeh(3)

(1) Department of Mathematics and Computer Sciences, University of Bonab, Bonab, Iran
(2) Department of Basic Sciences, Abadan Faculty of Petroleum Engineering, Petroleum University of Technology, Abadan, Iran
(3) Basic Sciences Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Golpayegan, 87717-67498, Iran

Communicated by: Alborz Azarang

Received: 12 April 2023 Accepted: 8 October 2023

Abstract: In this study, we solve the nonlinear fractional differential equations with fractional integral boundary conditions. To solve the mentioned problems, we use an iterative method based on the reproducing kernel Hilbert spaces. In this method, the reproducing kernel of a finite-dimensional Hilbert space is constructed using Fibonacci polynomials. With the help of the obtained positive definite kernel, we produce bases that exactly satisfy the given integral boundary conditions. Then using the obtained bases, we construct fractional derivative operational matrices and obtain an approximation of the problem with the help of a simple iteration method. In fact, we construct an approximation of the solution in a finite-dimensional space. We have also shown the convergence of the method under certain conditions. To show the effectiveness of the proposed method, we have solved some examples, and the obtained results are presented.

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space, Fibonacci polynomials, Fractional differential equations, Fractional integral boundary conditions.

---

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: babakazarnavid@ubonab.ac.ir (B. Azarnavid)