مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۳۷۵-۳۵۵

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI:10.22055/JAMM.2023.43386.2148

وجود جواب برخی مسائل مقدار مرزی غیرخطی شامل مشتق کوانتومی کسری هیلفر

محمداسماعیل سامعی، [(۱)][۱] علیرضا حاتمی [(۱)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۱۲

چکیده: در این مقاله یک تعمیم کاربردی از مشتقات کسری تحت عنوان ”مشتق کوانتومی کسری هیلفر“ را ارائه و برخی از خواص آن را بیان می‌کنیم. پس از آن مسائل مربوط به مقدار اولیه و مرزی مشتق کوانتومی کسری هیلفر را معرفی و مورد بحث قرار می‌دهیم و با استفاده از آن چند نمونه از مسائل مقدار اولیه را حل می‌کنیم. به کمک اصل انقباض باناخ یکتایی جواب را اثبات می‌کنیم. سپس مثال‌هایی که درستی نتایج به‌دست آمده را نشان می‌دهد، ارائه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: حسابان کوانتومی، مشتق هیلفر، وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب مساله.

رده‌بندی ریاضی: 26A33; 34A34

۱ مقدمه

حساب کوانتومی که تحت عنوان q–حسابان نیز شناخته شده‌اند، یکی از موضوعات کاربردی در ریاضی است که در آن با استفاده از تعریف جایگزین، از حد تابع در تعریف مشتق معمولی استفاده نمی‌شود. همچنین این ویژگی ارتباطی بین علوم ریاضی و فیزیک برقرار می‌کند. سابقه این موضوع به ریاضیدان معروف اویلر برمی‌گردد. اما اولین بار در سال ۱۹۱۰ جکسون مفهوم q–مشتق و q–انتگرال را بیان کرد [۱۴]. از جمله کاربردهای حسابان کوانتومی کسری می‌توان به‌چند جمله‌ای‌های متعامد، نظریه توابع هندسی، نظریه اعداد و ترکیبیات و موضوعاتی در فیزیک مانند مکانیک، نظریه نسبیت و نظریه کوانتوم اشاره کرد [۶–۹، ۱۱–۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۸].

[۱]نویسنده مسئول مقاله

(A.R.Hatami) alirezahatami4816@gmail.com, (M.E.Samei) mesamei@basu.ac.ir

حسابان کوانتومی کسری یا q-حسابان کسری، ایده q-مشتق و q-انتگرال را برای مرتبه غیرصحیح تعمیم می‌دهد. این موضوع را می‌توان در آثار السلام (Al-Salam) و آگاروال (Agarwal) نگریست [۱، ۴] . تاریبون (Tariboon) و تویاس (Ntouyas) ایده q-حسابان را در بازه‌های متناهی بیان کرده‌اند [۱۶، ۲۱]. آنها q-مشتق کسری و q-انتگرال ریمان-لیوویل روی بازه بسته $[\tau_1, \tau_2]$ معرفی کردند [۲۲]. احمدی و همکاران در سال ۲۰۲۱، دستگاه دوتایی از معادلات q-دیفرانسیل کسری با سه جمله و شرایط مرزی

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathcal{D}_q^{\alpha_1}\varrho_1(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}_1(\mathfrak{s}, \varrho_1(\mathfrak{s}), \varrho_2(\mathfrak{s})), & 0 < \alpha_1 \le 1, \\ {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_q^{\alpha_2}\varrho_2(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}_2(\mathfrak{s}, \varrho_1(\mathfrak{s}), \varrho_2(\mathfrak{s})), & 1 < \alpha_2 \le 1, \end{cases}$$

$$\varrho_1(0) = c_1\mathcal{I}_q^{\alpha_1'}\varrho_1(\eta_1), \qquad \varrho_2(0) = c_2\mathcal{I}_q^{\alpha_2'}\varrho_2(\eta_2),$$

را برای $\mathfrak{s} \in [0, 1]$ در نظر گرفتند و در وجود جواب و یکتایی آن نتایج قابل توجه‌ای را به‌دست آوردند [۳]. پس از آن صابرامانیان و همکاران (Subramanian) وجود و پایداری جواب برای سیستم دوتایی از معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی نوع هادامارد

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha_1}\varrho_1(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}_1(\mathfrak{s}, \varrho_1(\mathfrak{s}), \varrho_2(\mathfrak{s})), & 2 < \alpha_1 \le 3, \\ {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha_2}\varrho_2(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}_2(\mathfrak{s}, \varrho_1(\mathfrak{s}), \varrho_2(\mathfrak{s})), & 2 < \alpha_2 \le 3, \end{cases}$$

برای $\mathfrak{s}$ متعلق به $[1, T]$، را تحت شرایط مرزی

$$\begin{cases} \varrho_1(1) = \varrho_1'(0) = 0, & {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha_{11}}\varrho_1(T) = \nu_1 {}^{\mathrm{H}}\mathcal{I}^{\alpha_{22}}\varrho_2(\eta_1) + \omega_1\sum_{j=1}^{k-2}\epsilon_j\varrho_2(\delta_j), \\ \varrho_2(1) = \varrho_2'(0) = 0, & {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha_{21}}\varrho_2(T) = \nu_2 {}^{\mathrm{H}}\mathcal{I}^{\alpha_{12}}\varrho_1(\eta_2) + \omega_2\sum_{j=1}^{k-2}\bar{\epsilon}_j\varrho_1(\bar{\delta}_j), \end{cases}$$

و

$$1 < \eta_2 < \eta_1 < \bar{\delta}_1 < \delta_1 < \bar{\delta}_2 < \delta_2 < \cdots < \bar{\delta}_{k-2} < \delta_{k-2} < T,$$

مورد بررسی قرار دادند، که در آن α_{11} و α_{21} متعلق به $[0, 1)$، α_{12} و α_{22} متعلق به $(0, 1)$، هستند، توابع $\mathfrak{g}_i$ متعلق به $C([1, T] \times \mathbb{R}^2)$ به ازای $i = 1, 2$ پیوسته و ضرایب دیگر همگی مقادیر ثابت حقیقی هستند [۲۰].

بنابراین در این پژوهش، براساس نتایج حاصل از مقالات مذکور، به تجزیه و تحلیل دستگاه دوتایی از معادلات دیفرانسیل q- کسری تعمیم‌یافته با شرایط مرزی متفاوت می‌پردازیم. ابتدا تعمیمی از مشتق کوانتوم کسری هیلفر که توسط وی در [۱۰] ارائه شده است را معرفی می‌کنیم. سپس مسأله مقدار مرزی جدید با مشتق کوانتومی کسری هیلفر با دو مرتبه مشتق کسری،

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \varrho(\mathfrak{s})), & \tau_1 < \mathfrak{s} < \tau_2, \\ \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{1-\gamma}\varrho(\tau_1) = \mu\,\varrho(\tau_2) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\varrho(\eta_i), \end{cases} \tag{۱.۱}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که در آن ${}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}$ مشتق کوانتومی هیلفر از مرتبه‌های $0 < \alpha < 1$، $1 < \alpha < 2$ با پارامتر $0 < \beta < 1$، $\mathfrak{g} : \mathrm{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده، μ تابع غیرخطی، λ_i ثابت‌های دلخواه، $\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}$ انتگرال کسری کوانتومی از مرتبه $\kappa_i > 0$، برای $0 < q_i < 1$، $\eta_i \in \mathrm{J}$، $i = 1, \cdots, m$ و $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$ هستند. در این راستا از اصل نگاشت انقباض باناخ استفاده می‌کنیم تا وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب‌ها را برای مسأله مذکور تضمین کنیم.

مطالب این پژوهش به ترتیب زیر ارائه شده‌اند: در بخش ۲ برخی از مفاهیم مقدماتی و لم‌های مورد نیاز در ارتباط با حسابان کوانتومی، q-حسابان کسری و کوانتومی کسری هیلفر یادآوری می‌کنیم. در بخش ۳ با استفاده از مشتق کوانتومی کسری هیلفر برخی از نتایج تعمیم یافته را ثابت می‌کنیم. در بخش ۴ به کاربردهای این نتایج برای بررسی وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب‌های مسائل مقدار اولیه اولیه و مرزی مربوط به مشتق کوانتومی کسری هیلفر را ارائه می‌دهیم. این نتایج در قالب مثال‌های کاربردی به صورت عددی نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲ پیشنیازهای حسابان کوانتومی

عدد کوانتومی $[n]_q$ به‌صورت

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \in (0,1),\, n \in \mathbb{N}, \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌شود [۱۴]. به‌عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$[3]_q = \frac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2, \qquad [3]_q = \begin{cases} \frac{31}{25}, & q=\frac{1}{5}, \\ \frac{7}{4}, & q=\frac{1}{2}, \\ \frac{217}{81}, & q=\frac{8}{9}. \end{cases}$$

تعریف ۱.۲ ([۱۴]). مشتق کوانتومی (q-مشتق) تابع $\varrho : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$، با ضابطه

$$\mathcal{D}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{\varrho(\mathfrak{s}) - \varrho\left(q\mathfrak{s} + (1-q)\tau_1\right)}{(1-q)\left(\mathfrak{s}-\tau_1\right)}, \qquad \tau_1 < \mathfrak{s} \le \tau_2,\ \mathrm{J} := [\tau_1, \tau_2], \tag{۲.۲}$$

و

$$\mathcal{D}_{q,\tau_1}\varrho(\tau_1) = \lim_{q\to\tau_1} \mathcal{D}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s}),$$

تعریف می‌شود. اگر $\tau_1 = 0$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{D}_{q}\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{\varrho(\mathfrak{s}) - \varrho(\mathfrak{s}q)}{(1-q)\mathfrak{s}}, \tag{۳.۲}$$

برای هر $\mathfrak{s}$ متعلق به $[0, \tau_2]$ برقرار است، که به q-مشتق جکسون [۲] معروف است.

مشاهده می‌شود که رابطه (۳.۲) همان مشتق حول نقطه صفر است در حالی‌که تاریبون (Tariboon) و همکاران معادله (۲.۲) را حول نقطه τ_1 تعریف کرده‌اند [۲۱]. با در نظر گرفتن تابع توانی $\varrho(\mathfrak{s}) = (\mathfrak{s}-\tau_1)^\alpha$، آنگاه q-مشتق آن به‌صورت

$$\mathcal{D}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^\alpha = [\alpha]_q(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\alpha-1}, \qquad \alpha \ge 0, \tag{۴.۲}$$

برای $\mathfrak{s} > \tau_1$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲ ([۵]). q-انتگرال تابع ϱ به‌صورت

$$\mathcal{I}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s}) = \int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} \varrho(\xi)_{\tau_1}\,\mathrm{d}_q\xi = (1-q)(\mathfrak{s}-\tau_1)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \varrho\big(q^n\mathfrak{s} + (1-q^n)\tau_1\big), \tag{۵.۲}$$

روی بازه J تعریف می‌شود. به‌طور مشابه برای $\tau_1 = 0$، q-انتگرال جکسون به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\int_0^{\mathfrak{s}} \varrho(\xi)\,\mathrm{d}_q\xi = (1-q)\mathfrak{s}\sum_{n=0}^{\infty} q^n\varrho(q^n\mathfrak{s}), \tag{۶.۲}$$

با انتخاب $\varrho(\mathfrak{s}) = (\mathfrak{s}-\tau_1)^\alpha$ برای $\alpha > -1$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{I}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^\alpha = \int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} (\xi-\tau_1)^\alpha\,\mathrm{d}_q\xi = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\alpha+1}}{[\alpha+1]_q}, \tag{۷.۲}$$

[2] Jackson

نویسندگان در [۲۱] ثابت کردند که

$$\int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} \left(\int_{\tau_1}^{\xi} \varrho(r)_{\tau_1}\, \mathrm{d}_q r \right) \mathrm{d}_q \xi = \int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} \left[\mathfrak{s} - (q\xi + (1-q)\tau_1) \right] \varrho(\xi)\, \mathrm{d}_q \xi. \tag{۸.۲}$$

هم‌چنین در [۲۲]، تابع توانی از مرتبه عدد طبیعی k برای $\mathfrak{s}$ و ξ متعلق به J به‌صورت

$$(\mathfrak{s}-\xi)_{q,\tau_1}^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{i}(\xi) \right), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tag{۹.۲}$$

و $(\mathfrak{s}-\xi)_{q,\tau_1}^{(0)} = 1$ تعریف کردند که در آن

$$\Phi_{q,\tau_1}^{i}(\mathfrak{s}) = q^i \mathfrak{s} + \left(1 - q^i\right) \tau_1,$$

می‌باشد. در حالتی که $\alpha \in \mathbb{R}$ در اینصورت تابع توانی از مرتبه α به‌صورت

$$(\mathfrak{s}-\xi)_{q,\tau_1}^{(\alpha)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{i}(\xi) \right)}{\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{i+\alpha}(\xi) \right)}, \tag{۱۰.۲}$$

تعریف می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر $\alpha = \frac{3}{2}$ و $\alpha = \frac{5}{3}$ انتخاب شوند، در این‌صورت به ترتیب داریم

$$(\mathfrak{s}-\xi)_{q,\tau_1}^{(3/2)} = \frac{(\mathfrak{s}-\xi)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{2}(\xi)\right)\cdots}{\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{3/2}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{5/2}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{7/2}(\xi)\right)}, \tag{۱۱.۲}$$

$$(\mathfrak{s}-\xi)_{q,\tau_1}^{(5/3)} = \frac{(\mathfrak{s}-\xi)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{2}(\xi)\right)\cdots}{\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{5/3}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{8/3}(\xi)\right)\left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}^{11/3}(\xi)\right)}, \tag{۱۲.۲}$$

اکنون ضمن یادآوری q-مشتق کسری و q-انتگرال کسری ریمان-لیوویل روی J، برخی از گزاره‌هایی که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را از مرجع [۲۲] بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۲ ([۲۲]). q-مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \geq 0$ روی بازه J به‌صورت

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha} \varrho(\mathfrak{s}) &= \mathcal{D}_{q,\tau_1}^{n} \left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{n-\alpha} \varrho(\mathfrak{s}) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma_q(n-\alpha)} (\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{n}) \int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} \left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}(\xi) \right)_q^{(n-\alpha-1)} \varrho(\xi)\, \mathrm{d}_q \xi, \qquad \alpha > 0, \end{aligned}$$

و ${}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{0} \varrho(\mathfrak{s}) = \varrho(\mathfrak{s})$ تعریف می شود که در آن $n = [\alpha]$ جزء صحیح است، Γ_q با ضابطه زیر معرفی می‌گردد:

$$\Gamma_q(\varkappa) = \frac{(1-q)_{q,0}^{(\varkappa-1)}}{(1-q)^{\varkappa-1}}, \qquad \varkappa \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\},$$

تعریف ۴.۲ ([۲۲]). فرض کنید $\alpha \geq 0$ و تابع ϱ روی بازه J تعریف شده باشد. q-انتگرال کسری ریمان-لیوویل به‌صورت

$$\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha} \varrho(\mathfrak{s}) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\mathfrak{s}} \left(\mathfrak{s} - \Phi_{q,\tau_1}(\xi) \right)_q^{(\alpha-1)} \varrho(\xi)\, \mathrm{d}_q \xi, \qquad \alpha > 0,\ \mathfrak{s} \in \mathrm{J}.$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین داریم $\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha} \varrho(\mathfrak{s}) = \varrho(\mathfrak{s})$ مشروط بر اینکه عبارت سمت راست موجود باشد.

لم ۵.۲ ([۲۲]). فرض کنید که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ و ϱ یک تابع پیوسته روی بازه J باشد و $a \geq ۰$. q-انتگرال کسری ریمان - لیوویل دارای ویژگی زیر است

$$\mathcal{I}^{\beta}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s}), \tag{۱۳.۲}$$

لم ۶.۲ ([۲۲]). فرض کنید ϱ یک تابع q-انتگرال‌پذیر روی بازه J باشد. آنگاه

$$^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \varrho(\mathfrak{s}), \qquad \alpha > ۰, \mathfrak{s} \in \mathrm{J}.$$

لم ۷.۲ ([۲۲]). فرض کنید $\alpha > ۰, n \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه برای هر $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{D}^{n}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \mathcal{D}^{n}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) - \sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\alpha+k-n}}{\Gamma_q(\alpha+k-n+۱)}\left(\mathcal{D}^{k}_{q,\tau_۱}\varrho(\tau_۱)\right).$$

هم‌چنین از [۲۲] روابط زیر را داریم

$$^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\alpha}_{q,\tau_۱}(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\beta} = \frac{\Gamma_q(\beta+۱)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+۱)}(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\beta-\alpha}, \tag{۱۴.۲}$$

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\beta} = \frac{\Gamma_q(\beta+۱)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+۱)}(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\beta+\alpha}. \tag{۱۵.۲}$$

تعریف ۸.۲ ([۲]). q-مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha \geq ۰$ روی بازه J به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}^{\mathrm{C}}\mathcal{D}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s}) &= \mathcal{I}^{n-\alpha}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{D}^{n}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right)\\ &= \int_{\tau_۱}^{\mathfrak{s}}\frac{\left(\mathfrak{s}-\Phi_{q,\tau_۱}(\xi)\right)_q^{(n-\alpha-۱)}}{\Gamma_q(n-\alpha)}\mathcal{D}^{n}_{q,\tau_۱}\varrho(\xi)\,\mathrm{d}_q\xi, \qquad \alpha > ۰,\end{aligned}$$

و $\varrho(\mathfrak{s}) = {}^{\mathrm{C}}\mathcal{D}^{۰}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})$ که در آن n همان جزء صحیح α است.

لم ۹.۲ ([۲]). فرض کنید $\alpha > ۰$ و n کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی α باشند. آنگاه برای هر $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\left(^{\mathrm{C}}\mathcal{D}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \varrho(\mathfrak{s}) - \sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{k}}{\Gamma_q(k+۱)}\left(\mathcal{D}^{k}_{q,\tau_۱}\varrho(\tau_۱)\right),$$

لم ۱۰.۲ ([۱۹]). فرض کنید $u, v > ۰$، $۰ < p$ و $۱ > q$. آنگاه برای $\pi \in \mathrm{J}$،

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{p,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{q,\tau_۱}(۱)(\pi)\right) = \frac{\Gamma_p(\beta+۱)}{\Gamma_p(\alpha+\beta+۱)\Gamma_q(\beta+۱)}(\pi-\tau_۱)^{\alpha+\beta},$$

۳ مشتق کوانتومی کسری هیلفر

تعریف ۱.۳. مشتق کوانتومی کسری هیلفر تابع ϱ روی بازه J از مرتبه $\alpha > ۰$ با پارامتر $\beta \in [۰,۱]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s}) = \mathcal{I}^{\beta(n-\alpha)}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{D}^{n}_{q,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{(۱-\beta)(n-\alpha)}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s})\right)\right), \tag{۱.۳}$$

که در آن $n-۱<\alpha<n$، عدد کوانتومی $۰<q<۱$ و متغیر $\tau_۱<\mathfrak{s}$ هستند. اگر $\beta=۰$ آنگاه

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,۰}\varrho(\mathfrak{s})={}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha},$$

که همان مشتق کوانتومی کسری ریمان-لیوویل است. اگر $\beta=۱$ آنگاه

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,۱}\varrho(\mathfrak{s})={}^{\mathrm{C}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s}),$$

که همان مشتق کوانتومی کسری کاپوتو است. با در نظر گرفتن متغیر γ به صورت

$$\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha), \tag{۲.۳}$$

رابطه (۱.۳) به شکل

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s})=\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\gamma-\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma}\varrho(\mathfrak{s})\right), \qquad \mathfrak{s}\in\mathrm{J}, \tag{۳.۳}$$

تغییر می‌کند.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $\varrho\in C^n(\mathrm{J})$، $n-۱<\alpha<n$، $۰\leq\beta\leq۱$ و عدد کوانتومی $۰<q<۱$ باشد. در این صورت

(۱)
$$\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left({}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s})\right)=\varrho(\mathfrak{s})-\sum_{j=۱}^{n}\frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-j}}{\Gamma_q(\gamma-i+۱)}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma-j}(\tau_۱)\right),$$

(۲) $^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)=\varrho(\mathfrak{s})$، که در آن γ همان تعریف (۲.۳) را دارد.

اثبات. q-انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha>۰$ با اعمال تعریف مشتق کسری هیلفر از روابط (۱۳.۲) و (۳.۳) خواهیم داشت:

$$\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left({}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s})\right)=\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\gamma-\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma}\varrho(\mathfrak{s})\right)\right)=\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\gamma}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma}\varrho(\mathfrak{s})\right).$$

با استفاده از (۴.۳)، نتیجه (۱) را بدست می‌آوریم. برای اثبات (۲)، از (۳.۳) خواهیم داشت:

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)=\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\gamma-\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)\right)=\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\gamma-\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\gamma-\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right).$$

از طرفی چون $\gamma\in[\alpha,n]$ است، با استفاده از (۴.۳) داریم:

$$^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_۱}^{\alpha,\beta}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)=\varrho(\mathfrak{s})-\frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-\alpha-۱}}{\Gamma_q(\gamma-\alpha)}\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{۱+\alpha-\gamma}\varrho(\tau_۱).$$

پیوستگی ϱ کرانداری آن را نتیجه می‌دهد. یعنی $|\varrho(\mathfrak{s})|\leq M$، برای هر $\mathfrak{s}\in\mathrm{J}$ و $M\geq۰$ برقرار است. از این‌رو

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{۱+\alpha-\gamma}\varrho(\tau_۱)\right)\right|&\leq M\lim_{\mathfrak{s}\to\tau_۱}\left|\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{۱+\alpha-\gamma}(۱)(\mathfrak{s})\right)\right|\\&=\frac{M}{\Gamma_q(۲+\alpha-\gamma)}\lim_{\mathfrak{s}\to\tau_۱}(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{۱+\alpha-\gamma}=۰,\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که نتیجه (۲) همواره برقرار است. □

ملاحظه ۳.۳. عملگر ${}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{-\phi}$ را می‌توانیم با $\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\phi}$ جایگزین کنیم. از آنجا که $\beta \in [0,1]$ و $\gamma \in [\alpha, n]$ در نتیجه برخی از نتایج قضیه ۲.۳ به صورت

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\gamma-n}\varrho(\tau_1) = \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{n-\gamma}\varrho(\tau_1), \qquad {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\gamma-\alpha-j}\varrho = \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha+j-\gamma}\varrho(\tau_1), $$

نیز می‌توانند بیان شوند.

در ادامه لم‌های ۴.۳ و ۵.۳ را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۴.۳. فرض کنید $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ باشد، در این صورت برای هر $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$ خواهیم داشت

$$ \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right) = \varrho(\mathfrak{s}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\alpha-j}}{\Gamma_q(\alpha-j+1)}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha-j}\varrho(\tau_1)\right), \tag{۴.۳} $$

اثبات. با استفاده از لم ۷.۲ داریم

$$ \begin{aligned} \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right) &= \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\Big(\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{n}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{n-\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)\Big) \\ &= \mathcal{D}_{q,\tau_1}^{n)}\Big(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{n-\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\right)\Big) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\alpha+k-n}}{\Gamma_q(\alpha+k-n+1)}\Big(\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{k}\mathcal{I}^{n-\alpha}\varrho(\mathfrak{s})\Big)(\tau_1) \\ &= \mathcal{D}_{q,\tau_1}^{n}\Big(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{n}\varrho(\mathfrak{s})\Big) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\alpha+k-n}}{\Gamma_q(\alpha+k-n+1)}\Big({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha+k-n}\varrho\Big)(\tau_1), \end{aligned} $$

طبق لم ۵.۲، با قرار دادن $j = n-k$ به ازای $k = 0, \dots, n-1$ در رابطه (۴.۳) و استفاده از لم ۶.۲ اثبات تمام است. □

لم ۵.۳. فرض کنید $\lambda > \alpha - 1$، $0 \leq \beta \leq 1$. ثابت باشند. آنگاه

$$ {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda} = \frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\lambda-\alpha+1)}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda-\alpha}. \tag{۵.۳} $$

اثبات. با استفاده از روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) داریم

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda} &= \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\gamma-\alpha}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\gamma}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda}\right) \\ &= \frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\lambda-\alpha+1)}\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\gamma-\alpha}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda-\gamma} \\ &= \frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\lambda-\alpha+1)}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\lambda-\alpha}. \end{aligned} $$

این نتیجه اثبات را کامل می‌کند. □

۴ کاربردها

در این بخش کاربردهایی از تعمیم مشتق کسری کوانتومی هیلفر در معادله (۱.۳) را برای بررسی وجود جواب دو مسأله مقدار مرزی جدید از مرتبه‌های $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$ بیان می‌کنیم. بدین منظور از اصل نگاشت انقباض باناخ استفاده می‌کنیم تا وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب‌ها را برای مسائل اشاره شده، تضمین کند.

۱.۴ مسأله مقدار مرزی از مرتبه $0 < \alpha < 1$

مسأله مقدار مرزی با مشتق کسری کوانتومی هیلفر از مرتبه $0 < \alpha < 1$،

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s})), & \tau_1 < \mathfrak{s} < \tau_2, \\ \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{1-\gamma}\varrho(\tau_1) = \mu\,\varrho(\tau_2) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\varrho(\eta_i), \end{cases} \tag{۱.۴}$$

که در آن $0 < \beta < 1$، $\mathfrak{g} : \mathrm{J}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، μ تابع غیرخطی، λ_i ثابت‌های دلخواه، $\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}$ انتگرال کسری کوانتومی از مرتبه $\kappa_i > 0$، برای $0 < q_i < 1$، $\eta_i \in \mathrm{J}$ به ازای $i = 1,\cdots,m$ و γ متغیر تعریف شده در (۲.۳) هستند.

ابتدا مسأله (۱.۴) را به یک معادله انتگرال تبدیل می‌کنیم. به این خاطر، لم ۱.۴ که ابزار اساسی برای تبدیل مسأله مقدار مرزی غیرخطی (۱.۴) به معادله انتگرالی و به طبع آن یک مسئله نقطه ثابت را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۴. فرض کنید $\hbar : \mathrm{J}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و $\Delta_1 \neq 0$. آنگاه مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,\tau_1}^{\alpha,\beta}\varrho(\mathfrak{s}) = \hbar(\mathfrak{s}), & 0 < \alpha < 1,\ \tau_1 < \mathfrak{s} < \tau_2, \\ \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{1-\gamma}\varrho(\tau_1) = \mu\,\varrho(\tau_2) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\varrho(\eta_i), \end{cases} \tag{۲.۴}$$

هم‌ارز معادله انتگرال

$$\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}}{\Delta_1\Gamma_q(\gamma)}\left[\mu\,\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\tau_2) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\eta_i)\right)\right] + \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\mathfrak{s}), \tag{۳.۴}$$

است، که در آن

$$\Delta_1 = 1 - \frac{\mu}{\Gamma_q(\gamma)}(\tau_2-\tau_1)^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma_q(\gamma)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_i-a)^{\gamma+\kappa_i-1}. \tag{۴.۴}$$

اثبات. با قرار دادن رابطه (۱) از قضیه ۲.۳ برای $n = 1$ در معادله (۱.۴) داریم

$$\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}A + \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\mathfrak{s}), \tag{۵.۴}$$

که در آن $A = \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{1-\gamma}\varrho(\tau_1)$ است. در نتیجه

$$\varrho(\tau_2) = \frac{(\tau_2-\tau_1)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}A + \mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\tau_2),$$

و

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\varrho(\eta_i) &= \frac{A}{\Gamma_q(\gamma)}\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i\tau_1}I_{q_i}^{\kappa_i}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}\right]_{\mathfrak{s}=\eta_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\eta_i)\right) \\ &= \frac{A}{\Gamma_q(\gamma)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_1)^{\gamma+\kappa_i-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_1}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_1}^{\alpha}\hbar(\eta_i)\right). \end{aligned}$$

به کمک شرایط مرزی (۱.۴) داریم

$$A = \frac{1}{\Delta_1}\left[\mu \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\hbar(\tau_2) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\hbar(\eta_i)\right)\right].$$

معادله انتگرال (۳.۴) با جایگزینی ثابت A در (۵.۴) به دست می‌آید. برعکس، با گرفتن مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه γ از دو طرف رابطه (۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma}_{q,\tau_1}x(\mathfrak{s}) = \frac{1}{\Delta_1\Gamma_q(\gamma)}\Big[&\mu\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\hbar(\tau_2)\\
&+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\hbar(\eta_i)\right)\Big]{}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1} + {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma}_{q,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\hbar(\mathfrak{s})\right)\\
= {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\beta(1-\alpha)}_{q,\tau_1}\hbar(\mathfrak{s}).&
\end{aligned}$$

با اعمال انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\beta(1-\alpha)$ از دو طرف معادله حاصل و به کمک

$${}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s}) = \mathcal{I}^{\gamma-\alpha}_{q,\tau_1}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s})\right), \qquad \mathfrak{s}\in \mathrm{J},$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\beta(1-\alpha)}_{q,\tau_1}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s})\right) = {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{q,\tau_1}\varrho(\mathfrak{s}) &= \mathcal{I}^{\beta(1-\alpha)}_{q,\tau_1}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\beta(1-\alpha)}_{q,\tau_1}\hbar(\mathfrak{s})\right)\\
&= \hbar(\mathfrak{s}) - \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma_q\left(\beta(1-\alpha)\right)}\mathcal{I}^{1-\beta(1-\alpha)}_{q,\tau_1}\hbar(\tau_1) = \hbar(\mathfrak{s}),
\end{aligned}$$

بنابراین تابع ϱ در (۳.۴) جواب مسأله (۲.۴) بوده و بعلاوه می‌توان با محاسبه مستقیم نشان داد که شرایط مرزی (۲.۴) نیز صدق کنند. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

فضای باناخ شامل توابع پیوسته، $C(\mathrm{J},\mathbb{R})$، و فضای وزن‌دار توابع پیوسته

$$C_{1-\gamma}(\mathrm{J},\mathbb{R}) = \left\{\varrho : \mathrm{J}\to\mathbb{R} \;:\; (\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\varrho(\mathfrak{s})\in C(\mathrm{J},\mathbb{R})\right\},$$

را به ترتیب با نرمهای

$$\|\varrho\| = \sup_{\mathfrak{s}\in \mathrm{J}}|\varrho(\mathfrak{s})|,$$

و

$$\|\varrho\|_{1-\gamma} = \sup_{\mathfrak{s}\in\mathrm{J}}\left\{\left|(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\varrho(\mathfrak{s})\right|\right\},$$

در نظر می‌گیریم. واضح است که $C_{1-\gamma}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ یک فضای باناخ است. در این مرحله در قضیه ۲.۴، با استفاده از اصل نگاشت انقباض باناخ نشان می‌دهیم که یک جواب منحصربه‌فرد برای مسأله مقدار مرزی کوانتومی هیلفر (۱.۴) وجود دارد.

قضیه ۲.۴. فرض کنید که $\mathfrak{g} : \mathrm{J}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی غیرخطی و $\ell > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho) - \mathfrak{g}(\mathfrak{s},\acute{\varrho})| \le \ell|\varrho - \acute{\varrho}|, \tag{۶.۴}$$

برای هر $\mathfrak{s}\in\mathrm{J}$ و $\varrho,\acute{\varrho}\in\mathbb{R}$ برقرار باشد. اگر $\ell\Delta_2 < 1$ باشد، آنگاه مسأله مقدار مرزی (۱.۴) یک جواب یکتا در $C_{1-\gamma}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ خواهد داشت، که در آن

$$\begin{aligned}
\Delta_2 := \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\Big[&|\mu|(\tau_2-\tau_1)^{\gamma+\alpha-1}\\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_1)^{\gamma+\alpha+\kappa_i-1}\Big] + \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}.
\end{aligned}\tag{۷.۴}$$

اثبات. برای استفاده از اصل نگاشت انقباض باناخ، به کمک لم (۱.۴)، عملگر

$$\mathcal{K} : C_{1-\gamma}(\mathrm{J},\mathbb{R}) \to C_{1-\gamma}(\mathrm{J},\mathbb{R}),$$

را با ضابطه

$$\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}}{\Delta_1\Gamma_q(\gamma)}\left[\mu\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\mathfrak{g}(\tau_2,\varrho(\tau_2)) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\big(\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\mathfrak{g}(\eta_i,\varrho(\eta_i))\big)\right] + \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}\mathfrak{g}\big(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s})\big),$$

تعریف می‌کنیم، که در آن Δ_1 در رابطه (۴.۴) تعریف شده است. ثابت خواهیم کرد که $\mathcal{K}$ نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد، که همان جواب منحصربه‌فرد مسأله مقدار مرزی (۱.۴) است. فرض کنیم $\mathfrak{g}^* = \sup_{\mathfrak{s}\in\mathrm{J}}|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},0)|$ باشد. حال گوی باز $\mathfrak{B}_r$ با شعاع r، با ویژگی

$$r \geq \frac{\mathfrak{g}^*\Delta_3}{1-\ell\Delta_2},$$

را در نظر می‌گیریم که در آن

$$\begin{aligned}\Delta_3 := \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}&\left[\frac{|\mu|(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\right.\\ &\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\alpha+1)}{\Gamma_{q_i}(\alpha+\kappa_i+1)\Gamma_q(\alpha+1)}(\eta_j-a)^{\alpha+\kappa_j}\right] + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

آنگاه برای هر $\rho\in\mathfrak{B}_r$ از (۶.۴) داریم:

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\ \rho)| \leq |\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\rho)-\mathfrak{g}(\mathfrak{s},0)| + |\mathfrak{g}(\mathfrak{s},0)| \leq \ell|\rho| + \mathfrak{g}^*,$$

و نیز از لم ۱۰.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\left|(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s})\right| \leq{}& \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}\left[|\mu|\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\tau_2,\varrho(\tau_2))|\right.\\ &\left.+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_\mathrm{i}|\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\eta_i,\varrho(\eta_i)|)\right)\right]\\ &+(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s}))|\\ \leq{}& \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}\left[|\mu|\left\{\ell\|\varrho\|_{1-\gamma}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}(\tau_2)+\mathfrak{g}^*\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(1)(\tau_2)\right\}\right.\\ &+\ell\|\varrho\|_{1-\gamma}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}\right)(\eta_i)\\ &\left.+\mathfrak{g}^*\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(1)\right)(\eta_i)\right]\\ &+(\tau_2-\tau_1)^{1-\gamma}\{L\|\varrho\|_{1-\gamma}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}(\tau_2)+\mathfrak{g}^*\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(1)(\tau_2)\}\\ ={}& \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}\left[|\mu|\ell\|\varrho\|_{1-\gamma}\frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}(\tau_2-\tau_1)^{\gamma+\alpha-1}\right.\\ &+\mathfrak{g}^*\frac{|\mu|(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ell\|\varrho\|_{1-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_q(\gamma)\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_1)^{\gamma+\alpha+\kappa_i-1}\\
&+\mathfrak{g}^*\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\alpha+1)}{\Gamma_{q_i}(\alpha+\kappa_i+1)\Gamma_q(\alpha+1)}(\eta_i-\tau_1)^{\alpha+\kappa_i}\Big]\\
&+\ell\|\varrho\|_{1-\gamma}\frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}+\mathfrak{g}^*\frac{(\tau_2-\tau_1)^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\\
\le{}& \ell r\Delta_2+\mathfrak{g}^*\Delta_3\le r.
\end{aligned}
$$

یعنی $\|\mathcal{K}\varrho\|_{1-\gamma}\le r$ است و از این‌رو $\mathcal{K}\mathfrak{B}_r\subseteq\mathfrak{B}_r$ برقرار است. در ادامه نشان خواهیم داد که $\mathcal{K}$ یک انقباض است. بدین منظور برای هر $\varrho,\acute{\varrho}\in\mathfrak{B}_r$ داریم

$$
\begin{aligned}
&|(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s})-(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\mathcal{K}\acute{\varrho}(\mathfrak{s})|\\
&\quad\le\frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}\Big[|\mu|\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\tau_2,\varrho(\tau_2))-\mathfrak{g}(\tau_2,\acute{\varrho}(\tau_2))|\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\,\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\eta_i,\varrho(\eta_i))-\mathfrak{g}(\eta_i,\acute{\varrho}(\eta_i))|\right)\Big]\\
&\qquad+(\mathfrak{s}-\tau_1)^{1-\gamma}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s}))-\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\acute{\varrho}(\mathfrak{s}))|\\
&\quad\le\frac{\ell\|\varrho-\acute{\varrho}\|_{1-\gamma}}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma)}\Big[|\mu|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}(\tau_2)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\,\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_1}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}\right)(\eta_i)\Big]\\
&\qquad+\ell\|\varrho-\acute{\varrho}\|_{1-\gamma}\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_1}(\mathfrak{s}-\tau_1)^{\gamma-1}(\tau_2)=\ell\Delta_2\,\|\varrho-\acute{\varrho}\|_{1-\gamma}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\|\mathcal{K}\varrho-\mathcal{K}\acute{\varrho}\|_{1-\gamma}\le\ell\Delta_2\|\varrho-\acute{\varrho}\|_{1-\gamma}.$$

چون $\ell\Delta_2<1$ پس $\mathcal{K}$ یک عملگر انقباضی است. بنابراین مسأله مقدار مرزی (۱.۴) دارای یک جواب منحصربه‌فرد در J است. این اثبات را کامل می‌کند. □

مثال ۳.۴. مسأله مقدار مرزی با مشتق کسری کوانتومی هیلفر

$$
\begin{cases}
{}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{1/3,5/7}_{q,\tau_1}=\dfrac{7e^{-(4\mathfrak{s}-1)^2}}{2(8\mathfrak{s}+13)}\left(\dfrac{\varrho^2(\mathfrak{s})+2|\varrho(\mathfrak{s})|}{1+|\varrho(\mathfrak{s})|}\right)+\dfrac{1}{2}\mathfrak{s}^2+1,\quad \frac{1}{4}<\mathfrak{s}<\frac{3}{2},\\
\mathcal{I}^{4/21}_{q,\tau_1}\varrho\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{\pi}\varrho\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{44}\mathcal{I}^{1/2}_{1/3,\tau_1}\varrho\left(\dfrac{1}{2}\right)\\
\qquad+\dfrac{3}{55}\mathcal{I}^{3/5}_{1/5,\tau_1}\varrho\left(\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{5}{66}\mathcal{I}^{7/5}_{1/7,\tau_1}\varrho\left(\dfrac{5}{4}\right),
\end{cases}
\tag{۸.۴}
$$

را به ازای

$$q\in\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{8}{9}\right\},$$

در نظر می‌گیریم. واضح است که $\alpha=\frac{1}{3}\in(0,1)$، $\beta=\frac{5}{7}\in(0,1)$، $\tau_1=\frac{1}{4}$، $\tau_2=\frac{3}{2}$،

$$\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)=\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{21},$$

$\mu=\frac{1}{\pi}\in\mathbb{R}$، $\lambda_1=\frac{1}{44}$، $\lambda_2=\frac{3}{55}$، $\lambda_3=\frac{5}{66}$ ثابت‌های حقیقی، $\kappa_1=\frac{1}{2}>0$، $\kappa_2=\frac{3}{5}>0$، $\kappa_3=\frac{7}{5}>0$، $q_1=\frac{1}{3}\in(0,1)$، $q_2=\frac{1}{5}\in(0,1)$، $q_3=\frac{1}{7}\in(0,1)$، $\eta_1=\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$، $\eta_2=\frac{3}{4}\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$ و $\eta_3=\frac{5}{4}\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$ هستند. با مقادیر مشخص شده در مسأله (۸.۴)، و استفاده از روابط (۴.۴) و (۷.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1-\frac{\mu}{\Gamma_q(\gamma)}(\tau_2-\tau_1)^{\gamma-1}-\frac{1}{\Gamma_q(\gamma)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_i-a)^{\gamma+\kappa_i-1}\\
&= 1-\frac{\frac{1}{\pi}}{\Gamma_q\left(\frac{17}{21}\right)}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}-1}-\frac{1}{\Gamma_q\left(\frac{17}{21}\right)}\left[\frac{\frac{1}{44}\Gamma_{1/3}\left(\frac{17}{21}\right)}{\Gamma_{1/3}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{1}{2}-1}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\frac{3}{55}\Gamma_{1/5}\left(\frac{17}{21}\right)}{\Gamma_{1/5}\left(\frac{17}{21}+\frac{3}{5}\right)}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{3}{5}-1}+\frac{\frac{5}{66}\Gamma_{1/7}\left(\frac{17}{21}\right)}{\Gamma_{1/7}\left(\frac{17}{21}+\frac{7}{5}\right)}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{7}{5}-1}\right]\\
&\simeq\begin{cases}1.0170, & q=\frac{1}{5},\\ 0.9872, & q=\frac{1}{2},\\ 0.9659, & q=\frac{8}{9},\end{cases}
\end{aligned}$$

و

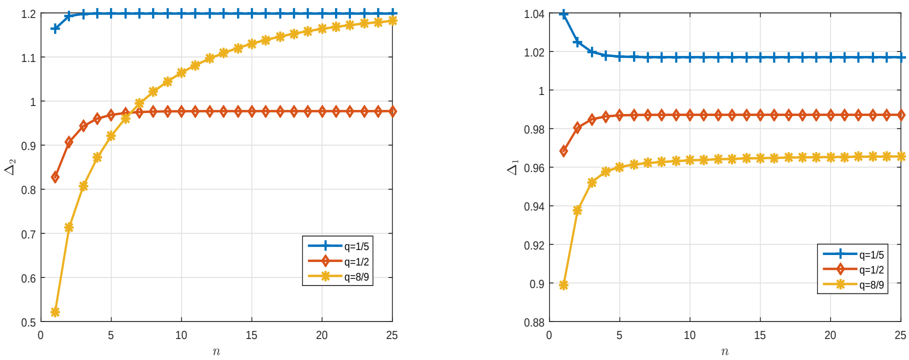
$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\left[|\mu|(\tau_2-\tau_1)^{\gamma+\alpha-1}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\alpha+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_1)^{\gamma+\alpha+\kappa_i-1}\right]+\frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}\\
&= \frac{1}{|\Delta_1|\Gamma_q\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}\right)}\left[\left|\frac{1}{\pi}\right|\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{1}{3}-1}\right.\\
&\quad+\frac{\left|\frac{1}{44}\right|\Gamma_{1/3}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma_{1/3}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1}\\
&\quad+\frac{\left|\frac{3}{55}\right|\Gamma_{1/5}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma_{1/5}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-1}\\
&\quad\left.+\frac{\left|\frac{5}{66}\right|\Gamma_{1/4}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma_{1/4}\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\right)}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{5}-1}\right]\\
&\quad+\frac{\Gamma_q\left(\frac{17}{21}\right)}{\Gamma_q\left(\frac{17}{21}+\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)^{1/3}\simeq\begin{cases}1.1984, & q=\frac{1}{5},\\ 0.9772, & q=\frac{1}{2},\\ 1.2033, & q=\frac{8}{9}.\end{cases}
\end{aligned}$$

جدول ۱ مقادیر بدست آمده برای Δ_1 و Δ_2 در مسأله (۸.۴) به ازای $\mathfrak{s}\in J$ و سه مقدار متفاوت $q\in(0,1)$ نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های ۱آ و ۱ب به ترتیب منحنی Δ_1 و Δ_2 را به ازای همان مقادیر q کاملاً گویا نشان می‌دهند.
حال اگر تابع $\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho)$ را با ضابطه

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{s},\varrho)=\frac{7e^{-(4\mathfrak{s}-1)^2}}{2(8\mathfrak{s}+13)}\left(\frac{\varrho^2+2|\varrho|}{1+|\varrho|}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{s}^2+1,$$

جدول ۱: مقادیر محاسبه شده برای $\Gamma_q(\gamma)$ و $\Delta_۱$ برای مسأله (۸.۴) به ازای سه مقدار متفاوت $q \in \{\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۸}{۹}\}$.

	$q=\frac{۱}{۵}$			$q=\frac{۱}{۲}$			$q=\frac{۸}{۹}$		
n	$\Gamma_q(\gamma)$	$\Delta_۱$	$\Delta_۲$	$\Gamma_q(\gamma)$	$\Delta_۱$	$\Delta_۲$	$\Gamma_q(\gamma)$	$\Delta_۱$	$\Delta_۲$
۱	−۲٫۰۰۹۶	۱٫۰۳۹۲	۱٫۱۶۳۹	۲٫۴۹۲۸	۰٫۹۶۸۴	۰٫۸۲۷۲	۰٫۷۷۸۶	۰٫۸۹۸۸	۰٫۵۲۱۱
۲	−۲٫۰۴۲۲	۱٫۰۲۵۰	۱٫۱۹۲۹	۲٫۶۱۵۲	۰٫۹۸۰۵	۰٫۹۰۶۸	۰٫۸۱۷۱	۰٫۹۳۷۶	۰٫۷۱۳۱
۳	−۲٫۰۴۸۶	۱٫۰۱۹۸	۱٫۱۹۷۷	۲٫۶۷۱۳	۰٫۹۸۴۸	۰٫۹۴۳۰	۰٫۸۴۷۷	۰٫۹۵۲۲	۰٫۸۰۶۶
۴	−۲٫۰۴۹۹	۱٫۰۱۸۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۶۹۸۳	۰٫۹۸۶۳	۰٫۹۶۰۳	۰٫۸۷۲۷	۰٫۹۵۷۸	۰٫۸۷۱۴
۵	−۲٫۰۵۰۱	۱٫۰۱۷۴	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۱۱۵	۰٫۹۸۶۹	۰٫۹۶۸۸	۰٫۸۹۳۴	۰٫۹۶۰۲	۰٫۹۲۱۲
۶	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۲	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۱۸۰	۰٫۹۸۷۱	۰٫۹۷۳۰	۰٫۹۱۰۸	۰٫۹۶۱۴	۰٫۹۶۱۱
۷	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۱	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۱۳	۰٫۹۸۷۱	۰٫۹۷۵۱	۰٫۹۲۵۶	۰٫۹۶۲۲	۰٫۹۹۳۹
۸	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۱	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۲۹	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۶۲	۰٫۹۳۸۲	۰٫۹۶۲۷	۱٫۰۲۱۴
۹	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۳۷	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۶۷	۰٫۹۴۹۰	۰٫۹۶۳۲	۱٫۰۴۴۶
۱۰	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۱	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۶۹	۰٫۹۵۸۴	۰٫۹۶۳۵	۱٫۰۶۴۵
۱۱	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۳	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۱	۰٫۹۶۶۶	۰٫۹۶۳۸	۱٫۰۸۱۶
۱۲	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۴	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۱	۰٫۹۷۳۷	۰٫۹۶۴۱	۱٫۰۹۶۴
۱۳	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۰٫۹۷۹۸	۰٫۹۶۴۳	۱٫۱۰۹۲
۱۴	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۰٫۹۸۵۳	۰٫۹۶۴۵	۱٫۱۲۰۴
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۹	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۸	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۱
۶۰	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۸	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۱
۶۱	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۸	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۲
۶۲	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۹	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۲
۶۳	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۹	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۲
۶۴	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۹	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۲
۶۵	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۹	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۳
۶۶	−۲٫۰۵۰۲	۱٫۰۱۷۰	۱٫۱۹۸۴	۲٫۷۲۴۵	۰٫۹۸۷۲	۰٫۹۷۷۲	۱٫۰۲۵۹	۰٫۹۶۵۹	۱٫۲۰۳۳



(ب) $\Delta_۲$ (آ) $\Delta_۱$

شکل ۱: منحنی پارامترهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ برای مسأله (۸.۴) به ازای $\mathfrak{s} \in J$ و مقادیر متفاوت $q \in (۰, ۱)$.

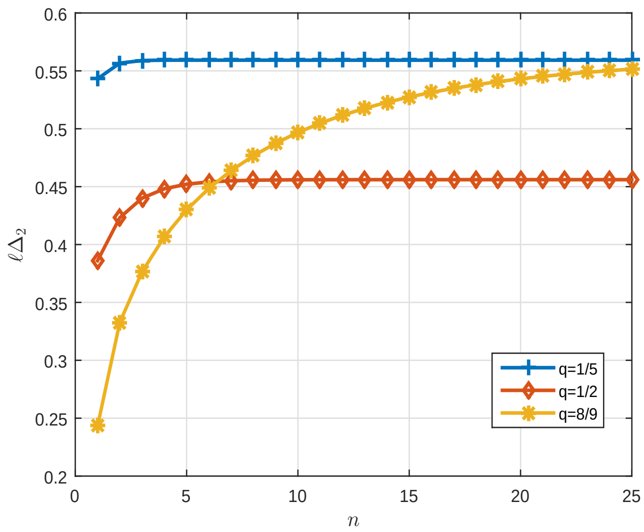
تعریف کنیم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \varrho) - \mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \acute{\varrho})| &= \Bigg| \frac{۷e^{-(۴\mathfrak{s}-۱)^۲}}{۲(۸\mathfrak{s}+۱۳)} \left(\frac{\varrho^۲ + ۲|\varrho|}{۱+|\varrho|} \right) + \frac{۱}{۲}\mathfrak{s}^۲ + ۱ \\ &\quad - \left(\frac{۷e^{-(۴\mathfrak{s}-۱)^۲}}{۲(۸\mathfrak{s}+۱۳)} \left(\frac{\acute{\varrho}^۲ + ۲|\acute{\varrho}|}{۱+|\acute{\varrho}|} \right) + \frac{۱}{۲}\mathfrak{s}^۲ + ۱ \right) \Bigg| \\ &\leq \left| \frac{۷e^{-(۴\mathfrak{s}-۱)^۲}}{۲(۸\mathfrak{s}+۱۳)} \right| \left(\left| \frac{\varrho^۲ + ۲|\varrho|}{۱+|\varrho|} \right| - \left| \frac{\acute{\varrho}^۲ + ۲|\acute{\varrho}|}{۱+|\acute{\varrho}|} \right| \right) \\ &\leq \frac{۷}{۱۵} |\varrho - \acute{\varrho}|, \qquad \forall\, \varrho, \acute{\varrho} \in \mathbb{R},\ \mathfrak{s} \in \left[\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۲} \right]. \end{aligned}$$

بنابراین با انتخاب $\ell = \frac{۷}{۱۵}$، خواهیم داشت:

$$\ell\Delta_۲ \approx \begin{cases} ۰/۵۵۹۲۴ < ۱, & q = \frac{۱}{۵}, \\ ۰/۴۵۵۹۶ < ۱, & q = \frac{۱}{۲}, \\ ۰/۵۶۱۵۵ < ۱, & q = \frac{۸}{۹}. \end{cases} \tag{۹.۴}$$

منحنی $\ell\Delta_۲$ در شکل ۲ به ازای مقادیر متفاوت q کاملا گویا نشان می‌دهد که نابرابری $\ell\Delta_۲ < ۱$ همواره برقرار است. نتیجه (۹.۴) نشان می‌دهد که شرایط قضیه ۲.۴ برقرار است و این ایجاب می‌کند که مسأله (۸.۴) یک جواب منحصربه‌فرد



شکل ۲: منحنی $\ell\Delta_۲$ برای مسأله (۸.۴) به ازای $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$ و مقادیر متفاوت $q \in (۰, ۱)$.

مانند ϱ متعلق به $C_{\frac{۴}{۲۱}}\left[\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۲}\right]$ خواهد داشت.

۲.۴ مسأله مقدار مرزی از مرتبه $۱ < \alpha < ۲$

اکنون، مسأله شامل مشتق کسری کوانتومی هیلفر از مرتبه $۱ < \alpha < ۲$ و پارامتر $۰ < \beta < ۱$،

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \varrho(\mathfrak{s})), & ۰ < q < ۱,\ \tau_۱ < \mathfrak{s} < \tau_۲, \\ \varrho(\tau_۱) = ۰,\ \varrho(\tau_۲) = \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i\big(\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\varrho(\eta_i)\big), \end{cases} \tag{۱۰.۴}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن تابع $\mathfrak{g} : \mathrm{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعرف می‌شود، $\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}$، انتگرال کوانتومی کسری از مرتبه $\kappa_i > ۰$ و $\lambda_i \in \mathbb{R}$، $۰ < q_i < ۱$، $\eta_i \in \mathrm{J}$ هستند. برای بررسی وجود جواب در این حالت ابتدا لم ۴.۴ را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۴.۴. فرض کنید $\hbar : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $\Delta_۴ \neq ۰$ باشند. در این صورت مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{q,\tau_۱}\varrho(\mathfrak{s}) = \hbar(\mathfrak{s}), & ۱ < \alpha < ۲,\ \tau_۱ < \mathfrak{s} < \tau_۲, \\ \varrho(\tau_۱) = ۰,\ \varrho(\tau_۲) = \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\varrho(\eta_i), \end{cases} \tag{۱۱.۴}$$

هم‌ارز معادله انتگرالی

$$\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{\Delta_۴}\left[\sum_{i=۱}^{m}\lambda_i \mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\eta_i)\right) - \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\tau_۲)\right] + \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\mathfrak{s}), \tag{۱۲.۴}$$

است، که در

$$\Delta_۴ = (\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱} - \sum_{i=۱}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_۱)^{\gamma+\kappa_i-۱}, \tag{۱۳.۴}$$

مخالف صفر است.

اثبات. با استفاده از گزاره (۱) در قضیه ۲.۳، برای $n=۲$ و انتگرال کوانتومی کسری ریمان-لیویل از مرتبه $۱<\alpha<۲$ از دو طرف رابطه (۱۱.۴) خواهیم داشت:

$$\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{\Gamma_q(\gamma)}C_۱ + \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۲}}{\Gamma_q(\gamma-۱)}C_۲ + \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\mathfrak{s}), \tag{۱۴.۴}$$

که در آن

$$C_۱ = {}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}^{\gamma-۱}_{q,\tau_۱}\varrho(\tau_۱), \qquad C_۲ = \mathcal{I}^{۲-\gamma}_{q,\tau_۱}\varrho(\tau_۱),$$

هستند. چون $\gamma\in(\alpha,۲)$ است، با کمک شرط مرزی اول داریم $C_۲=۰$. بنابراین رابطه (۱۴.۴)، را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{\Gamma_q(\gamma)}C_۱ + \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\mathfrak{s}). \tag{۱۵.۴}$$

از طرف دیگر، مشاهده می‌شود تساوی (۱۵.۴) به ازای $\tau_۲$ به شکل

$$\varrho(\tau_۲) = \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{\Gamma_q(\gamma)}C_۱ + \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\tau_۲),$$

خواهد بود و لذا برای تعیین مقدار $C_۱$ با استفاده از شرط مرزی دوم در (۱۰.۴)، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{m}\lambda_i\left(\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\varrho(\eta_i)\right) = \frac{C_۱}{\Gamma_q(\gamma)}\sum_{i=۱}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_i-\tau_۱)^{\gamma+\kappa_i-۱} + \sum_{i=۱}^{m}\lambda_i\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\eta_i)\right).$$

در نتیجه

$$C_۱ = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Phi}\left[\sum_{i=۱}^{m}\lambda_i\mathcal{I}^{\kappa_i}_{q_i,\tau_۱}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\eta_i)\right) - \mathcal{I}^{\alpha}_{q,\tau_۱}\hbar(\tau_۲)\right].$$

مقدار ثابت $C_۱$ بدست آمده، معادله انتگرالی (۱۲.۴) را نتیجه می‌دهد. قسمت عکس برهان، به سادگی با محاسبات مستقیم ثابت می‌شود. □

قضیه ۵.۴. فرض کنید که نابرابری (۶.۴) در قضیه ۲.۴ برقرار باشد. اگر $\ell\Delta_۵<۱$ باشد، آنگاه مسأله مقدار مرزی (۱۰.۴) دارای جواب منحصربه‌فرد در بازه J است، که در آن

$$\Delta_۵ = \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{|\Delta_۴|}\left[\sum_{i=۱}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\alpha+۱)}{\Gamma_{q_i}(\alpha+\kappa_i+۱)\Gamma_q(\alpha+۱)}(\eta_i-a)^{\alpha+\kappa_i} + \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+۱)}\right] + \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+۱)}. \tag{۱۶.۴}$$

اثبات. برای اثبات وجود و منحصربه‌فردبودن نقطه ثابت مسأله $\varrho = \mathcal{K}\varrho$، عمل‌گر $\mathcal{K} : C(\mathrm{J}) \to C(\mathrm{J})$ را به کمک لم (۴.۴)، با ضابطه

$$\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s}) = \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{\Delta_۴}\left[\sum_{i=۱}^{m}\lambda_i\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_۱}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\mathfrak{g}(\eta_i,\varrho(\eta_i))\right) - \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\mathfrak{g}\left(\tau_۲,\varrho(\tau_۲)\right)\right] + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\mathfrak{g}\left(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s})\right),$$

تعریف می‌کنیم. در ادامه با استفاده از اصل انقباض باناخ ثابت خواهیم کرد که $\mathcal{K}$ نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد، که همان جواب مسأله مقدار مرزی (۱۰.۴) است. مجدداً با فرض

$$\mathfrak{g}^* = \sup_{\mathfrak{s}\in\mathrm{J}}|\mathfrak{g}(\mathfrak{s},۰)|$$

گوی بسته $\mathfrak{B}_r$ با شعاع r،

$$\mathcal{B}_r = \left\{\varrho\in C(\mathrm{J}) \,:\, \|\varrho\|\le r\right\},$$

و ویژگی

$$r \ge \frac{\mathfrak{g}^*\Delta_۵}{۱-\ell\Delta_۵},$$

را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنیم ϱ متعلق به $\mathcal{B}_r$ است. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s})| &\le \frac{(\mathfrak{s}-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{|\Delta_۴|}\left[\sum_{i=۱}^{m}|\lambda_\mathrm{i}|\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_۱}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left|\mathfrak{g}\left(\eta_i,\varrho(\eta_\mathrm{i})\right)\right|\right)\right.\\
&\quad\left.+\,\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left|\mathfrak{g}\left(\tau_۲,\varrho(\tau_۲)\right)\right|\right] + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left|\mathfrak{g}\left(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s})\right)\right|\\
&\le \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{|\Delta_۴|}\left[\sum_{i=۱}^{m}|\lambda_i|\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_۱}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)\right)(\eta_\mathrm{i})\right.\\
&\quad\left.+\,\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)(\tau_۲)\right](\ell r+\mathfrak{g}^*) + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)(\tau_۲)(\ell r+M)\\
&\le\ L\rho\Phi_۱ + \mathfrak{g}^*\Delta_۵ \le r.
\end{aligned}$$

از اینرو $\|\mathcal{K}\varrho\| \le r$. لذا $\mathcal{K}\mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{B}_r$. حال نشان می‌دهیم عمل‌گر $\mathcal{K}$ انقباضی است. در این راستا فرض کنیم $\varrho, \acute{\varrho} \in \mathcal{B}_r$ باشند. داریم:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}\varrho(\mathfrak{s}) - \mathcal{K}\acute{\varrho}(\mathfrak{s})| &\le \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{|\Delta_۴|}\left[\sum_{i=۱}^{m}|\lambda_\mathrm{i}|\,\mathcal{I}_{q_i,\tau_۱}^{\kappa_i}\left(\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left(\left|\mathfrak{g}\left(\eta_i,\varrho(\eta_i)\right)\right.\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\,\mathfrak{g}\left(\eta_i,\acute{\varrho}(\eta_\mathrm{i})\right)\right|\right)\right) + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left|\mathfrak{g}\left(\tau_۲,\varrho(\tau_۲)\right)\right.\\
&\quad\left.\left.-\,\mathfrak{g}\left(\tau_۲,\acute{\varrho}(\tau_۲)\right)\right|\right] + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}\left|\mathfrak{g}\left(\mathfrak{s},\varrho(\mathfrak{s})\right) - \mathfrak{g}\left(\mathfrak{s},\acute{\varrho}(\mathfrak{s})\right)\right|\\
&\le \frac{(\tau_۲-\tau_۱)^{\gamma-۱}}{|\Delta_۴|}\left[\sum_{i=۱}^{m}|\lambda_i|\left(\mathcal{I}_{q_i,\tau_۱}^{\kappa_i}\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)\right)(\eta_i)\right.\\
&\quad\left.+\,\mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)(\tau_۲)\right]\ell\|\varrho-\acute{\varrho}\| + \mathcal{I}_{q,\tau_۱}^{\alpha}(۱)(\tau_۲)\ell\|\varrho-\acute{\varrho}\| \le \ell\Delta_۵\|\varrho-\acute{\varrho}\|.
\end{aligned}$$

بنابراین
$$\|\mathcal{K}\varrho - \mathcal{K}\acute{\varrho}\| \leq \ell\Delta_{۵}\|\varrho - \acute{\varrho}.$$

چون $\ell\Delta_{۵} < ۱$ است، لذا $\mathcal{K}$ یک عملگر انقباضی است، بنابراین دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد در $\mathcal{B}_r$ است. این نشان می‌دهد که مسأله مقدار مرزی (۱۰.۴) با مشتق کوانتومی کسری هیلفر از مرتبه $۱ < \alpha < ۲$ دارای جواب منحصربه‌فرد ϱ است به طوری که $\|\varrho\| \leq r$ روی بازه J است و این اثبات را کامل می‌کند. □

در مثال ۶.۴ درستی نتیجه حاصل از قضیه ۵.۴ را بررسی می‌کنیم.

مثال ۶.۴. مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{q,۱/۸}^{۳/۲,۴/۷}\varrho(\mathfrak{s}) = \dfrac{۵\cos^{۲}(\pi\mathfrak{s})}{۱۳(۸\mathfrak{s}+۳)}\left(\dfrac{۳\left(\varrho(\mathfrak{s})\right)^{۲} + ۴|\varrho(\mathfrak{s})|}{۱+|\varrho(\mathfrak{s})|}\right) + \dfrac{۱}{۳}\sin^{۲}\mathfrak{s} + \dfrac{۱}{۴}, \\ \varrho\left(\dfrac{۱}{۸}\right) = ۰, \\ \varrho\left(\dfrac{۱۱}{۸}\right) = \dfrac{۲}{۳۳}\mathcal{I}_{۱/۲,۱/۸}^{۲/۳}\varrho\left(\dfrac{۳}{۸}\right) + \dfrac{۴}{۵۵}\mathcal{I}_{۱/۴,۱/۸}^{۳/۴}\varrho\left(\dfrac{۵}{۸}\right) \\ \qquad + \dfrac{۶}{۷۷}\mathcal{I}_{۱/۶,۱/۸}^{۶/۵}\varrho\left(\dfrac{۷}{۸}\right) + \dfrac{۸}{۹۹}\mathcal{I}_{۱/۸,۱/۸}^{۸/۷}\varrho\left(\dfrac{۹}{۸}\right), \end{cases} \tag{۱۷.۴}$$

را برای $\mathfrak{s} \in \mathrm{J} = \left[\frac{۱}{۸}, \frac{۱۱}{۸}\right]$ و به ازای
$$q \in \left\{\frac{۱}{۷}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}\right\},$$
در نظر می‌گیریم. واضح است که $\alpha = \frac{۳}{۲} \in (۱,۲)$، $\beta = \frac{۴}{۷} \in (۰,۱)$، $\tau_۱ = \frac{۱}{۸}$، $\tau_۲ = \frac{۱۱}{۸}$، $\lambda_۱ = \frac{۲}{۳۳} \in \mathbb{R}$، $\lambda_۲ = \frac{۴}{۵۵} \in \mathbb{R}$، $\lambda_۳ = \frac{۶}{۷۷} \in \mathbb{R}$، $\lambda_۴ = \frac{۸}{۹۹} \in \mathbb{R}$، $\kappa_۱ = \frac{۲}{۳} > ۰$، $\kappa_۲ = \frac{۳}{۴} > ۰$، $\kappa_۳ = \frac{۶}{۵} > ۰$، $\kappa_۴ = \frac{۸}{۷} > ۰$، $q_۱ = \frac{۱}{۲} \in (۰,۱)$، $q_۲ = \frac{۱}{۴} \in (۰,۱)$، $q_۳ = \frac{۱}{۶} \in (۰,۱)$، $q_۴ = \frac{۱}{۸} \in (۰,۱)$، $\eta_۱ = \frac{۳}{۸} \in \mathrm{J}$، $\eta_۲ = \frac{۵}{۸} \in \mathrm{J}$، $\eta_۳ = \frac{۷}{۸} \in \mathrm{J}$، $\eta_۴ = \frac{۹}{۸} \in \mathrm{J}$ و

$$\gamma = \alpha + \beta(۱-\alpha) = \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۷}\left(۱ - \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۲۵}{۱۴},$$

هستند. با استفاده از روابط (۱۳.۴) و (۱۶.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \Delta_{۴} &= (\tau_۲ - \tau_۱)^{\gamma-۱} - \sum_{i=۱}^{m}\frac{\lambda_i\Gamma_{q_i}(\gamma)}{\Gamma_{q_i}(\gamma+\kappa_i)}(\eta_{\mathrm{i}} - \tau_۱)^{\gamma+\kappa_i-۱} \\ &= \left(\frac{۱۱}{۸} - \frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲۵}{۱۴}-۱} - \left[\frac{\frac{۲}{۳۳}\Gamma_{۱/۲}\left(\frac{۲۵}{۱۴}\right)}{\Gamma_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۲}{۳}\right)}\left(\frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۲}{۳}-۱}\right. \\ &\quad + \frac{\frac{۴}{۵۵}\Gamma_{۱/۴}\left(\frac{۲۵}{۱۴}\right)}{\Gamma_{۱/۴}\left(\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۳}{۴}\right)}\left(\frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۳}{۴}-۱} + \frac{\frac{۶}{۷۷}\Gamma_{۱/۶}\left(\frac{۲۵}{۱۴}\right)}{\Gamma_{۱/۶}\left(\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۶}{۵}\right)}\left(\frac{۷}{۸} - \frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۶}{۵}-۱} \\ &\quad \left. + \frac{\frac{۸}{۹۹}\Gamma_{۱/۸}\left(\frac{۲۵}{۱۴}\right)}{\Gamma_{۱/۸}\left(\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۸}{۷}\right)}\left(\frac{۹}{۸} - \frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲۵}{۱۴}+\frac{۹}{۸}-۱}\right] \approx \begin{cases} ۱/۱۲۸۶, & q = \frac{۱}{۷}, \\ ۱/۱۲۸۶, & q = \frac{۱}{۲}, \\ ۱/۱۲۸۶, & q = \frac{۲}{۳}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_5 &= \frac{(\tau_2-\tau_1)^{\gamma-1}}{|\Delta_4|}\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\frac{|\lambda_i|\Gamma_{q_i}(\alpha+1)}{\Gamma_{q_i}(\alpha+\kappa_i+1)\Gamma_q(\alpha+1)}(\eta_i-a)^{\alpha+\kappa_i}\\
&\quad+\frac{(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\Bigg]+\frac{(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\\
&= \frac{\left(\frac{11}{8}-\frac{11}{8}\right)^{\frac{25}{14}-1}}{|\Delta_4|}\Bigg[\frac{\left|\frac{2}{33}\right|\Gamma_{1/2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma_{1/2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{8}}\\
&\quad+\frac{\left|\frac{4}{55}\right|\Gamma_{1/4}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma_{1/4}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+1\right)\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}\\
&\quad+\frac{\left|\frac{6}{77}\right|\Gamma_{1/6}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma_{1/6}\left(\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+1\right)\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{6}{5}}\\
&\quad+\frac{\left|\frac{8}{99}\right|\Gamma_{1/8}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma_{1/8}\left(\frac{3}{2}+\frac{8}{7}+1\right)\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{8}{7}}\\
&\quad+\frac{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{8}\right)^{3/2}}{\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\Bigg]+\frac{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{8}\right)^{3/2}}{\Gamma_q\left(\frac{3}{2}+1\right)}\approx\begin{cases}-2{,}2559, & q=\frac{1}{7},\\ 0{,}5186, & q=\frac{1}{2},\\ 0{,}1469, & q=\frac{2}{3},\end{cases}
\end{aligned}$$

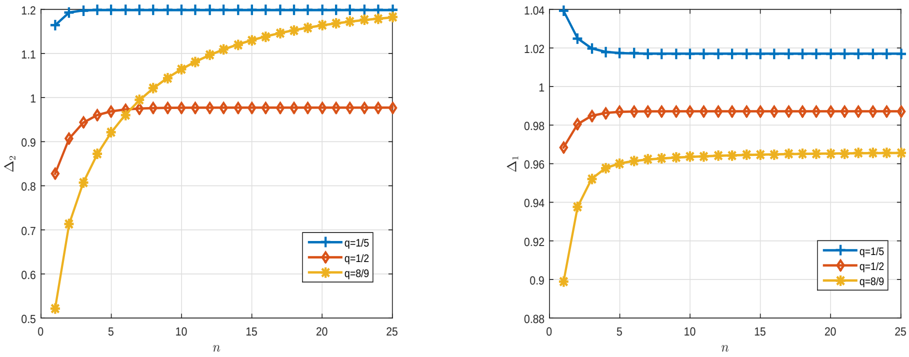
و

جدول ۲: مقادیر محاسبه شده برای Δ_4، Δ_5 و r برای مسأله (۱۰.۴) به ازای سه مقدار متفاوت $q\in\{\frac{1}{7},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\}$.

	$q=\frac{1}{7}$			$q=\frac{1}{2}$			$q=\frac{2}{3}$		
n	Δ_4	Δ_5	$r>\cdots$	Δ_4	Δ_5	$r>\cdots$	Δ_4	Δ_5	$r>\cdots$
۱	۱٫۰۳۲۵	−۲٫۱۹۳۰	−۰٫۶۷۸۹	۱٫۰۳۲۵	۰٫۱۲۷۵	۰٫۰۷۶۵	۱٫۰۳۲۵	−۰٫۰۰۹۸	−۰٫۰۰۵۶
۲	۱٫۰۷۹۴	−۲٫۲۸۱۵	−۰٫۶۹۳۵	۱٫۰۷۹۴	۰٫۳۰۵۵	۰٫۱۹۷۵	۱٫۰۷۹۴	۰٫۰۱۷۴	۰٫۰۱۰۰
۳	۱٫۱۰۳۸	−۲٫۲۷۶۸	−۰٫۶۹۲۸	۱٫۱۰۳۸	۰٫۴۰۸۱	۰٫۲۷۶۳	۱٫۱۰۳۸	۰٫۰۵۱۲	۰٫۰۲۹۸
۴	۱٫۱۱۶۱	−۲٫۲۶۷۵	−۰٫۶۹۱۲	۱٫۱۱۶۱	۰٫۴۶۲۴	۰٫۳۲۱۰	۱٫۱۱۶۱	۰٫۰۷۹۲	۰٫۰۴۶۶
۵	۱٫۱۲۲۴	−۲٫۲۶۱۸	−۰٫۶۹۰۳	۱٫۱۲۲۴	۰٫۴۹۰۳	۰٫۳۴۴۹	۱٫۱۲۲۴	۰٫۱۰۰۰	۰٫۰۵۹۴
۶	۱٫۱۲۵۵	−۲٫۲۵۸۹	−۰٫۶۸۹۸	۱٫۱۲۵۵	۰٫۵۰۴۴	۰٫۳۵۷۲	۱٫۱۲۵۵	۰٫۱۱۴۹	۰٫۰۶۸۶
۷	۱٫۱۲۷۰	−۲٫۲۵۷۴	−۰٫۶۸۹۶	۱٫۱۲۷۰	۰٫۵۱۱۵	۰٫۳۶۳۴	۱٫۱۲۷۰	۰٫۱۲۵۲	۰٫۰۷۵۱
۸	۱٫۱۲۷۸	−۲٫۲۵۶۶	−۰٫۶۸۹۵	۱٫۱۲۷۸	۰٫۵۱۵۱	۰٫۳۶۶۶	۱٫۱۲۷۸	۰٫۱۳۲۳	۰٫۰۷۹۵
۹	۱٫۱۲۸۲	−۲٫۲۵۶۲	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۲	۰٫۵۱۶۸	۰٫۳۶۸۲	۱٫۱۲۸۲	۰٫۱۳۷۱	۰٫۰۸۲۶
۱۰	۱٫۱۲۸۴	−۲٫۲۵۶۱	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۴	۰٫۵۱۷۷	۰٫۳۶۸۹	۱٫۱۲۸۴	۰٫۱۴۰۳	۰٫۰۸۴۷
۱۱	۱٫۱۲۸۵	−۲٫۲۵۶۰	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۵	۰٫۵۱۸۲	۰٫۳۶۹۳	۱٫۱۲۸۵	۰٫۱۴۲۵	۰٫۰۸۶۰
۱۲	۱٫۱۲۸۵	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۵	۰٫۵۱۸۴	۰٫۳۶۹۵	۱٫۱۲۸۵	۰٫۱۴۴۰	۰٫۰۸۷۰
۱۳	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۵	۰٫۳۶۹۶	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۴۹	۰٫۰۸۷۶
۱۴	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۵۶	۰٫۰۸۸۰
۱۵	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۰	۰٫۰۸۸۳
۱۶	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۳	۰٫۰۸۸۵
۱۷	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۵	۰٫۰۸۸۶
۱۸	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۶	۰٫۰۸۸۷
۱۹	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۷	۰٫۰۸۸۷
۲۰	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۸	۰٫۰۸۸۸
۲۱	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۸	۰٫۰۸۸۸
۲۲	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۸	۰٫۰۸۸۸
۲۳	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۹	۰٫۰۸۸۸
۲۴	۱٫۱۲۸۶	−۲٫۲۵۵۹	−۰٫۶۸۹۴	۱٫۱۲۸۶	۰٫۵۱۸۶	۰٫۳۶۹۷	۱٫۱۲۸۶	۰٫۱۴۶۹	۰٫۰۸۸۸

$$r\geq\frac{\mathfrak{g}^*\Delta_5}{1-\ell\Delta_5}\approx\begin{cases}0{,}6894, & q=\frac{1}{7},\\ 0{,}3697, & q=\frac{1}{2},\\ 0{,}0888, & q=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

جدول ۲ مقادیر بدست آمده برای Δ_4 و Δ_5 در مسأله (۸.۴) به ازای $\mathfrak{s}\in \mathrm{J}$ و سه مقدار متفاوت $q\in(0,1)$. نشان می‌دهد. هم‌چنین شکل‌های ۳آ و ۳ب به ترتیب منحنی Δ_4 و Δ_5 را به ازای همان مقادیر q کاملا گویا نشان می‌دهند. از



(ب) $\Delta_۵$ (آ) $\Delta_۴$

شکل ۳: منحنی پارامترهای $\Delta_۴$ و $\Delta_۵$ برای مسأله (۱۷.۴) به ازای $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$ و مقادیر متفاوت $q \in (۰, ۱)$.

طرف دیگر، با تعریف

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \varrho) = \frac{۵ \cos^۲ \pi\mathfrak{s}}{۱۳(۸\mathfrak{s} + ۳)} \left(\frac{۳\varrho^۲ + ۴|\varrho|}{۱ + |\varrho|} \right) + \frac{۱}{۳} \sin^۲ \mathfrak{s} + \frac{۱}{۴},$$

نابرابری

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \varrho) - \mathfrak{g}(\mathfrak{s}, \acute{\varrho})| \leq \frac{۵}{۱۳} |\varrho - \acute{\varrho}|,$$

برای هر $\varrho, \acute{\varrho} \in \mathbb{R}$ و $\mathfrak{s} \in \mathrm{J}$ به ازای $\ell = \frac{۵}{۱۳}$ برقرار است. بنابراین شرایط قضیه ۵.۴ برقرار است و لذا مسأله مقدار مرزی (۱۷.۴) جواب منحصربه‌فرد در بازه J دارد.

۵ نتیجه گیری

عملگرهای مشتق ریمان–لیوویل و کاپوتو دو تا از محبوب‌ترین مشتقات کسری هستند. هیلفر دو مشتق کسری کوانتومی ریمان–لیوویل و کاپوتو را با همان مرتبه $\alpha \in (۰, ۱)$ و اضافه کردن پارامتر $\beta \in [۰, ۱]$ تعمیم داد که تحت عنوان مشتق مرتبه کسری هیلفر شناخته می‌شود [۱۰]. که وقتی $\beta = ۰$ می‌تواند به مشتق ریمان–لیوویل کاهش یابد و اگر $\beta = ۱$ به مشتق کسری کاپوتو کاهش یابد. از سوی دیگر در [۲۲] q–مشتق کسری ریمان–لیوویل و کاپوتو معرفی شدند. در مقاله حاضر، ضمن بیان مفهوم «مشتق کوانتومی کسری هیلفر»، برخی از ویژگی‌های اساسی آن را بررسی کرده‌ایم. در راستای کاربردهای این مفهوم جدید، دو مسأله مقدار مرزی همراه با مشتق کوانتومی کسری هیلفر در بازه های $(۰, ۱)$ و $(۱, ۲)$ را مطالعه کردیم. به‌علاوه با تبدیل مسائل مقدار مرزی خطی اشاره شده، به مسائل نقطه ثابت، و اعمال اصل نگاشت انقباض باناخ در وجود و منحصربه‌فرد بودن راه‌حل‌ها بحث کرده‌ایم. پس از آن با ساختن مثال‌های عددی، کاربرد نتایج نظری حاصل را نشان دادیم.

فهرست منابع

[1] Agarwal, R. P., 1969. Certain fractional q-integrals and q-derivatives. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 66, pp. 365–370. doi: 10.1017/S0305004100045060

[2] Ahmad, B., Tariboon, J., Ntouyas, S. K., Alsulami, H. H. and Monaquel, S., 2016. Existence results for impulsive fractional q-difference equations with anti-periodic boundary conditions, *Boundary Value Problems*, 2016, pp. 15. doi: 10.1186/s13661-016-0521-y

[3] Ahmadi, A. and Samei, M. E., 2020. On existence and uniqueness of solutions for a class of coupled system of three term fractional q-differential equations, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 14(1), pp. 69–80.

[4] Al-Salam, W. A., 1966. Some fractional q-integrals and q-derivatives, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 15, pp. 135–140. doi: 10.1017/S0013091500011469

[5] Annaby, M. H. and Mansour, Z. S., 2012. q-Fractional Calculus and Equations. Heidelberg, New York, Springer.

[6] Berhail, A., Tabouche, N., Alzabut, J. and Samei, M. E., 2022. Using Hilfer-Katugampola fractional derivative in initial value Mathieu fractional differential equations with application on particle in the plane, *Advances in Continuous and Discrete Models: Theory and Applications*, 2022, pp. 44. doi: 10.1186/s13662-022-03716-6

[7] Boutiara, A., Kaabar, M. K. A., Siri, Z., Samei, M. E. and Yue, X. G., 2022. Investigation of a generalized proportional Langevin and Sturm-Liouville fractional differential equations via variable coefficients and anti-periodic boundary conditions with a control theory application arising from complex networks, *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, pp. 21 pages. doi: 10.1155/2022/7018170

[8] Eswari, R., Alzabut, J. and Samei, M. E., Tunç, C. and Jonnalagad, J. M., 2022. New results on the existence of periodic solutions for Rayleigh equations with state-dependent delay, *Nonautonomous Dynamical Systems*, 9, pp. 103–115. doi: 10.1515/msds-2022-0149

[9] Hedayati, V. and Samei, M. E., 2019. Positive solutions of fractional differential equation with two pieces in chain interval and simultaneous Dirichlet boundary conditions, *Boundary Value Problems*, 2019, pp. 141. doi: 10.1186/s13661-019-1251-8

[10] Hilfer, R., 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, Singapore, World Scientific.

[11] Houas, M. and Samei, M. E., 2022. Existence and Mittag-Leffler-Ulam-stability results for duffing type problem involving sequential fractional derivatives, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8, pp. 185. doi: 10.1007/s40819-022-01398-y

[12] Houas, M. and Samei, M. E., 2023. Existence and stability of solutions for linear and nonlinear damping of $q-$fractional Duffing-Rayleigh problem, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20, pp. 148. doi: 10.1007/s00009-023-02355-9

[13] Izadi, M. and Samei, M. E., 2022. Time accurate solution to Benjamin-Bona-Mahony Burgers equation via Taylor-Boubaker series scheme, *Boundary Value Problems*, 2022, pp. 17. doi: 10.1186/s13661-022-01598-x

[14] Jackson, F. H., 1910. q-difference equations, *American Journal of Mathematic*, 32(4), pp. 305–314. doi: 10.2307/2370183

[15] Mishra, S. K., Rajković, P., Samei, M. E., Chakraborty, S. K., Ram, B. and Kaabar, M. K. A., 2021. A q-gradient descent algorithm with quasi-Fejér convergence for unconstrained optimization problems, *Fractal and Fractional*, 5(3), pp. 110. doi: 10.3390/fractalfract5030110

[16] Ntouyas, S. K., and M. E. Samei, 2019. Existence and uniqueness of solutions for multi-term fractional q-integro-differential equations via quantum calculus, *Advances in Difference Equations*, 2019, pp. 475. doi: 10.1186/s13662-019-2414-8

[17] Samei, M. E., Hedayati, V. and Rezapour, S., 2019. Existence results for a fraction hybrid differential inclusion with Caputo-Hadamard type fractional derivative, *Advances in Difference Equations*, 2019, pp. 163. doi: 10.1186/s13662-019-2090-8

[18] Samei, M. E., Karimi, L. and Kaabar, M. K. A., 2022. To investigate a class of multi-singular pointwise defined fractional q-integro-differential equation with applications, *AIMS Mathematics*, 7(5), pp. 7781–7816. doi: 10.3934/math.2022437

[19] Suantai, S., Ntouyas, S. K., Asawasamrit, S. and Tariboon, J., 2015. A coupled system of fractional q-integro-difference equations with nonlocal fractional q-integral boundary conditions, Advances in Difference Equations, 2015, pp. 124. doi: 10.1186/s13662-015-0462-2

[20] Subramanian, M., Alzabut, J., Dumitru, D., Samei, M. E. and Zadaf, A., 2021. Existence, uniqueness and stability analysis of a coupled fractional-order differential systems involving Hadamard derivatives and associated with multi-point boundary conditions, Advances in Difference Equations, 2021, pp. 267. doi: 10.1186/s13662-021-03414-9

[21] Tariboon, J. and Ntouyas, S. K., 2013. Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2013, 282. doi: 10.1186/1687-1847-2013-282

[22] Tariboon, J., and Ntouyas, S. K. and Agarwal, P., 2015. New concepts of fractional quantum calculus and applications to impulsive fractional q-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2015, pp. 18. doi: 10.1186/s13662-014-0348-8

Existence of solutions on a nonlinear boundary value problem including Hilfer fractional q-derivative

Mohammad Esmael Samei,(1) [3] Alireza Hatami(1)

(1) Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 1 April 2023 Accepted: 4 October 2023

Abstract: In this paper, we introduce an extension of the Hilfer fractional derivative, the "Hilfer fractional quantum derivative", and establish some of its properties. Then, we introduce and discuss initial and boundary value problems involving the Hilfer fractional quantum derivative. The existence of a unique solution of the considered problems is established via Banach's contraction mapping principle. Examples illustrating the obtained results are also presented.

Keywords: Quantum calculus; Hilfer derivative; existence and uniqueness of solution of problem.

Keywords: 26A33, 34A08, 74H15, 92D30

---

[3]Corresponding author.

E-mail addresses: (M.E. Samei) mesamei@basu.ac.ir, (A.R.Hatami) alirezahatami4816@gmail.com