



روشی جدید برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از نظریه بازی همکارانه

علی اشرفی^(۱)، مهدیه امیری^(۱)

^(۱) دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

دبیر مسئول: منصور سراج

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۹/۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۲۷

چکیده: رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) موضوعی مهم در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است. هنگامی که DMU های کارا نمرات کارایی یکسانی دارند، مدل‌های سنتی DEA معمولاً در رتبه‌بندی DMU های کارا شکست می‌خورند. در سال‌های اخیر برای مقایسه و بهبود قدرت تمایز DMU های کارا، از نظریه بازی همکارانه استفاده شده است. در این تحقیق، روش جدیدی از بازی همکارانه پیشنهاد می‌شود. ایده این روش به این صورت است که ابتدا با حذف زیرمجموعه معینی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا از مجموعه واحدها، کارایی همه واحدها محاسبه، و پس از آن واحدهای کارا با استفاده از ارزش شیلی در نظریه بازی همکارانه، رتبه‌بندی می‌شوند. یک مثال عددی برای نشان دادن کارکرد روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش‌های رتبه‌بندی اخیر ارائه می‌شود. در مطالعه تجربی، رتبه‌بندی DMU های کارا مفید و معقول است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تصمیم‌گیرنده، نظریه‌بازی‌ها، بازی همکارانه، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

مقدمه ۱

تحلیل پوششی داده‌ها^۲ (DEA) یک روش غیرپارامتریک در سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده^۳ (DMU) با چند ورودی و چند خروجی است. ایده اصلی DEA این است که کارایی نسبی DMU ها را با تخمین فاصله بین DMU ها و بهترین مرز عملکرد اندازه‌گیری

^۱نویسنده مسئول مقاله

^۲Data Envelopment Analysis

^۳Decision Making Units

کند. DMU ها با استفاده از مدل‌های پایه‌ای DEA مانند، CCR [۴]، BCC [۲]، Additive [۵] و SBM [۲۵] به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌شوند. DMU های کارا با نمره کارایی یک و DMU های ناکارا با نمره کارایی کمتر از یک مشخص می‌شوند؛ به دلیل اینکه DMU های کارا نمره کارایی برابر یک دارند، امکان مقایسه DMU های کارا با یکدیگر وجود ندارد. به همین دلیل رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا یکی از چالش‌ها در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بوده است. تصمیم‌گیرندگان پس از تعیین واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا معمولاً با این مسئله روبرو بوده‌اند که چگونه می‌توانند اهمیت این واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را در تعیین کارایی سازمان‌ها اندازه‌گیری کنند. در دهه‌های اخیر بسیاری از پژوهشگران روش‌هایی برای رتبه‌بندی DMU های کارا پیشنهاد داده‌اند. در این مقاله به چهار گروه اصلی از روش‌های رتبه‌بندی DMU ها در ادبیات DEA اشاره می‌کنیم: گروه اول مبتنی بر روش کارایی متقاطع^۴ است که در آن ابتدا هر DMU با وزن‌های مطلوب خود و سایر DMU ها ارزیابی می‌شود و سپس میانگین نمره کارایی به دست آمده از این ارزیابی محاسبه می‌شود [۲۳]. وجود ضرایب بهینه چندگانه از مشکلات اصلی این روش رتبه‌بندی DMU ها است. از این رو، اهداف ثانویه^۵ برای انتخاب بهینه وزن‌های چندگانه توسط دوئل و گرین [۹] پیشنهاد شده است. آن‌ها مدل خیرخواهانه را به منظور انتخاب وزن‌های بهینه که کارایی یک DMU تحت ارزیابی و میانگین کارایی سایر DMU ها را به حداکثر رساندند و همچنین مدل بدبینانه به منظور جستجوی وزن‌های بهینه که میانگین کارایی DMU های دیگر را به حداقل می‌رساند، پیشنهاد کردند. پژوهشگران همچنین ایده‌های جدیدی برای مدل اهداف ثانویه ارائه کرده‌اند [۳۱، ۱۶، ۸].

گروه دوم مبتنی بر روش ابرکارایی^۶ است که DMU تحت ارزیابی را از مجموعه DMU ها حذف کرده و فاصله آن DMU را تا مرز جدید به عنوان نمره کارایی جدید آن در نظر گرفته است. اولین مدل ابرکارایی شعاعی توسط اندرسون و پیترسون [۱] ارائه شد. گاهی سه مشکل اصلی روش ابرکارایی، ناشدنی بودن در حالت بازده به مقیاس متغیر، غیرقابل مقایسه بودن به دلیل ارزیابی هر واحد کارا با چارچوب متفاوت، و ناتوانی در رتبه‌بندی DMU های کارای غیر رأسی است. لول و روز [۱۹] یک مدل استاندارد DEA برای به دست آوردن نمرات ابرکارایی با کمک افزایش ورودی‌ها و کاهش خروجی‌های DMU ارزیابی شده پیشنهاد کردند. چن [۷، ۶] یک مدل جدید ابرکارایی را با استفاده از کمبود ورودی و مازاد خروجی‌های DMU ارزیابی شده و تصویر واحدهای بهبودیافته بر مرز بازده به مقیاس متغیر گسترش داد. همچنین پژوهشگران چندین مدل را به منظور حل مسئله ناشدنی بودن مدل‌های پوششی یا بی‌کرانگی مدل‌های مضر بی ابرکارایی پیشنهاد کرده‌اند [۳۰، ۲۹، ۲۰].

سومین گروه اصلی از روش‌های رتبه‌بندی DEA، روش مبتنی بر تأثیر متقاطع^۷ است. این روش مشابه روش ابرکارایی است، اما به جای اندازه‌گیری تأثیر روی یک DMU، بر اندازه‌گیری تأثیر روی تمام DMU ها تأکید می‌کند. در این روش نه تنها یک DMU حذف می‌شود، بلکه DMU های دیگری نیز برای اندازه‌گیری و مقایسه تغییرات مربوطه به نمرات کارایی DMU ها حذف می‌شوند. در تحقیق حاضر، این ویژگی در روش تأثیر متقاطع دارای اهمیت است؛ زیرا در این روش پیشنهادی ما، زیرمجموعه‌ای از DMU های کارا حذف می‌شوند؛ به طوری که کاردینال این زیرمجموعه‌ها از یک DMU (یعنی حذف یک واحد کارا) به چندین DMU کارا می‌رسد. در اینجا ما قصد داریم تغییرات نمرات کارایی تمام DMU ها را اندازه‌گیری کنیم. جهان‌شاهلو و همکاران [۱۵] یک مدل رتبه‌بندی برای DMU های کارا قوی را پیشنهاد داده‌اند. این مدل ابتدا DMU های کارا را از مجموعه DMU ها حذف می‌کند و سپس مرز کارای جدید تشکیل می‌دهد. این مرز کارای جدید به DMU های ناکارا نزدیک‌تر می‌شود و حتی برخی از DMU های ناکارا، کارا می‌شوند. دو و همکاران [۱۰] روشی به منظور رتبه‌بندی تمام DMU ها بر مبنای دو روش تأثیرگذاری، هر DMU کارا بر روی DMU های دیگر و نمرات استاندارد کارایی معرفی کرده‌اند. ایزدی خواه و فرضی پور [۱۴] یک مدل جدید را برای رتبه‌بندی کامل تمام DMU هایی که تأثیر DMU های کارا در DMU مجازی و تأثیر DMU های کارا در سایر DMU های کارا را اندازه‌گیری می‌کند، پیشنهاد داده‌اند. همچنین پژوهشگران ایده‌های جدیدی برای بهبود مدل تأثیر متقاطع ارائه داده‌اند [۲۴، ۱۲، ۱۱].

گروه چهارم روش رتبه‌بندی DEA روش مبتنی بر نظریه بازی است. در سال‌های اخیر مکانیزم‌های همکاری و عدم همکاری در DEA توجه بسیاری از افراد را به خود جلب کرده است. در DEA، بسیاری از DMU ها بر مزایای خود بیش از حد تأکید ورزیده و مزایای دیگر DMU ها را تضعیف کرده‌اند؛ به گونه‌ای که با همکاری و رقابت با سایر DMU ها به بیشترین حد کارایی خود برسند. بازی‌های همکارانه^۸ و بازی‌های غیرهمکارانه^۹ در توصیف رقابت و همکاری پیچیده بین DMU ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. لی و همکاران [۱۷] با در نظر گرفتن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا به عنوان بازیکنان یک بازی همکارانه به منظور ارزیابی و رتبه‌بندی واحدها برای حل مشکل غیرقابل مقایسه بودن روش ابرکارایی ایجاد کردند. آن‌ها ابتدا یک زیرمجموعه ناتهی از DMU های کارا را از مجموعه DMU ها حذف، و پس از آن تأثیر حذف آن‌ها بر نمرات ابرکارایی DMU های کارا را اندازه‌گیری کردند. لوزانو و همکاران [۱۳] یک بازی همکارانه جدید پیشنهاد کرده‌اند؛ به این صورت که در این بازی، ابتدا یک زیرمجموعه ناتهی از DMU های کارا از مجموعه DMU ها را حذف کرده، پس از آن تأثیر حذف آنها را بر نمرات کارایی DMU های ناکارا اندازه‌گیری کردند. در مدل‌های لی و همکاران و لوزانو و همکاران، مجموعه بازیکنان مجموعه DMU های کارا هستند. ووچی و همکاران [۲۸] یک بازی همکارانه را برای تعیین نمره کارایی متقاطع نهایی برای هر DMU

⁴Cross-efficiency

⁵Alternative secondary goals

⁶Super-efficiency

⁷Cross-influence

⁸Cooperative game

⁹non Cooperative game

در نظر گرفتند که در آن همه DMU ها مجموعه بازیکنان هستند. لوزانو و همکاران [۱۸] یک مسئله جدید چانه زنی^{۱۰} برای محاسبه اهداف DEA پیشنهاد کرده اند که در آن بازیکنان، متغیرهای ورودی و خروجی هستند و یک بازی سودمند برای بازیکنان ورودی و خروجی تعریف کرده اند. محمودی و امروزنژاد [۲۱] با ترکیب ایده های نظریه بازی چانه زنی تساوی طلب، تحلیل پوششی داده های شبکه و سنجش مبتنی بر SBM، به منظور ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده با ساختار شبکه سری، یک مدل جدیدی از بازی SBM-NDEA را پیشنهاد کردند. مدل پیشنهادی علاوه بر رسیدگی به مناقشه بین مراحل ساختار شبکه، هنگامی که تعداد DMU ها در مقایسه با تعداد ورودی ها و خروجی های در نظر گرفته شده به اندازه کافی بزرگ نباشند، می تواند نمرات کارایی قابل اعتمادتری را ارائه دهد. ون و همکاران [۲۷] فرایند سطح بالا و پایین یک سیستم ساختار شبکه ای را در نظر گرفتند که فرایند سطح بالا با حداقل یک فرایند سطح پایین برای کسب سود همکاری می کند. آن ها به منظور بررسی فرایندهای سطح بالا و پایین، یک بازی DEA دوسطحی با ادغام شبکه DEA و نظریه بازی همکارانه پیشنهاد کردند. پیشنهاد وانگ و همکاران [۲۶] یک روش تخصیص منابع مبتنی بر DEA با در نظر گرفتن رفتارهای بازی غیرهمکارانه پویا DMU ها بود. آن ها ابتدا مجموعه تخصیص کارا را تحت بازده به مقیاس متغیر (VRS) استنباط و مدل تخصیص را تحت مجموعه تخصیص ایجاد کردند؛ پس از آن یک الگوریتم تکراری مبتنی بر مفهوم بازی غیرهمکارانه برای تولید طرح تخصیص بهینه ارائه دادند. این الگوریتم همگرا و طرح تخصیص بهینه یک نقطه تعادل نش منحصر به فرد است. مدیها و همکاران [۲۲] به منظور رتبه بندی کامل DMU ها، یک روش خوش بینانه بدبینانه اصلاح شده که مبتنی بر ایده بازی کارایی متقاطع است، ارائه کردند. بازی پیشنهادی مانند روش تکراری خوش بینانه بدبینانه DEA، نمرات کارایی را با توجه به نقاط ضعف و قوت ها DMU محاسبه می کند و بر پایه بازی غیرهمکارانه است. روش آن ها برای به دست آوردن یک رتبه بندی قوی برای DMU گسترش می یابد که یک راه حل تعادل نش را به دست می دهد. کائو و همکاران [۳] DMU ها را مبتنی بر نظریه بازی ها با در نظر گرفتن رفتار همکاری یا رقابت آن ها رتبه بندی کرده اند. آن ها یک مدل بهینه مبتنی بر روش DEA تعمیم یافته و نظریه بازی پیشنهاد دادند که تغییرات کارایی DMU ها را اندازه گیری می کند. علاوه بر این، تأثیر روابط مختلف بازی بر روی یک DMU و ائتلاف DMU ها را می توان مشخص کرد.

در تحلیل پوششی داده ها، واحدهای تصمیم گیرنده داده های مربوط به مصرف ورودی ها و تولید خروجی ها را ارائه می دهند تا مجموعه امکان تولید به صورت جمعی تشکیل شود. در سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، هدف شناسایی مرز کارا و بهترین واحدهای تصمیم گیرنده است که DMU های ناکارا در این زمینه هیچ کمکی نمی کنند و از DMU های کارا برای مشارکت و همکاری در تشکیل مرز کارا دعوت می شود. از این رو رتبه بندی DMU های کارا به عنوان یک بازی همکارانه در نظر گرفته می شود که در آن بازی فقط بین DMU های کارا انجام می شود. در این مقاله، از بازی های همکارانه به منظور همکاری بین DMU های کارا به عنوان بازیکنان و وجود یک تابع مشخصه قوی برای تعیین نتیجه هر ائتلاف و همچنین ارزش شیلی برای تخصیص سود به بازیکنان استفاده می شود. مقاله پیش رو در گام اول نگاهی جامع به مدل های لی و همکاران و لوزانو و همکاران که ترکیبی از DEA و نظریه بازی ها هستند، داشته و ضعف آن ها را تحت پوشش قرار داده است. در گام دوم با تعریف یک بازی جدید که ترکیبی از دو مدل لی و همکاران و لوزانو و همکاران است، به رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا پرداخته است.

از آنجایی که مرز کارا به کمک DMU های کارا تعریف می شود و حذف DMU های کارا بر نمره کارایی DMU های کارا و ناکارا تأثیر می گذارد و مدل های لی و همکاران و لوزانو و همکاران تأثیر حذف DMU های کارا بر روی هر دو DMU های کارا و ناکارا با هم در نظر نگرفته اند، لازم است که یک روش متفاوت بازی همکارانه ارائه شود که با اندازه گیری تأثیر حذف زیرمجموعه معینی از DMU های کارا، هم بر DMU های کارا و هم روی DMU های ناکارا، بتواند نتیجه بهتری از رتبه بندی DMU های کارا به ما بدهد. به این منظور، در این پژوهش با ترکیب دو مدل لی و همکاران و لوزانو و همکاران یک روش متفاوت بازی همکارانه معرفی می کنیم که تأثیر حذف زیرمجموعه معینی از DMU های کارا در کارایی تمام DMU های کارا و ناکارا اندازه گیری می شود. در این روش، DMU های کارا مجموعه بازیکنان هستند. براساس این روش، اگر DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف شوند، آن گاه نمرات کارایی DMU های کارا و ناکارا افزایش می یابد و حتی ممکن است برخی از DMU های ناکارا، کارا شوند. پس از حذف یک DMU کارا از مرز کارا، سهم مشارکت این DMU کارا را می توان با افزایش نمرات کارایی DMU های ناکارا و کارا اندازه گیری کرد. در این تحقیق، به منظور محاسبه نمرات کارایی DMU ها از مدل CCR ورودی محور و به منظور رتبه بندی DMU های کارا از ارزش شیلی استفاده می شود.

DMU های کارا به منظور ماکزیم سازی کارایی در اشتراک گذاری اطلاعات خود با دیگر سازمان ها همکاری می کنند تا به یک موقعیت برد-برد برسند و تخصیص کارایی منصفانه و مناسب خود را دریافت کنند. به این منظور، بازی های همکارانه محاسبه حداکثر کارایی هر ائتلاف را امکان پذیر می کند و با استفاده از یک مفهوم، راه حل بازی همکارانه تخصیص منصفانه کارایی هر DMU های کارا محاسبه می گردد. لوزانو و همکاران در مقاله خود بیان کردند که در برخی موارد نتایج روش آن ها با نتایج برخی روش های رتبه بندی DMU های کارا متفاوت بوده است که این امر غیرعادی نیست. روش های مختلف رتبه بندی DEA وجود دارد که معمولاً نتایج رتبه بندی آن ها برای یک مجموعه داده های خاص متفاوت هستند. هر روش رتبه بندی واحدهای کارا دارای یک منطقی است که به آن اعتبار می بخشد. لوزانو و همکاران منطق روش خود را بر پایه نظریه بازی همکارانه تعریف کردند که همکاری DMU های کارا در تشکیل مرز کارا موجب اعتبار بخشی به روش خود بیان شده است. از این رو روش پیشنهادی ما که دارای منطق بازی همکارانه است، می تواند به عنوان یک روش رتبه بندی واحدهای کارا نتایج مورد قبولی را ارائه دهد.

در روش ابر کارایی، یک DMU کارا از مجموعه DMU ها حذف، و بر تأثیر روی مقدار ابر کارایی آن DMU کارای حذف شده تأکید

¹⁰Bargaining problem

می‌شود. حال می‌خواهیم یک زیرمجموعه از DMU های کارا را از مجموعه DMU ها حذف کنیم و تاثیر حذف آن را روی تمام DMU ها اندازه‌گیری کنیم. در واقع می‌خواهیم حذف یک DMU کارا را به حذف زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا تعمیم دهیم. هنگامی که یک زیرمجموعه از واحدهای کارا از مجموعه DMU ها حذف می‌شوند، مقادیر کارایی DMU های ناکارا و مقادیر ابرکارایی DMU های کارایی حذف شده تغییر می‌کند. با توجه به مقادیر تغییرات کارایی تمام DMU ها می‌توان به اهمیت DMU های کارایی حذف شده پی برد. برای اندازه‌گیری تغییرات کارایی DMU ها و سهم واحدهای کارا متعلق به زیرمجموعه در تشکیل مرز کارا و بهبود کارایی DMU های ناکارا به تعریف بازی همکارانه نیاز داریم که رفتارهای همکارانه یا رقابتی DMU ها را مدل‌سازی می‌کند. در این بازی، DMU های کارا به عنوان بازیکنان، و تغییرات کارایی ایجاد شده روی تمام DMU ها، تابع مشخصه تعریف می‌شود. وقتی یک ائتلاف از DMU های کارا تشکیل می‌شود، تغییرات کارایی ایجاد شده روی تمام DMU ها به عنوان سود بازی در نظر گرفته می‌شود. بعد از تشکیل ائتلاف، باید سود حاصل از همکاری بین بازیکنان ائتلاف به صورت عادلانه تقسیم شود. از این رو از ارزش شیلی برای تقسیم سود حاصل بین بازیکنان ائتلاف استفاده می‌شود. بنابراین برتری روش ما نسبت به روش‌های رتبه‌بندی اخیر این است که می‌تواند رفتار همکارانه DMU های کارا در تشکیل مرز کارا و بهبود DMU های ناکارا را مدل‌سازی کند و با کمک تغییرات کارایی ایجاد شده با حذف یک زیرمجموعه از DMU های کارا و تقسیم این تغییرات کارایی بین DMU های کارا حذف شده، یک رتبه‌بندی دقیق و کامل‌تری برای DMU های کارا ارائه دهد.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، پس از معرفی تعاریف و مقدمات، مدل‌های لی و همکاران و لوزانو و همکاران معرفی می‌شوند. در بخش ۳، روش پیشنهادی را به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا شرح خواهیم داد. بخش ۴ یک مثال عددی کاربردی با توجه به داده‌های ارائه شده را گزارش می‌دهد. در نهایت در بخش آخر، نتایج حاصل از این پژوهش شرح داده شده و زمینه‌های مطالعات بیشتر در تحقیقات آتی معرفی می‌شوند.

۲ تعاریف و مقدمات

نظریه بازی‌ها، روش‌های بررسی نگرش و دیدگاه تعارض‌ها و همکاری‌های بین بازیکنان است که براساس آن، بازیکنان باید عادلانه رفتار کنند. نظریه بازی‌ها به دو شاخه بازی بدون همکاری و بازی همکارانه تقسیم می‌شود. در بازی بدون همکاری، بازیکنان تنها براساس منافع خود عقلانی رفتار می‌کنند و همکاری و توافق بین آن‌ها وجود ندارد. در بازی‌های همکارانه امکان همکاری بین بازیکنان وجود دارد و هدف ارائه روشی برای تقسیم عادلانه سود حاصل از همکاری بازیکنان است. بازی همکارانه به صورت یک زوج مرتب (N, v) تعریف می‌شود که N مجموعه بازیکنان است و v تابعی است که زیرمجموعه‌های بازیکنان را به اعداد حقیقی نگاشت می‌کند. به عبارت دیگر، $v: 2^N \rightarrow R$ که در آن $v(\emptyset) = 0$ است. زیر مجموعه S از N یک ائتلاف نامیده می‌شود. اگر S یک ائتلاف از بازیکنان باشد، آن گاه $v(S)$ مجموع کل سودهای مورد انتظار (ارزش ائتلاف S) توصیف می‌شود که بازیکنان می‌توانند سود خود را کسب کنند.

ارزش شیلی یک مفهوم در حل نظریه بازی همکارانه به منظور محاسبه سود حاصل از همکاری بین بازیکنان است. برای هر بازی همکارانه، ارزش شیلی، کل سود به دست آمده از ائتلاف همه بازیکنان است که به طور یکتا بین بازیکنان توزیع می‌شود. ارزش شیلی برای هر بازیکن $k \in N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S \cup \{i\}) - v(S). \quad (1.2)$$

که در آن n و s به ترتیب تعداد اعضای N و S هستند.

در DEA، مجموعه امکان تولید^{۱۱} مجموعه تمام ترکیبات ممکن ورودی‌ها و خروجی‌های DMU ها است. مرز کارا ماکزیمم ترکیب خروجی‌هایی است که می‌توان برای مجموعه معینی از ورودی‌ها تولید کرد. مرز کارا بخشی از مجموعه امکان تولید است که واحدهای موجود در آن DMU های کارا هستند. از آنجایی که DMU های کارا به منظور ارائه داده‌های مربوط به مصرف ورودی و تولید خروجی‌ها با یکدیگر همکاری می‌کنند؛ از این رو مرز کارا را می‌توان نتیجه رفتار همکارانه DMU های کارا در نظر گرفت و از بازی همکارانه می‌توان به منظور رتبه‌بندی DMU های کارا استفاده کرد. حضور یا عدم حضور یک DMU کارا روی یک مرز کارا موجب تغییر مرز کارا و نمرات کارایی دیگر DMU ها خواهد شد.

ابتدا مدل CCR ورودی محور به منظور محاسبه نمرات کارایی DMU ها را شرح می‌دهیم. فرض کنید m واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j, j \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ وجود دارند به طوری که هر DMU_j با مصرف k ورودی $(x_{ij}, i \in I = \{1, 2, \dots, k\})$ خروجی h ($y_{rj}, r \in H = \{1, 2, \dots, h\}$) را تولید می‌کند. مدل CCR در تعیین نمره کارایی $DMU_{j_0}, j_0 \in M$ به این صورت است:

¹¹ Production Possibility Set

$$\begin{aligned}
 E_{j_0}(M) &= \min \theta_{j_0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in M} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_{j_0} x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, k, \\
 & \sum_{j \in M} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, h, \\
 & \theta_{j_0} \text{ free}, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j \in M.
 \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

لی و همکاران یک سنجش جدیدی به منظور رتبه بندی DMU های کارا ارائه دادند که تاثیر حاشیه ای یک مجموعه معین DMU های روی مرز کارا را روی یک DMU کارا را اندازه گیری می کند. تاثیر مجموعه DMU های کارا S روی یک DMU_d کارا به این صورت تعریف می شود:

$$ECP_d(S) = \frac{E_d(M \setminus S)}{E_d(M)} - 1 = E_d(M \setminus S) - 1. \tag{۳.۲}$$

که $E_d(M) = 1$ و $E_d(M \setminus S)$ نمرات کارایی DMU_d به دست آمده از مدل ۲.۲ به ترتیب برای مجموعه DMU های M و $M \setminus S$ می باشد.

وقتی مجموعه DMU های کارا S از مجموعه مرجع حذف شود، DMU های کارا خارج از S روی مرز کارا قرار دارند. بنابراین اگر $d \in S$ برقرار نباشد، آن گاه $ECP_d(S) = 0$ یعنی تمام DMU های کارا در خارج از S قرار دارند، پس $ECP_d(S) = 0$ وقتی مجموعه S شامل تنها یک DMU باشد، تعریف ۲.۲ دقیقاً با مدل ابرکارایی برابری می کند. در مدل ابرکارایی، هر DMU کارا به کمک مرز کارا جدید تشکیل شده از حذف DMU کارا اندازه گیری می شود. وقتی مجموعه S شامل بیش از یک DMU باشد، اگر $d \in S$ آن گاه DMU_d کارا به کمک مرز کارا جدید و وقتی DMU های کارا متعلق به S از مجموعه DMU ها حذف می شوند، ارزیابی می شود. تعریف ۲.۲ نشان می دهد که نسبت نمره کارایی DMU_d با حذف ائتلاف S از مجموعه مرجع تغییر خواهد کرد. به عبارت دیگر، مقدار $ECP_d(S)$ میزان تاثیر ائتلاف S بر DMU_d را نشان می دهد. لی و همکاران تاثیر مجموعه DMU های کارا S نه تنها روی یک DMU_d کارا بلکه روی تمام DMU های کارا اندازه گیری کردند. بنابراین، مدل لی و همکاران [۱۷] یک بازی همکارانه (N, v) است که در آن N مجموعه DMU های کارا و تابع مشخصه تعریف شده برای هر ائتلاف $S \subseteq N$ به صورت

$$v_{Li}(S) = \sum_{k \in S} E_k(M \setminus S) - 1. \tag{۴.۲}$$

است؛ به طوری که مجموع تغییرات نمرات کارایی DMU های کارا متعلق به S را، وقتی زیرمجموعه ای از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف می شوند، محاسبه می کند.

لوزانو و همکاران یک بازی جدید همکارانه ارائه دادند که در آن بازیکنان، DMU های کارا هستند. مجموعه مرجع اصلاح شده شامل DMU های ناکارا و DMU های کارا خارج از ائتلاف S است. لوزانو و همکاران روی نمره کارایی DMU های ناکارا در $M \setminus N$ تمرکز کردند. برای هر DMU_j ناکارا و هر زیرمجموعه از DMU های کارا $S \subset N$ نامساوی $E_j(M \setminus S) \geq E_j(M)$ برقرار است بنابراین اگر فقط DMU های کارا متعلق به S از مجموعه DMU ها حذف شوند، آن گاه کارایی یک DMU_j ناکارا به مقدار $E_j(M \setminus S) - E_j(M)$ افزایش می یابد. از این رو برای DMU_j ناکارا، ارزش هر ائتلاف از DMU های کارا S را می توان به صورت زیر نوشت:

$$v_j(S) = E_j(M \setminus S) - E_j(M). \tag{۵.۲}$$

لوزانو و همکاران تاثیر مجموعه DMU های کارا S را نه تنها روی یک DMU_j ناکارا، بلکه روی تمام DMU های ناکارا اندازه گیری کردند. بنابراین، مدل لوزانو و همکاران [۱۳] یک بازی همکارانه متفاوت است که در آن بازیکنان DMU های کارا هستند و تابع مشخصه برای هر ائتلاف ناتهی $S \subseteq N$ به صورت

$$v_{Lozano}(S) = \sum_{j \in M \setminus N} E_j(M \setminus S) - E_j(M). \tag{۶.۲}$$

است؛ به طوری که مجموع تغییرات نمرات کارایی DMU های ناکارا را، وقتی زیرمجموعه ای از DMU های کارا از مرز کارا حذف می شوند، اندازه می گیرد.

با استفاده از مدل‌های لی و همکاران و لوزانو و همکاران، رتبه‌بندی DMU های کارا توسط الگوریتم زیر تعیین می‌شوند:

مرحله ۱. فرض کنید DMU_k یک بازیکن باشد و تمام زیر مجموعه‌های ممکن مجموعه N بدون بازیکن k را در نظر بگیرید.

مرحله ۲. با استفاده از مدل ۲.۲ مقادیر کارایی $E_j(M)$ ، $E_j(M \setminus S)$ و $E_j(S \cup \{k\})$ را به دست آورید (در مدل لی $j \in S$ و در مدل لوزانو $j \in M \setminus S$ است).

مرحله ۳. بر اساس روابط ۴.۲ و ۶.۲، $v(S)$ و $v(S \cup \{k\})$ را برای هر $S \subseteq N$ محاسبه کنید.

مرحله ۴. با استفاده از رابطه ۱.۲، ارزش شیلی برای $k \in N$ محاسبه کنید.

۳ روش پیشنهادی

یک سنجش جدید به منظور رتبه‌بندی DMU های کارا پیشنهاد می‌شود که تاثیر حاشیه‌ای یک مجموعه معین از DMU های کارا را روی یک DMU اندازه‌گیری می‌کند. تاثیر مجموعه DMU های کارا S روی یک DMU_k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EP_k(S) = E_k(M \setminus S) - E_k(M). \quad (۱.۳)$$

اگر DMU_k یک واحد کارا باشد، آن‌گاه $EP_k(S) = E_k(M \setminus S) - E_k(M)$ و اگر DMU_k یک واحد ناکارا باشد، آن‌گاه $EP_k(S) = E_k(M \setminus S) - E_k(M)$. بنابراین اگر $S = \emptyset$ یعنی تمام DMU های کارا در خارج از S قرار دارند، $EP_k(S) = 0$ است. وقتی مجموعه DMU های کارا S از مجموعه مرجع حذف شود، DMU های کارا خارج از S روی مرز کارا قرار دارند؛ بنابراین اگر $d \in S$ برقرار نباشد، آن‌گاه $EP_d(S) = 0$ است. در روش پیشنهادی روی نمرات کارایی تمام DMU ها تمرکز می‌کنیم. برای هر DMU_k و هر زیرمجموعه از DMU های کارا $S \subset N$ نامساوی $E_k(M \setminus S) \geq E_k(M)$ برقرار است. بنابراین اگر فقط DMU های کارا متعلق به S از مجموعه DMU ها حذف شوند، آن‌گاه کارایی یک DMU_k به مقدار $E_k(M \setminus S) - E_k(M)$ افزایش می‌یابد؛ از این‌رو، برای هر DMU_k ، $EP_k(S) \geq 0$.

در روش پیشنهادی، تاثیر مجموعه DMU های کارا S را نه تنها روی یک DMU، بلکه روی تمام DMU ها اندازه‌گیری می‌کنیم. فرض می‌کنیم که DMU های کارا برای تشکیل مرز کارا با یکدیگر همکاری می‌کنند، از یک بازی همکارانه برای رتبه‌بندی واحدهای کارا استفاده می‌کنیم و روابط رقابتی و همکارانه بین DMU های کارا را در نظر می‌گیریم. بنابراین روش پیشنهادی ارائه‌شده در این پژوهش، یک بازی جدید همکارانه است که در آن مجموعه بازیکنان DMU های کارا هستند و تابع مشخصه برای هر ائتلاف $S \subseteq N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_{our}(S) = \sum_{k \in M} (E_k(M \setminus S) - E_k(M)) = \sum_{k \in SU(M \setminus N)} (E_k(M \setminus S) - E_k(M)). \quad (۲.۳)$$

وقتی یک زیرمجموعه از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف می‌شود، تنها نمرات کارایی DMU های ناکارا $k \in M \setminus N$ و DMU های کارا متعلق به S تغییر می‌کند. بنابراین تابع مشخصه مجموع تغییرات نمرات کارایی DMU های کارا و ناکارا را وقتی زیرمجموعه معینی از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف می‌شود، اندازه‌گیری می‌کند. ایده روش پیشنهادی به این صورت است که اگر زیرمجموعه‌ای از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف شود، آن‌گاه مرز کارایی جدید توسط DMU های کارا خارج از S و DMU های ناکارا تشکیل می‌شود. بنابراین نمرات کارایی DMU های کارا حذف شده و DMU های ناکارا تغییر می‌کند و نمرات کارایی DMU های کارا خارج از S بدون تغییر می‌ماند. سهم مشارکت یک DMU کارا را می‌توان با افزایش نمرات کارایی DMU های کارا و ناکارا اندازه‌گیری کرد. به منظور محاسبه مقادیر کارایی از مدل CCR ورودی‌محور، و به منظور رتبه‌بندی DMU های کارا از ارزش شیلی استفاده می‌کنیم.

DMU های کارا به دو گروه کارا قوی و ضعیف تقسیم می‌شوند. واحدهای کارا قوی و ضعیف داده‌های مربوط به خود را به اشتراک می‌گذارند و یک بازی همکارانه برای بهبود کارایی DMU های ناکارا تشکیل می‌دهند. اگر S یک ائتلاف تک‌عضوی شامل یک DMU کارا قوی باشد، آن‌گاه کارایی DMU های ناکارا و ابرکارایی واحد حذف‌شده تغییر می‌کند؛ از این‌رو تابع مشخصه برای این ائتلاف مثبت خواهد شد. اگر S یک ائتلاف تک‌عضوی شامل یک DMU کارا ضعیف باشد، آن‌گاه کارایی DMU های ناکارا و ابرکارایی واحد حذف‌شده تغییر نمی‌کند. از این‌رو تابع مشخصه برای این ائتلاف صفر خواهد شد. اگر S شامل بیش از یک DMU کارا قوی و ضعیف باشد، آن‌گاه کارایی DMU های ناکارا و ابرکارایی DMU های کارا ضعیف و قوی حذف شده تغییر می‌کند. از این‌رو تابع مشخصه برای این ائتلاف مثبت خواهد شد. بنابراین چنانچه هر زیرمجموعه از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف شود، تابع مشخصه آن صفر یا مثبت است. هنگامی که یک ائتلاف از DMU های کارایی قوی و ضعیف تشکیل می‌شود، تغییرات در کارایی تمام DMU ها به عنوان سود آن ائتلاف در نظر گرفته می‌شود. سود به دست آمده از تشکیل ائتلاف با کمک یک مفهوم حل بازی بین اعضای ائتلاف تقسیم می‌شود. یک

بازی همکارانه که در آن بازیکنان واحدهای کارا قوی و ضعیف و تابع مشخصه مشارکت هر DMU کارای قوی و ضعیف در تشکیل مرز کارا و بهبود کارایی DMU های ناکارا است، تعریف شده است. سپس DMU های کارای قوی و ضعیف با کمک ارزش شیلی سهم مشارکت و همکاری خود در تشکیل مرز کارا و بهبود کارایی واحدهای ناکارا دریافت می کنند. اگر هر زیرمجموعه از DMU های کارای قوی و ضعیف را به عنوان یک ائتلاف در نظر بگیریم، ابتدا تابع مشخصه برای آن ائتلاف محاسبه می شود و در آخر رتبه بندی DMU های کارای قوی و ضعیف با کمک تابع مشخصه برای تمام ائتلاف ها به دست می آید. از این رو اگر هر زیرمجموعه ای از DMU های کارای قوی و ضعیف در نظر گرفته شود، باتوجه به تعریف تابع مشخصه و ارزش شیلی رتبه بندی بدتر نمی شود.

در روش لی و همکاران، تنها تغییرات نمرات کارایی DMU های کارا و در روش لوزانو و همکاران تنها تغییرات نمرات کارایی DMU های ناکارا اندازه گیری می شود. در واقع روش های لی و همکاران و لوزانو و همکاران تنها بخشی از تغییرات نمرات کارایی DMU ها را در نظر گرفتند. این در حالی است که در روش ارائه شده در این پژوهش، رتبه بندی DMU های کارا با در نظر گرفتن تمام تغییرات نمرات کارایی DMU ها انجام می شود. بنابراین روش پیشنهادی ما نسبت به روش های لی و همکاران و لوزانو و همکاران، نتیجه رتبه بندی دقیق تر و کامل تری را ارائه می دهد.

قضیه ۱.۳. ارزش شیلی یک بازیکن در مدل پیشنهادی برابر با مجموع ارزش شیلی مدل های لی و همکاران و لوزانو و همکاران است.

اثبات. ارزش شیلی بازیکن i در مدل پیشنهادی برابر است با

$$\psi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v_{our}(S \cup \{i\}) - v_{our}(S))$$

از طرفی دیگر

$$v_{our}(S) = \sum_{k \in S \cup (M \setminus N)} (E_k(M \setminus S) - E_k(M)) = \sum_{k \in S} (E_k(M \setminus S) - E_k(M)) + \sum_{k \in (M \setminus N)} (E_k(M \setminus S) - E_k(M)) = v_{Li}(S) + v_{Lozano}(S)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v) &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} ((v_{Li}(S \cup \{i\}) + v_{Lozano}(S \cup \{i\})) \\ &- (v_{Li}(S) + v_{Lozano}(S))) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} ((v_{Li}(S \cup \{i\}) - v_{Li}(S)) + \\ &(v_{Lozano}(S \cup \{i\}) - v_{Lozano}(S))) = \psi_{i_{Li}}(N, v) + \psi_{i_{Lozano}}(N, v) \end{aligned}$$

□

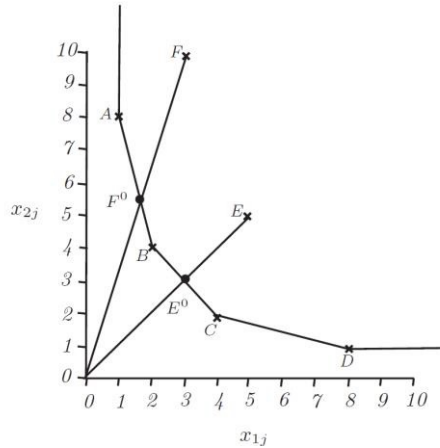
در ادامه با ارائه یک مثال به تفسیر روش پیشنهادی می پردازیم.

مثال ۲.۳. جدول ۱ مجموعه داده مربوط به شش واحد تصمیم گیرنده را نشان می دهد که در آن $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ است. DMU ها شامل دو ورودی و یک خروجی هستند. با استفاده از مدل CCR ورودی محور، نمرات کارایی DMU ها در سطر آخر جدول ۱ گزارش شده است. از این رو DMU های A, B, C, D کارا و DMU های E و F ناکارا هستند.

جدول ۱: مجموعه داده.

DMU_s	A	B	C	D	E	F
x_1	۱	۲	۴	۸	۵	۳
x_2	۸	۴	۲	۱	۵	۱۰
y_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$E_k(M)$	۱	۱	۱	۱	۶/۰	۵۴۵۴/۰

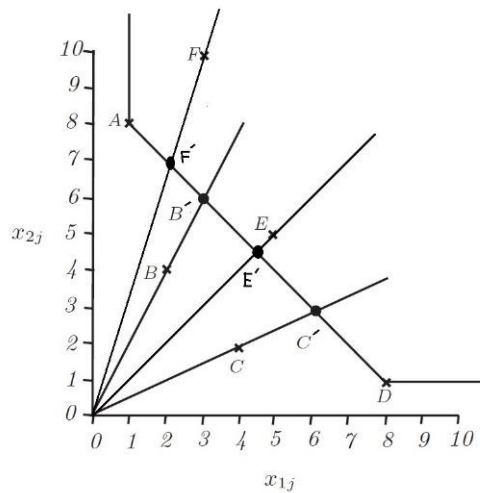
شکل ۱: مرز کارایی اصلی را نشان می‌دهد که در آن $S = \emptyset$ و M شامل تمام DMU ها می‌باشد. اگر یک ائتلاف از DMU های کارا مانند $S = \{B, C\}$ را در نظر بگیریم، DMU های کارایی B و C از مرز کارا حذف می‌شوند و مرز کارایی جدید به کمک DMU های کارایی A و D تعریف می‌شود.



شکل ۱: مرز کارایی اصلی و تصویر واحدهای E و F روی مرز کارا در ائتلاف $S = \emptyset$.

در مدل لی و همکاران، تنها تغییرات نمرات کارایی DMU های کارایی B و C و در مدل لوزانو و همکاران، تنها تغییرات نمرات کارایی DMU های ناکارایی E و F محاسبه می‌شوند. در مدل پیشنهادی، تغییرات نمرات کارایی DMU های کارایی B و C و DMU های ناکارایی E و F اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲ تصویر DMU های C, B, E و F روی مرز کارا جدید را نشان می‌دهد. بنابراین نمره ابرکارایی DMU های B و C به ترتیب $E_B(M \setminus S) = 5/1$ و $E_C(M \setminus S) = 5/1$ و نمره کارایی DMU های ناکارایی E و F به ترتیب $E_E(M \setminus S) = 9/0$ و $E_F(M \setminus S) = 69234/0$ است و بنابراین تابع مشخصه ائتلاف $S = \{B, C\}$ در بازی همکارانه پیشنهادی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v(S) = (E_B(M \setminus S) - 1) + (E_C(M \setminus S) - 1) + (E_E(M \setminus S) - E_E(M)) + (E_F(M \setminus S) - E_F(M)) = (5/1 - 1) + (5/1 - 1) + (9/0 - 6/0) + (69234/0 - 5454/0) = 4469/1$$



شکل ۲: تصویر DMU های کارا و ناکارای روی مرز کارایی جدید برای $S = \{B, C\}$.

جدول ۲ تابع مشخصه $v(S)$ و $v(S \cup \{k\})$ را بر اساس تعریف ۲.۳ را نشان می‌دهد که در آن $k = A$ و $S \subseteq N \setminus \{A\}$ است.

جدول ۲: تابع مشخصه روش پیشنهادی.

S	$v(S)$	$v(S \cup \{k\})$	$v(S \cup \{k\}) - v(S)$
\emptyset	۰	۱۲۱۲/۱	۱۲۱۲/۱
B	۳۹۶۳/۰	۳۱۰۲/۳	۹۱۳۹/۲
C	۳۱۶۷۸/۰	۴۳۷۹/۱	۱۲۱۲/۱
D	۰۰۱/۱	۱۲۱۳/۲	۱۲۰۳/۱
$\{B, C\}$	۴۴۶۹/۱	۳۹/۴	۹۴۳۱/۲
$\{B, D\}$	۳۹۶۳/۱	۳۱۰۲/۴	۹۱۳۹/۲
$\{C, D\}$	۲۰۰۱/۴	۳۲۱۲/۵	۱۲۲۲/۱
$\{B, C, D\}$	۶۵۹۸/۶	۲۹۹۰/۹	۶۳۹۲/۲

جدول ۳: ارزش شیلی و رتبه بندی DMU های کارا در روش پیشنهادی را نشان می دهد.

جدول ۳: رتبه بندی واحدهای کارا در روش پیشنهادی.

رتبه بندی	ارزش شیلی	رتبه بندی	ارزش شیلی	رتبه بندی	واحدهای
روش لی و همکاران	روش لی و همکاران	روش ما	روش ما	روش ما	کارا
۴	۶۲۴۶۶۳۳/۱	۴	۹۵۱۳/۱		A
۳	۹۰۴۹۶۶۳۳/۱	۳	۰۳۶۵/۲		B
۲	۲۲۱۶۳۳/۲	۲	۵۰۲۳/۲		C
۱	۶۹۳۱۸۱۸۲/۲	۱	۸۰۸۹/۲		D

در این تحقیق، برای بررسی میزان همبستگی تعدادی از روش های رتبه بندی واحدهای کارا از ضریب همبستگی پیرسون استفاده می شود. جدول ۴ تغییرات رتبه روش ما با روش لی و همکاران برای هر DMU کارا و ضریب همبستگی پیرسون را نشان می دهد. تغییرات رتبه روش ما و روش لی و همکاران برای هر DMU کارا برابر صفر است. لذا ضریب همبستگی روش ما با روش لی و همکاران برابر یک است. باتوجه به بالا بودن این میزان همبستگی می توان نتیجه گرفت که روش لی و همکاران و روش ما نتایج رتبه بندی یکسانی را برای DMU های کارا ایجاد می کنند و هر دو روش می توانند برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا مورد استفاده قرار بگیرند. بنابراین، نتایج رتبه بندی روش ما برای همه DMU های کارا رضایت بخش است.

جدول ۴: تغییرات رتبه و ضرایب همبستگی روش پیشنهادی ما با مدل لی و همکاران.

تغییرات رتبه روش پیشنهادی ما	واحدهای
روش لی و همکاران	کارا
۰	A
۰	B
۰	C
۰	D
۱	ضریب همبستگی پیرسون

۴ نتایج عددی

در این بخش، یک مجموعه داده واقعی مربوط به بیست شرکت ژاپنی را [۶] برای نشان دادن کارکرد روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش های رتبه بندی اخیر در نظر می گیریم. جدول ۵ مجموعه داده و مقادیر کارایی مربوط به این شرکت ها نشان می دهد که در آن از سه ورودی ($I = \{1, 2, 3\}$) برای تولید یک خروجی ($H = \{1\}$) استفاده می کند. در ارزیابی این شرکت ها، واحدهای ۱، ۲، ۶، ۸ و ۱۸ کارا هستند. چن [۶] در صورت نشدنی بودن مدل ابرکارایی DEA، یک مدل اصلاح شده ابرکارایی DEA به منظور رتبه بندی DMU های کارا پیشنهاد کرده است. مدل های چن و لی و همکاران مبتنی بر ابرکارایی و روش لوزانو و همکاران مبتنی بر کارایی هستند.

جدول ۵: مجموعه داده و مقادیر کارایی مربوط به بیست شرکت ژاپنی.

$DMUs$	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	Y_{1j}	$E_j(M)$
۱	۳/۵۰۹۰۵	۹/۵۱۳۷	۴۰۰۰۰	۲/۱۰۶۷۹۳	۱
۲	۵/۵۱۴۳۲	۸/۲۳۳۳	۵۷۷۵	۱/۱۰۶۱۸۴	۱
۳	۲/۶۷۵۵۳	۲/۷۲۵۳	۳۶۰۰۰	۳/۱۰۴۶۵۶	۷۴۲۴۸/۰
۴	۱/۱۱۲۶۹۸	۴۷۱۷۷	۱۸۳۸۷۹	۶/۹۷۳۸۷	۴۱۰۸/۰
۵	۹/۴۹۷۴۲	۳/۲۷۰۴	۵۸۴۴	۷/۹۱۳۶۱	۹۱۷۳۹/۰
۶	۴/۴۱۱۶۸	۵/۴۳۵۱	۳۰۷۰۰	۸۶۹۲۱	۱
۷	۸/۱۳۳۰۰۸	۱/۴۷۴۶۷	۱۳۸۱۵۰	۴/۷۴۳۲۳	۲۶۸۶۵/۰
۸	۹/۳۵۵۸۱	۴/۱۲۷۴	۱۹۴۶۱	۶۶۱۴۴	۱
۹	۷۳۹۱۷	۲/۲۱۹۱۴	۳۲۸۳۵۱	۹/۶۰۹۳۷	۴۰۵۲۸/۰
۱۰	۶۰۶۳۹	۴/۲۶۹۸۸	۲۸۲۱۵۳	۶/۵۸۳۶۱	۴۷۵۶۹/۰
۱۱	۴/۴۸۱۱۷	۷/۱۳۹۳۰	۱۷۷۰۰۰	۵۱۹۰۳	۵۴۵۶۹/۰
۱۲	۱/۵۲۸۴۲	۶/۹۵۸۳	۳۹۴۶۷	۵/۵۰۲۶۳	۴۷۹۷۵/۰
۱۳	۸/۳۸۴۵۵	۸/۱۳۴۷۳	۱۱۲۲۰۰	۹/۴۷۵۹۷	۶۲۹۳۱/۰
۱۴	۴۶۰۱۳	۳/۸۰۲۳	۱۹۸۰۰	۷/۴۰۴۹۲	۴۵۹۳۳/۰
۱۵	۲/۳۹۰۵۲	۶/۸۹۰۱	۱۸۸۰۰۰	۳/۴۰۰۵۰	۵۳۶۳۱/۰
۱۶	۸/۱۱۰۰۵۵	۷/۱۲۱۵۷	۵۰۵۵۸	۵/۳۸۸۶۹	۱۸۵۶۷/۰
۱۷	۳۸۰۱۵	۴/۷۶۵۱۷	۱۵۷۷۷۳	۴/۳۶۳۵۶	۵۰۹۰۱/۰
۱۸	۱۶۶۹۶	۱/۶۷۶	۳۶۵۴	۳/۳۰۲۰۵	۱
۱۹	۶/۱۷۰۲۳	۶/۱۰۸۱۶	۳۱۰۰۰	۲/۲۹۶۱۲	۹۸۰۷۶/۰
۲۰	۳۱۹۹۷	۶/۴۱۲۹	۱۱۶۴۷۹	۲/۲۸۹۸۲	۵۲۱۸/۰

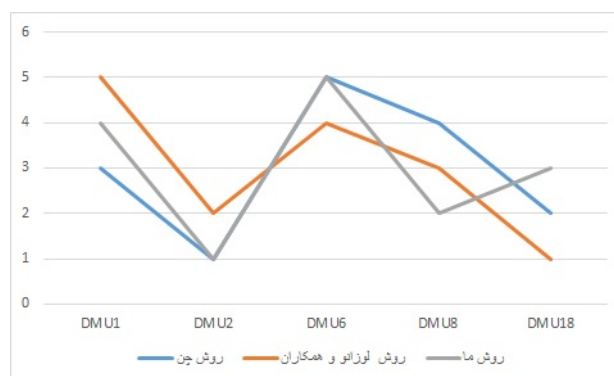
به منظور بررسی سازگاری سه روش رتبه‌بندی چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران با روش ما، نتایج آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. جدول ۶ نتایج به دست آمده از رتبه‌بندی مدل پیشنهادی، مدل های چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران را نشان می‌دهد. شکل ۳ نمودار رتبه هر DMU کارا در هر یک از روش‌های چن، لوزانو و همکاران و طرح پیشنهادی ما را نشان می‌دهد. برای مثال رتبه DMU_1 در روش های چن، لوزانو و همکاران و روش ما به ترتیب ۳، ۵ و ۴ است که اختلاف رتبه روش ما با دو روش دیگر برابر یک است. رتبه DMU_2 در روش‌های چن، لوزانو و همکاران و روش ما به ترتیب ۱، ۲ و ۱ است که اختلاف رتبه روش ما با روش چن و روش لوزانو و همکاران، به ترتیب برابر صفر و یک است. کمترین اختلاف رتبه در سه روش رتبه‌بندی برای DMU های ۱، ۲ و ۶ و بیشترین اختلاف رتبه برای DMU های ۸ و ۱۸ رخ داده است. با استفاده از تغییرات رتبه و ضریب همبستگی پیرسون، میزان همبستگی روش پیشنهادی با مدل‌های چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران در جدول ۷ گزارش شده است. ضریب همبستگی پیرسون روش ما با سه روش چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران به ترتیب برابر با 0.7 ، 0.1 و 0.6 است. با مقایسه نتایج چهار روش رتبه‌بندی نتیجه می‌گیریم که شباهت‌هایی بین سه روش رتبه‌بندی با روش ما وجود دارد. رتبه به دست آمده برای DMU های ۱ و ۵ در دو روش چن و روش ما یکسان هستند در حالی که رتبه به دست آمده دو روش چن و لوزانو و همکاران برای هیچ DMU ای یکسان نیست. ضریب همبستگی پیرسون روش لوزانو و همکاران و چن برابر 0.6 است در حالی که ضریب همبستگی پیرسون بین روش ما و چن برابر 0.7 است. در نتیجه این ضریب همبستگی پیرسون شباهت بیشتر نتایج رتبه‌بندی روش پیشنهادی ما با روش چن و لی و همکاران را نسبت به روش لوزانو و همکاران را تایید می‌کند. از این رو با توجه به نتایج به دست آمده، روش پیشنهادی می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم گیرنده کارا را به دست بدهد.

جدول ۶: رتبه‌بندی روش پیشنهادی و مدل های چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران.

رتبه بندی روش پیشنهادی	ارزش شیلی روش پیشنهادی	رتبه بندی لوزانو و همکاران	رتبه بندی لی و همکاران	رتبه بندی چن	DMUs
۴	۵/۱	۵	۴	۳	۱
۱	۶۵/۲	۲	۱	۱	۲
۵	۳/۱	۴	۵	۵	۶
۲	۳/۲	۳	۲	۴	۸
۳	۸/۱	۱	۳	۲	۱۸

جدول ۷: تغییرات رتبه و ضرایب همبستگی روش پیشنهادی با مدل های چن، لی و همکاران و لوزانو و همکاران.

تغییرات رتبه روش ما و لوزانو و همکاران	تغییرات رتبه روش ما و لی و همکاران	تغییرات رتبه روش ما و چن	DMUs
+۱	۰	-۱	۱
+۱	۰	۰	۲
-۱	۰	۰	۶
+۱	۰	+۲	۸
-۲	۰	-۱	۱۸
۶/۰	۱	۷/۰	ضریب همبستگی پیرسون



شکل ۳: رتبه هر DMU کارا در روش‌های چن، لوزانو و همکاران و طرح پیشنهادی ما

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید مبتنی بر نظریه بازی همکارانه به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا پیشنهاد شده است. با توجه به رفتار همکارانه واحدهای تصمیم‌گیرنده برای تشکیل مرز کارا، می‌توان از نظریه بازی همکارانه استفاده کرد. در این پژوهش با ترکیب دو مدل لی و همکاران و لوزانو و همکاران و استفاده از مدل CCR ورودی محور و ارزش شیلی یک بازی جدید همکارانه را معرفی کردیم که تغییرات مقادیر کارایی واحدهای کارا و واحدهای ناکارا را وقتی زیرمجموعه معینی از واحدهای کارا از مجموعه واحدها حذف می‌شود را اندازه‌گیری می‌کند. این پژوهش برای یک مجموعه داده مورد بررسی قرار گرفت و مقایسه نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را نشان دهد. با توجه به نتایج و یافته‌های این تحقیق و مواردی که بررسی شد، می‌توان استفاده از بازی همکارانه ائتلافی مانند بازی ارتباطی و بازی همکارانه غیرائلافی مانند چانه‌زنی را به عنوان پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی مد نظر قرار داد.

فهرست منابع

- [1] Andersen, P. and Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39(10), pp.1261-1264. doi: 10.1287/mnsc.39.10.1261
- [2] Banker, R.D., Charnes, A. and Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), pp.1078-1092. doi: 10.1287/mnsc.30.9.1078
- [3] Cao, L., Ma, Z. and Muren, 2020. Cooperation and competition strategy analysis of decision-making units based on efficiency game. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 29, pp.235-248. doi: 10.1007/s11518-019-5417-9
- [4] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E., 1979. Measuring the efficiency of decision-making units. *European journal of operational research*, 3(4), p.339. doi: 10.1016/0377-2217(79)90229-7
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L. and Stutz, J., 1985. Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of econometrics*, 30(1-2), pp.91-107. doi: 10.1016/0304-4076(85)90133-2
- [6] Chen, Y., 2004. Ranking efficient units in DEA. *Omega*, 32(3), pp.213-219. doi: 10.1016/j.omega.2003.11.001
- [7] Chen, Y., 2005. Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility. *European journal of operational research*, 161(2), pp.545-551. doi: 10.1016/j.ejor.2003.08.060
- [8] Davtalab-Olyaie, M., Ghandi, F. and Asgharian, M., 2021. On the spectrum of achievable targets in cross-efficiency evaluation and the associated secondary goal models. *Expert Systems with Applications*, 177, p.114927. doi: 10.1016/j.eswa.2021.114927
- [9] Doyle, J. and Green, R., 1994. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. *Journal of the operational research society*, 45, pp.567-578. doi: 10.1057/jors.1994.84
- [10] Du, J., Liang, L., Yang, F., Bi, G.B. and Yu, X.B., 2010. A new DEA-based method for fully ranking all decision-making units. *Expert Systems*, 27(5), pp.363-373. doi: 10.1111/j.1468-0394.2010.00553.x
- [11] Ekiz, M.K. and Tuncer Şakar, C., 2020. A new DEA approach to fully rank DMUs with an application to MBA programs. *International Transactions in Operational Research*, 27(4), pp.1886-1910. doi: 10.1111/itor.12635

- [12] Ghiyasi, M., 2019. Full ranking of efficient and inefficient DMUs with the same measure of efficiency in DEA. *International Journal of Business Performance and Supply Chain Modelling*, 10(3), pp.236-252. doi: 10.1504/IJBPSM.2019.100848
- [13] Hinojosa, M.A., Lozano, S., Borrero, D.V. and Mármol, A.M., 2017. Ranking efficient DMUs using cooperative game theory. *Expert Systems with Applications*, 80, pp.273-283. doi: 10.1016/j.eswa.2017.03.004
- [14] Izadikhah, M. and Farzipoor Saen, R., 2015. A new data envelopment analysis method for ranking decision making units: an application in industrial parks. *Expert Systems*, 32(5), pp.596-608. doi: 10.1111/exsy.12112
- [15] Jahanshahloo, G.R., Junior, H.V., Lotfi, F.H. and Akbarian, D., 2007. A new DEA ranking system based on changing the reference set. *European Journal of Operational Research*, 181(1), pp.331-337. doi: 10.1016/j.ejor.2006.06.012
- [16] Kiaei, H. and Nasser, S.H., 2018. Allocation of Weights Using Simultaneous Optimization of Inputs and Outputs' Contribution in Cross-efficiency Evaluation of DEA. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 28(4), pp.521-538. doi: 10.2298/YJOR1710
- [17] Li, Y., Xie, J., Wang, M. and Liang, L., 2016. Super efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. *European Journal of Operational Research*, 255(3), pp.884-892. doi: 10.1016/j.ejor.2016.06.001
- [18] Lozano, S., Hinojosa, M.A. and Mármol, A.M., 2019. Extending the bargaining approach to DEA target setting. *Omega*, 85, pp.94-102. doi: /10.1016/j.omega.2018.05.015
- [19] Lovell, C.K. and Rouse, A.P.B., 2003. Equivalent standard DEA models to provide super-efficiency scores. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), pp.101-108. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601483
- [20] Ma, X., Liu, Y., Wei, X., Li, Y., Zheng, M., Li, Y., Cheng, C., Wu, Y., Liu, Z. and Yu, Y., 2017. Measurement and decomposition of energy efficiency of Northeast China—based on super efficiency DEA model and Malmquist index. *Environmental Science and Pollution Research*, 24, pp.19859-19873. doi: 10.1007/s11356-017-9441-3
- [21] Mahmoudi, R. and Emrouznejad, A., 2023. A multi-period performance analysis of airlines: A game-SBM-NDEA and Malmquist Index approach. *Research in Transportation Business and Management*, 46, p.100801. doi: 10.1016/j.rtbm.2022.100801
- [22] Örkücü, M., Özsoy, V.S. and Örkücü, H.H., 2020. An optimistic-pessimistic DEA model based on game cross efficiency approach. *RAIRO-Operations Research*, 54(4), pp.1215-1230. doi: 10.1051/ro/2019052
- [23] Sexton, T.R., Silkman, R.H. and Hogan, A.J., 1986. Data envelopment analysis: Critique and extensions. *New directions for program evaluation*, 1986(32), pp.73-105. doi: 10.1002/ev.1441
- [24] Ramón, N., Ruiz, J.L. and Sirvent, I., 2020. Cross-benchmarking for performance evaluation: Looking across best practices of different peer groups using DEA. *Omega*, 92, p.102169. doi: 10.1016/j.omega.2019.102169
- [25] Tone, K., 2001. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3), pp.498-509. doi: 10.1016/S0377-2217(99)00407-5

- [26] Wang, M., Li, L., Dai, Q. and Shi, F., 2021. Resource allocation based on DEA and non-cooperative game. *Journal of Systems Science and Complexity*, 34(6), pp.2231-2249. doi: 10.1007/s11424-021-0259-1
- [27] Wen, Y., An, Q., Hu, J. and Chen, X., 2022. DEA game for internal cooperation between an upper-level process and multiple lower-level processes. *Journal of the Operational Research Society*, 73(9), pp.1949-1960. doi: 10.1080/01605682.2021.1967212
- [28] Wu, J., Liang, L., Yang, F. and Yan, H., 2009. Bargaining game model in the evaluation of decision making units. *Expert Systems with Applications*, 36(3), pp.4357-4362. doi: 10.1016/j.eswa.2008.05.001
- [29] Xie, Q., Zhang, L.L., Shang, H., Emrouznejad, A. and Li, Y., 2021. Evaluating performance of super-efficiency models in ranking efficient decision-making units based on Monte Carlo simulations. *Annals of Operations Research*, 305, pp.273-323. doi: 10.1007/s10479-021-04148-3
- [30] Sojoodi, S., Dastmalchi, L. and Neshat, H., 2021. Efficiency ranking of different types of power plants in Iran using super efficiency method. *Energy*, 233, p.121104. doi: 10.1016/j.energy.2021.121104
- [31] Zhu, Q., Song, M. and Wu, J., 2020. Extended secondary goal approach for common equilibrium efficient frontier selection in DEA with fixed-sum outputs. *Computers and Industrial Engineering*, 144, p.106483. doi: 10.1016/j.cie.2020.106483



A new approach for ranking efficient DMUs in data envelopment analysis by using cooperative game theory

Ali Ashrafi⁽¹⁾ ¹² Mahdie Amiri⁽¹⁾

⁽¹⁾ Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, Semnan, Iran.

Communicated by: Mansour Seraj

Received: 19 October 2022

Accepted: 26 November 2023

Abstract: Ranking of decision making units (DMU) is an important issue in data envelopment analysis (DEA). When efficient DMUs have the same efficiency scores, traditional DEA models usually fail to rank efficient DMUs. In recent years, cooperative game theory has been used to compare and improve the discrimination power of efficient DMUs. In this research, a new method of cooperative game is proposed. The idea of this method is that first, by removing a certain subset of efficient DMUs from the set of units, the efficiency of all units is calculated, and then, using the Shepley value in cooperative game theory, the efficient units are ranked. A numerical example is presented to show the performance of the proposed method and its comparison with recent ranking methods. In the empirical study, the ranking of efficient DMUs is useful and reasonable.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), Decision Making Unit (DMU), Game Theory, Cooperative Game, Ranking efficient DMUs.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹²Corresponding author.

E-mail addresses: (A.Ashrafi) a_ashrafi@semnan.ac.ir, (M.Amiri) mahdie.amiri@semnan.ac.ir