



## یک روش وزن دار ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنج به خوبی متعادل شده بر پایه تفاضل متناهی برای مدل جریان خون در شریان‌ها

روح‌اله عابدیان<sup>۱</sup>، محمود خاکسار عشاق<sup>۲</sup>

(۱) دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران  
(۲) گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۳

چکیده: از آنجایی که مدل‌سازی جریان خون دارای کاربردهای بسیار زیادی در مهندسی پزشکی می‌باشد، امروزه از طریق روش‌های عددی مرتبه دقت بالا شبیه‌سازی آن‌ها مورد توجه قرار گرفته است. مدل جریان خون، جواب‌های حالت پایدار را نیز شامل می‌شود، به این مفهوم که سیستم مدل‌سازی شده در طول زمان به یک شرایط پایدار و بدون تغییر رسیده است. به عبارت دیگر متغیرها و پارامترهای سیستم دیگر با گذشت زمان تغییر نمی‌کنند و سیستم به حالت تعادل رسیده است. در این کار تحقیقاتی یک روش وزن دار ضرورتاً غیرنوسانی از مرتبه دقت پنج بر پایه تفاضل متناهی به گونه‌ای ارائه می‌شود که جواب‌های حالت پایدار را نیز حفظ می‌کند. تعدادی مثال و آزمایش‌های عددی برای تایید خاصیت توازن خوب، دقت مرتبه پنج و هم‌چنین تقریب عددی به همراه جلوگیری از نوسانات جعلی در نواحی ناپیوسته و شک‌دار در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: روش تفاضل متناهی، روش وزن دار ضرورتاً غیرنوسانی، خاصیت به خوبی متعادل شده، مدل جریان خون.

رده‌بندی ریاضی: 65M06; 74S20

### ۱ مقدمه

درک رفتار پیچیده جریان خون در عروق برای بررسی و پرداختن به بیماری‌های قلبی-عروقی که علت مهمی از مرگ و میر در سراسر جهان هستند، بسیار ضروری است. مدل جریان خون در عروق به عنوان یک ابزار بنیادی در مهندسی پزشکی برای شبیه‌سازی و تجزیه و تحلیل همودینامیک سیستم قلبی-عروقی عمل می‌کند. این شبیه‌سازی شامل مطالعه تعامل پیچیده‌ای از دینامیک سیالات، هندسه عروق و عوامل فیزیولوژیکی است تا بینشی درباره پاتوفیزیولوژی انواع بیماری‌های قلبی-عروقی به دست آید.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

یکی از چالش‌های اساسی در مدل‌سازی دقیق جریان خون در عروق، پیاده‌سازی روش‌های عددی است که توانایی مقابله با پیچیدگی‌های ذاتی دینامیک جریان را داشته باشند. در این زمینه، روش وزن‌دار ضرورتاً غیرنوسانی (WENO) به عنوان یک روش عددی قدرتمند به وجود آمده است [۱، ۲، ۹، ۱۰، ۱۲]. روش WENO برای دستیابی به مرتبه دقت بالا و هم‌چنین ثبت ویژگی‌های پیچیده جریان، مانند جدایی جریان، مناطق بازچرخش و گرادیان فشار که برای درک مکانیزم‌های زیربنایی بیماری‌های قلبی-عروقی بسیار حائز اهمیت هستند، طراحی شده است [۳، ۴، ۱۵]. در شبیه‌سازی جریان خون، حفظ ویژگی تعادل‌یافته بسیار حائز اهمیت است زیرا باید اطمینان حاصل شود که طرح عددی، توانایی نمایش دقیقی از واقعیت‌های فیزیکی جریان را دارد. در مفاهیم دینامیک سیالات محاسباتی، یک طرح خوب متعادل، به یک روش عددی اشاره دارد که جواب‌های حالت پایدار یک مسئله جریان را به خوبی تقریب می‌زند، به‌خصوص زمانی که با جریان‌هایی که شامل فیزیک پیچیده یا ناپیوستگی‌ها هستند، روبرو هستیم. این ویژگی به‌خصوص در مواجهه با جریان‌های ضربانی یا جریان‌های در حضور هندسه‌های پیچیده بسیار حیاتی است، زیرا نمایش دقیق ویژگی‌های جریان برای پیش‌بینی‌ها و تجزیه و تحلیل قابل اعتماد، بسیار ضروری است. به همین دلیل، روش‌های تعادل‌یافته [۸] به‌طور ویژه طراحی شده‌اند. علاوه بر این، روش‌های تعادل‌یافته قادر به ثبت اختلالات کوچک در شبکه‌های نسبتاً درشت نیز [۱۴] هستند. برای اطلاعات بیشتر درباره روش‌های تعادل‌یافته، می‌توان [۱۱] را نگرست. دستیابی به دقت مرتبه بالا در شبیه‌سازی‌های عددی جریان خون، اهمیت بسیار زیادی دارد، زیرا آنها باید توانایی ثبت جزئیات دقیق و هم‌چنین پیش‌بینی دقیق رفتار جریان را داشته باشند. روش WENO با مرتبه دقت بالای خود، مزیت قابل توجهی در مدل‌سازی جریان خون در عروق دارد. با استفاده از ایده‌های بازسازی و تعمیم آنها، این روش‌ها قادر هستند، ناپیوستگی‌های متغیرهای جریان را مدیریت نمایند. هم‌چنین این روش‌ها می‌توانند گرادیان‌های جریان را به دقت حل کنند و شبیه‌سازی بهتری از طبیعت پیچیده جریان خون به‌دست آورند. در مدل جریان خون، عبارت منبع بیان‌گر تأثیر عوامل فیزیولوژیکی مانند خواص الاستیکی دیوار عروق، تعامل بین خون و دیوار عروق و اثرات فعالیت قلبی است. محاسبه صحیح عبارت منبع برای به‌دست آوردن نتیجه‌های واقع‌بینانه و مرتبط با فیزیولوژی بسیار حیاتی است. در این کار تحقیقاتی، هدف معرفی یک روش جدید WENO با فرمول‌بندی و تکنیک‌های گسسته‌سازی نوآورانه بر پایه تفاضل منتهای به‌گونه‌ای است که اطمینان حاصل شود که عبارت منبع به دقت تقریب زده می‌شود. با این کار پیش‌بینی‌ها قابل اعتمادتر و درک بهتری از پویایی پیچیده جریان خون در عروق حاصل می‌گردد. جریان خون در عروق را می‌توان توسط مدل جریان خون یک‌بعدی به‌صورت زیر توصیف نمود [۱۵]:

$$\begin{cases} A_t + Q_x = 0, \\ Q_t + \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{\rho\sqrt{\pi}} A^{\frac{2}{3}} \right)_x = \frac{KA}{\rho\sqrt{\pi}\sqrt{A_0}} (A_0)_x, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن  $A$  مساحت مقطع عرضی،  $Q = Au$  نمایانگر دبی جریان،  $u$  سرعت جریان و  $\rho$  چگالی خون است. افزون بر این  $K$  نشان‌دهنده سفتی عروق و  $A_0$  مساحت مقطع در حالت استراحت می‌باشد. به‌طور کلی، معادلات (۱.۱) به شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$U_t + F(U)_x = S(A, A_0), \quad (2.1)$$

که در آن بردار مجهول، تابع جریان و عبارت منبع به ترتیب عبارتند از:

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{\rho\sqrt{\pi}} A^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \quad S(A, A_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{KA}{\rho\sqrt{\pi}\sqrt{A_0}} (A_0)_x \end{pmatrix}.$$

ویژگی مهم سیستم (۱.۱) این است که توانایی برقراری تعادل مکانیکی (حالت ثابت غیربدیهی) را دارد:

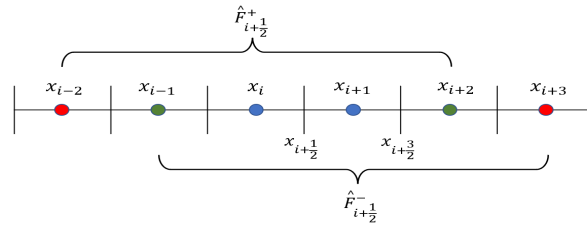
$$u = 0, \quad A = A_0, \quad (3.1)$$

که در این حالت، عبارت منبع به‌طور دقیق به وسیله گرادیان جریان متعادل می‌شود. ساختار این کار تحقیقاتی در ادامه به این صورت است: در بخش ۲، یک روش جدید WENO تعادل‌یافته با مرتبه دقت بالا بر پایه تفاضل منتهای ارائه می‌شود. در بخش ۳، نتایج عددی جامعی ارائه می‌شود تا رفتار روش WENO تعادل‌یافته جدید برای مدل جریان خون را نشان دهد و صحت مرتبه دقت بالا، ویژگی تعادل‌یافته و تقریب مناسب برای جواب‌های پیوسته و ناپیوسته را تأیید کند. در بخش ۴، برخی نتایج ارائه می‌شوند.

## ۲ روش جدید وزن‌دار ضرورتاً غیرنوسانی تعادل‌یافته

در این بخش، یک روش WENO جدید بر پایه تفاضل منتهای با تعادل مناسب و پایدار برای مدل جریان خون طراحی می‌کنیم که حالت‌های ثابت (۳.۱) را برآورده می‌کند. شکل نیمه گسسته‌ی معادله (۲.۱) به‌صورت زیر است:

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = L(U_i(t)), \quad (1.2)$$



شکل ۱: شبکه یکنواخت مورد استفاده  $\hat{F}_{i+1/2}^+$  و  $\hat{F}_{i+1/2}^-$  که نسبت به نقطه  $x_{i+1/2}$  متقارن هستند.

که در این جا،  $L(U)$  فرمول بندی فضایی گسسته با مرتبه دقت بالا برای  $-F(U)_x + S(A, A_0)$  است. یک شبکه ی یکنواخت که توسط نقاط  $x_i = i\Delta x$  تعریف شده است را در نظر بگیرید، که سلول ها به صورت  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  تعریف می شوند. اندازه ی هر سلول به صورت  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  نمایش داده می شود و مرکز سلول ها به صورت  $x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2$  نمایش داده می شوند. بنابراین، سمت راست معادله (۱.۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$L(U_i(t)) = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} S dx, \quad (2.2)$$

که در این جا،  $U_i(t) := U(x_i, t)$  تعریف می شود. همچنین،  $\hat{F}_{i+1/2}$  یک جریان عددی از مرتبه دقت پنجم برای تقریب تابع جریان  $F(u)$  در نقطه ی  $x_{i+1/2}$  است. برای پایداری روش عددی، تابع جریان را به بخش های مثبت و منفی تقسیم می کنیم:

$$F(U) = F^+(u) + F^-(u), \quad (3.2)$$

که در آن  $\frac{dF^+(u)}{du} \geq 0$ ,  $\frac{dF^-(u)}{du} \leq 0$  است. در این تحقیق، از تقسیم تابع جریان لکس-فریدریش استفاده می شود:

$$F^\pm(U) = \frac{1}{\alpha} (F(U) \pm \alpha U), \quad (4.2)$$

که  $\alpha = \max\{|F'(U)|\}$  بر روی  $U$  های مرتبط تعریف می شود. همچنین  $\hat{F}_{i+1/2}^+$  و  $\hat{F}_{i+1/2}^-$  به ترتیب جریان های عددی در  $x = x_{i+1/2}$  برای بخش های مثبت و منفی هستند. بنابراین،

$$\hat{F}_{i+1/2} = \hat{F}_{i+1/2}^+ + \hat{F}_{i+1/2}^-. \quad (5.2)$$

در ادامه، فقط روش تقریب  $\hat{F}_{i+1/2}^+$  را شرح می دهیم زیرا  $\hat{F}_{i+1/2}^+$  و  $\hat{F}_{i+1/2}^-$  نسبت به  $x = x_{i+1/2}$  به صورت تقارنی هستند (شکل ۱ را مشاهده نمایید). برای ساده شدن نمادها در این تحقیق، از این به بعد علامت “+” را در بالانویس حذف می کنیم. برای به دست آوردن تقریب از مرتبه دقت پنجم، استنسیل بزرگ مربوطه به صورت  $S_1 = \{x_{i-2}, \dots, x_{i+2}\}$  انتخاب می شود. حال علاقمند هستیم که چند جمله ای بازسازی شده درجه چهارم  $q_1(x)$  را با استفاده از روابط

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} q_1(x) dx = F_j, \quad j = i-2, i-1, i, i+1, i+2,$$

به دست آوریم:

$$\begin{aligned} q_1(x) = & F_i + \frac{-11F_{i+2} + 82F_{i+1} - 82F_{i-1} + 11F_{i-2}}{120} \left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right) \\ & + \frac{-3F_{i+2} + 40F_{i+1} - 74F_i + 40F_{i-1} - 3F_{i-2}}{56} \left(\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{12}\right) \\ & + \frac{F_{i+2} - 2F_{i+1} + 2F_{i-1} - F_{i-2}}{12} \left(\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^3 - \frac{3}{20} \left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)\right) \\ & + \frac{F_{i+2} - 4F_{i+1} + 6F_i - 4F_{i-1} + F_{i-2}}{24} \left(\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^4 - \frac{3}{14} \left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^2 + \frac{3}{560}\right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

از این‌رو، جریان عددی از مرتبه دقت پنجم را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\hat{F}_{i+1/2}^{(1)} = q_1(x_{i+1/2}) = \frac{1}{30}F_{i-2} - \frac{13}{60}F_{i-1} + \frac{47}{60}F_i + \frac{9}{20}F_{i+1} - \frac{1}{20}F_{i+2}. \quad (۷.۲)$$

سیس، دو استنسیل کوچک  $S_2 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$  و  $S_3 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$  انتخاب می‌شود. همانند قبل، می‌توان چندجمله‌ای‌های بازسازی شده درجه دوم  $q_2(x)$  و  $q_3(x)$  را با استفاده از روابط

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} q_2(x) dx = F_j, \quad j = i-2, i-1, i, \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} q_3(x) dx = F_j, \quad j = i, i+1, i+2 \quad (۸.۲)$$

به دست آورد. فرم صریح جریان‌های عددی از مرتبه دقت سوم به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2}^{(2)} &= q_2(x_{i+1/2}) = \frac{1}{3}F_i - \frac{7}{6}F_{i-1} + \frac{11}{6}F_i, \\ \hat{F}_{i+1/2}^{(3)} &= q_3(x_{i+1/2}) = \frac{1}{3}F_i + \frac{5}{6}F_{i+1} - \frac{1}{6}F_{i+2}. \end{aligned} \quad (۹.۲)$$

شاخص‌های همواری برای  $n = 1, 2, 3$  به صورت  $\beta_n$  هستند که برای اندازه‌گیری همواری توابع  $p_n(x)$  استفاده می‌شوند. در این کار تحقیقاتی، از فرمول شاخص‌های همواری معرفی شده در [۹] استفاده می‌گردد:

$$\beta_n = \sum_{\alpha=1}^r \int_{I_i} \Delta x^{\alpha-1} \left( \frac{d^\alpha p_n(x)}{dx^\alpha} \right)^2 dx, \quad n = 1, 2, 3. \quad (۱۰.۲)$$

عبارات صریح مرتبط با شاخص‌های همواری به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{144} (F_{i-2} - 8F_{i-1} + 8F_{i+1} - F_{i+2})^2 \\ &+ \frac{1}{15600} (11F_{i-2} - 174F_{i-1} + 362F_i - 174F_{i+1} + 11F_{i+2})^2 \\ &+ \frac{781}{2880} (F_{i-2} - 2F_{i-1} + 2F_{i+1} - F_{i+2})^2 \\ &+ \frac{1421461}{1310400} (F_{i-2} - 4F_{i-1} + 6F_i - 4F_{i+1} + F_{i+2})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (F_{i-2} - 2F_{i-1} + F_i)^2 + \frac{1}{4} (F_{i-2} - 4F_{i-1} + 3F_i)^2, \\ \beta_3 &= \frac{13}{12} (F_i - 2F_{i+1} + F_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3F_i - 4F_{i+1} + F_{i+2})^2. \end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$

بسط تیلور شاخص‌های همواری حول  $x_i$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \Delta x^2 (F_i')^2 + \frac{13}{12} \Delta x^4 (F_i'')^2 \\ &+ \frac{1}{5040} \Delta x^6 \left( 5467(F_i'')^2 - 14F_i''F_i^{(4)} - 336F_i'F_i^{(5)} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^8), \\ \beta_2 &= \Delta x^2 (F_i')^2 + \Delta x^4 \left( \frac{13}{12} (F_i'')^2 - \frac{2}{3} F_i'F_i^{(3)} \right) \\ &+ \Delta x^6 \left( -\frac{13}{6} F_i''F_i^{(3)} + \frac{1}{4} F_i'F_i^{(4)} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^8), \\ \beta_3 &= \Delta x^2 (F_i')^2 + \Delta x^4 \left( \frac{13}{12} (F_i'')^2 - \frac{2}{3} F_i'F_i^{(3)} \right) \\ &- \Delta x^6 \left( -\frac{13}{6} F_i''F_i^{(3)} + \frac{1}{4} F_i'F_i^{(4)} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^8). \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

به راحتی می توان نشان داد که شاخص همواری سراسری  $\tau$  که به صورت زیر تعریف می شود، در روابط زیر صدق می کند:

$$\tau = (\beta_2 - 2\beta_1 + \beta_3)^2 = \begin{cases} \mathcal{O}(\Delta x^8), & F'_i \neq 0, F''_i \neq 0, \\ \mathcal{O}(\Delta x^{10}), & F'_i = 0, F''_i \neq 0. \end{cases} \quad (13.2)$$

حال وزن های غیرخطی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\sum_{l=1}^3 \bar{\omega}_l}, \quad \bar{\omega}_n = \gamma_n \left( 1 + \frac{\tau}{\beta_n + \Delta x^2} \right), \quad n = 1, 2, 3. \quad (14.2)$$

در نواحی هموار، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\tau}{\beta_n + \Delta x^2} = \mathcal{O}(\Delta x^6), \quad n = 1, 2, 3. \quad (15.2)$$

بنابراین،  $\omega_n$  (برای  $n = 1, 2, 3$ ) شرط مرتبه دقت را برآورده می کند، زیرا در [۹] نشان شده است که شرط لازم و کافی برای به دست آوردن مرتبه دقت پنجم، عبارت است از

$$\omega_n - \gamma_n \leq \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad n = 1, 2, 3.$$

بازسازی جدید جریان عددی در  $x_{i+1/2}$  به صورت زیر است:

$$\hat{F}_{i+1/2} = \omega_1 \left( \frac{1}{\gamma_1} q_1(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} q_2(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} q_3(x_{i+1/2}) \right) + \omega_2 q_2(x_{i+1/2}) + \omega_3 q_3(x_{i+1/2}). \quad (16.2)$$

سمت راست (۱۶.۲) با روش WENO کلاسیک [۹] متفاوت است، زیرا معادله (۱۶.۲) برای هر انتخاب از وزن های خطی  $\gamma_1, \gamma_2$  و  $\gamma_3$  به شرط این که هر کدام مثبت و از طرفی جمع آنها برابر یک باشد ( $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ ) برقرار است، در حالی که در روش WENO کلاسیک فقط یک دسته خاص از وزن های خطی را می توان انتخاب نمود. هدف از این رویکرد، ارائه روش تقریبی جدید از مرتبه دقت بالا در نقطه  $x_{i+1/2}$  برای جریان عددی در ناحیه هموار است؛ در غیر این صورت، روش توانایی دستیابی به دقت بهینه پنجم خود را دارا نمی باشد (به این مفهوم که هزینه محاسباتی به دست آوردن دقت مرتبه پنجم در نواحی هموار پرداخته می شود، اما دقت، پایین تر از مرتبه پنجم است). اکنون، به منظور دستیابی به خاصیت تعادل یافته، عبارت منبع به دو عبارت مجزا تقسیم می گردد [۱۵]. از این رو، با بازنویسی معادله (۱.۱) به صورت زیر

$$\begin{cases} A_t + Q_x = 0, \\ Q_t + \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{3\rho\sqrt{\pi}} A^{\frac{2}{3}} \right)_x = \frac{K}{\rho\sqrt{\pi}} (A - A_0)(\sqrt{A_0})_x + \frac{K}{3\rho\sqrt{\pi}} (A_0^{\frac{2}{3}})_x, \end{cases} \quad (17.2)$$

فرم فشرده

$$U_t + F(U)_x = S,$$

حاصل می گردد، که در آن  $U = (A, Q)^T$ ،  $F(U) = (Q, \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{3\rho\sqrt{\pi}} A^{\frac{2}{3}})$  و  $S = (0, \frac{K}{\rho\sqrt{\pi}} (A - A_0)(\sqrt{A_0})_x + \frac{K}{3\rho\sqrt{\pi}} (A_0^{\frac{2}{3}})_x)$  است. به همین دلیل، برای تقریب عبارت منبع  $S^{[2]}$  در (۱۷.۲)، رابطه ی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} s^{[2]} dx &\approx \frac{1}{\Delta x} \frac{K}{\rho\sqrt{\pi}} \int_{I_i} (A - A_0)(\sqrt{A_0})_x dx \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \frac{K}{3\rho\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} \left\{ (A_0^{\frac{2}{3}})_{i+1/2}^+ + (A_0^{\frac{2}{3}})_{i+1/2}^- \right\} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left\{ (A_0^{\frac{2}{3}})_{i-1/2}^+ + (A_0^{\frac{2}{3}})_{i-1/2}^- \right\} \right), \end{aligned} \quad (18.2)$$

که در آن اولین انتگرال سمت راست معادله (۱۸.۲) با فرمول انتگرال گیری عددی گوس-لژاندر سه نقطه‌ای تقریب زده می‌شود. سرنجام، برای طراحی روش جدید WENO تعادل یافته، جریان لکس-فریدریش (۴.۲) را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$F^\pm(U) = \frac{1}{\psi} (F(U) \pm \alpha U), \quad (19.2)$$

که در آن  $U = (A - A_0, Q)^T$  است. با این کار، در حالت پایدار،  $U$  ثابت و تأثیر عبارت‌های لغزندگی  $U_{j+1/2}^+ - U_{j+1/2}^-$  ناپدید می‌شود. بنابراین، تأثیر این عبارت‌های لغزندگی صفر می‌شود و جریان عددی اصلی به یک فرم ساده کاهش می‌یابد. به منظور پیشرفت در زمان، از روش‌های چندگام خطی چندگانه،  $TVB$ ، که توسط روث و هوندسدورفر در [۱۳] معرفی شده است، استفاده می‌کنیم. از آنجایی که روش معرفی شده در این کار تحقیقاتی، نام‌گذاری شده به نام  $FDWENO$  دارای دقت مرتبه پنجم است، بنابراین به منظور یکنواختی گسسته‌سازی فضایی و زمانی، معادله (۱.۲) با استفاده از روش چندگام خطی چندگانه با پنج گام و از مرتبه دقت پنج،  $(5, 5)$   $TVB$ ، در زمان پیشرفت می‌یابد. فرم صریح  $(5, 5)$   $TVB$  به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= 3/308891758551210 U_i^n + 1/747442076919292 \Delta t L_i^n \\ &- 4/653490937946655 U_i^{n-1} - 4/630745565661800 \Delta t L_i^{n-1} \\ &+ 3/571762873789854 U_i^{n-2} + 5/086056171401077 \Delta t L_i^{n-2} \\ &- 1/504199914126327 U_i^{n-3} - 2/691494591660196 \Delta t L_i^{n-3} \\ &+ 0/277036219731918 U_i^{n-4} + 0/574321855183372 \Delta t L_i^{n-4}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

روش  $(5, 5)$   $TVB$  پایداری عددی روش را تا  $0.377052834833475$   $CFL = 0$  حفظ می‌کند. در این پژوهش، ما مراحل اولیه روش‌های چندگام خطی چندگانه را با استفاده از روش سومین مرتبه بهینه SSPRK [۷] به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} U_i^{(1)} &= U_i^n + \Delta t L(U_i^n), \\ U_i^{(2)} &= \frac{3}{4} U_i^n + \frac{1}{4} U_i^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(U_i^{(1)}), \\ U_i^{n+1} &= \frac{1}{4} U_i^n + \frac{3}{4} U_i^{(2)} + \frac{3}{4} \Delta t L(U_i^{(2)}). \end{aligned} \quad (21.2)$$

### ۳ نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش  $FDWENO$  تعدادی مثال در نظر گرفته می‌شود. همچنین نتایج حاصل از روش  $FDWENO$  با نتایج حاصل از روش معرفی شده در [۱۵] که به نام روش  $FVWENO$  نام‌گذاری می‌کنیم، مقایسه می‌شود. برای مقایسه عادلانه، ثابت  $CFL = 0.3$  را برای هر دو روش در نظر می‌گیریم. همچنین برای بررسی این که آیا انتخاب دلخواه وزن‌های خطی  $\gamma_n$ ، تأثیری در مرتبه دقت روش  $FDWENO$  دارد یا خیر، سه دسته وزن خطی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} I : \gamma_1 &= 0.8; \gamma_2 = \gamma_3 = 0.1, \\ II : \gamma_1 &= 0.5; \gamma_2 = \gamma_3 = 0.25, \\ III : \gamma_1 &= 0.4; \gamma_2 = 0.4; \gamma_3 = 0.2. \end{aligned}$$

مثال ۱.۳. در این مثال مرتبه دقت روش  $FDWENO$  بررسی می‌گردد. به همین دلیل معادله (۱۷.۲) در دامنه محاسباتی  $[0, 2]$  از طریق شرایط اولیه زیر به همراه شرایط مرزی تناوبی حل می‌شود:

$$A(x, 0) = \sin^2(\pi x), \quad Q(x, 0) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x), \quad A_0(x) = \cos^2(\pi x).$$

پارامترهای موجود در معادله (۱۷.۲) عبارتند از  $K = 10^6 Pa/m$  و  $\rho = 1060 kg/m^3$ . با توجه به این که این تست، جواب دقیقی ندارد، بنابراین با استفاده از  $N = 10000$  سلول و روش  $FVWENO$  یک جواب مرجع به دست آورده می‌شود. زمان محاسباتی در این

جدول ۱: خطا و مرتبه همگرایی در زمان  $t = 0.1$  برای مثال ۱.۳

N	FVWENO			FDWENO(I)		
	$L_1$ -error(order)	$L_\infty$ -error(order)	Time(s)	$L_1$ -error(order)	$L_\infty$ -error(order)	Time(s)
۴۰	$9.14E-06(-)$	$1.22E-05(-)$	۰.۳۱۴۵	$3.12E-06(-)$	$6.42E-06(-)$	۰.۲۸۹۲
۸۰	$5.78E-08(0.73)$	$1.08E-07(0.82)$	۰.۵۹۸۵	$3.19E-08(0.61)$	$4.38E-08(0.72)$	۰.۵۵۱۵
۱۶۰	$1.01E-09(0.58)$	$3.37E-09(0.50)$	۰.۹۴۰۱	$6.04E-10(0.52)$	$1.24E-09(0.51)$	۰.۸۵۶۱
۳۲۰	$3.23E-11(0.49)$	$1.06E-10(0.49)$	۱.۷۸۹۲	$1.88E-11(0.51)$	$3.35E-11(0.51)$	۱.۶۰۰۱
۶۴۰	$1.04E-12(0.49)$	$3.12E-12(0.59)$	۳.۵۰۱۲	$6.11E-13(0.49)$	$1.04E-12(0.51)$	۳.۱۹۸۳
۱۲۸۰	$3.00E-14(0.51)$	$1.05E-13(0.49)$	۶.۹۳۴۱	$1.77E-14(0.51)$	$3.23E-14(0.51)$	۶.۱۹۳۴

N	FDWENO(II)			FDWENO(III)		
	$L_1$ -error(order)	$L_\infty$ -error(order)	Time(s)	$L_1$ -error(order)	$L_\infty$ -error(order)	Time(s)
۴۰	$4.68E-06(-)$	$1.06E-05(-)$	۰.۲۷۸۱	$7.15E-06(-)$	$1.22E-05(-)$	۰.۲۸۰۲
۸۰	$2.89E-08(0.73)$	$6.89E-08(0.72)$	۰.۵۴۱۸	$3.27E-08(0.77)$	$1.02E-07(0.69)$	۰.۵۴۶۴
۱۶۰	$8.31E-10(0.51)$	$1.46E-09(0.56)$	۰.۸۳۴۱	$1.07E-09(0.93)$	$2.86E-09(0.16)$	۰.۸۴۵۱
۳۲۰	$2.00E-11(0.38)$	$4.78E-11(0.93)$	۱.۵۷۴۵	$3.17E-11(0.58)$	$7.08E-11(0.34)$	۱.۵۸۰۶
۶۴۰	$6.16E-13(0.52)$	$1.34E-12(0.16)$	۳.۰۲۳۵	$1.13E-12(0.81)$	$1.98E-12(0.16)$	۳.۱۴۲۶
۱۲۸۰	$1.72E-14(0.16)$	$4.23E-14(0.99)$	۶.۲۱۸۹	$3.34E-14(0.58)$	$6.23E-14(0.99)$	۶.۱۸۲۷

مثال  $t = 0.1$  است. نتایج عددی حاصل از به کارگیری دو روش برای این تست در جدول ۱ نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، هر دو روش دقت مرتبه پنجم را بدست آورده اند. اما روش FDWENO خطای کمتری را نسبت به روش FVWENO برای این تست به دست آورده است، در حالی که زمان محاسباتی آن تقریباً ۱۰ درصد کمتر است.

مثال ۲.۳. به عنوان دومین نمونه، مسئله ای مورد بررسی قرار می گیرد که مشابه با مسئله شکست سد در معادلات آب های کم عمق است [۶]. حال مسئله مشابه در مدل جریان خون را در نظر می گیریم؛ فرض کنید یک تورنیکت (یک نوع بند است که برای متوقف کردن جریان خون در بخشی از بدن استفاده می شود) قرار داده شده است و ما آن را به صورت ناگهانی برمی داریم. شرایط اولیه برای این مسئله در دامنه محاسباتی  $[-L, L]$ ، به صورت زیر است:

$$A(x, 0) = \begin{cases} \pi R_L^2, & x \leq 0, \\ \pi R_R^2, & x > 0, \end{cases} \quad Q(x, 0) = 0.$$

پارامترهای این تست عبارتند از:

$$K = 10^9 Pa/m, \quad \rho = 1060 kg/m^3, \quad R_L = 5 \times 10^{-3} m, \quad R_R = 4 \times 10^{-3} m, \quad L = 0.4 m.$$

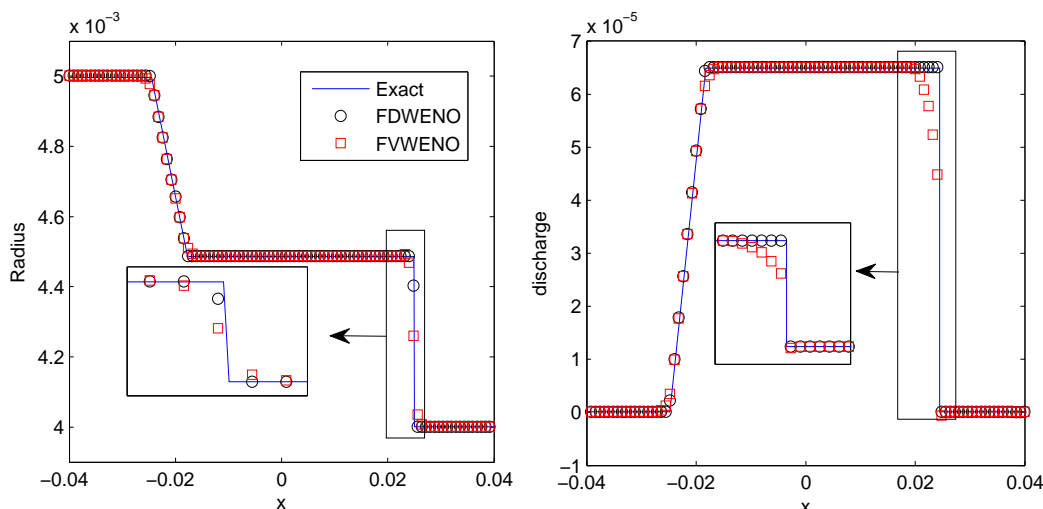
شرط مرزی انتقالی برای این مسئله در نظر گرفته می شود. نتایج عددی حاصل از به کارگیری هر دو روش FVWENO و FDWENO برای این مسئله در زمان نهایی  $t = 0.05 s$  با استفاده از  $N = 100$  سلول، در شکل ۲ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می گردد، هر دو روش عمل کرد قابل قبولی دارند، اما روش جدید FDWENO به خصوص در نواحی شاک دار عمل کرد بهتری را دارد.

مثال ۳.۳. اینک در این مثال، تست نیمه پایا که در [۵] برای اولین بار مورد آزمایش قرار گرفته است، بررسی می شود. در واقع این تست، برای بررسی قابلیت روش های عددی در مورد اختلال در حالت پایدار، به کارگیری می شود. نکته قابل توجه این است که با شرایط اولیه  $R(x, 0) = \Phi(x)$ ،  $u(x, 0) = 0$  جواب واقعی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} R(x, t) = R_0 + \frac{\epsilon}{\gamma} \left( \Phi(x - C_0 t) + \Phi(x + C_0 t) \right), \\ u(x, t) = -\frac{\epsilon C_0}{\gamma R_0} \left( -\Phi(x - C_0 t) + \Phi(x + C_0 t) \right), \end{cases}$$

به طوری که

$$C_0 = \sqrt{\frac{KR_0}{2\rho}}.$$



شکل ۲: مثال ۲.۳ در زمان نهایی  $t = 0.05$  ثانیه و با  $N = 100$ . سمت چپ:  $R$ . سمت راست:  $Q$ .

برای این مثال، در دامنه محاسباتی  $[0, L]$  شرایط اولیه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A(x, 0) = \begin{cases} \pi R_0^2, & x \in [0, \frac{4L}{10}] \cup [\frac{6L}{10}, L], \\ \pi R_0^2 \left(1 + \epsilon \sin\left(\pi \frac{x - 4L/10}{2L/10}\right)\right)^2, & x \in [\frac{4L}{10}, \frac{6L}{10}], \end{cases} \quad Q(x, 0) = 0.$$

پارامترهای این تست عبارتند از:

$$K = 10^6 \text{ Pa/m}, \quad \rho = 1060 \text{ kg/m}^3, \quad R_0 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad L = 0.16 \text{ m}, \quad \epsilon = 5 \times 10^{-3}.$$

شرط مرزی انتقالی برای این مسئله در نظر گرفته می‌شود. شکل ۳ نتایج عددی حاصل از روش‌ها را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌توان دید، روش FDWENO عمل کرد بهتری را نسبت به FVWENO دارد.

مثال ۴.۳. در این مثال، حرکت یک پالس در بخشی از  $R_R$  که از یک انبساط عبور می‌کند را بررسی می‌کنیم ( $A_L > A_R$ ). پارامترهای این تست عبارتند از:

$$K = 10^6 \text{ Pa/m}, \quad \rho = 1060 \text{ kg/m}^3, \quad L = 0.16 \text{ m}, \quad R_L = 5 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad R_R = 4 \times 10^{-3} \text{ m},$$

و  $\Delta R = 10^{-3} \text{ m}$ . همچنین یک شکل کاهشی را در مقیاسی نسبتاً کوچک انتخاب می‌کنیم:

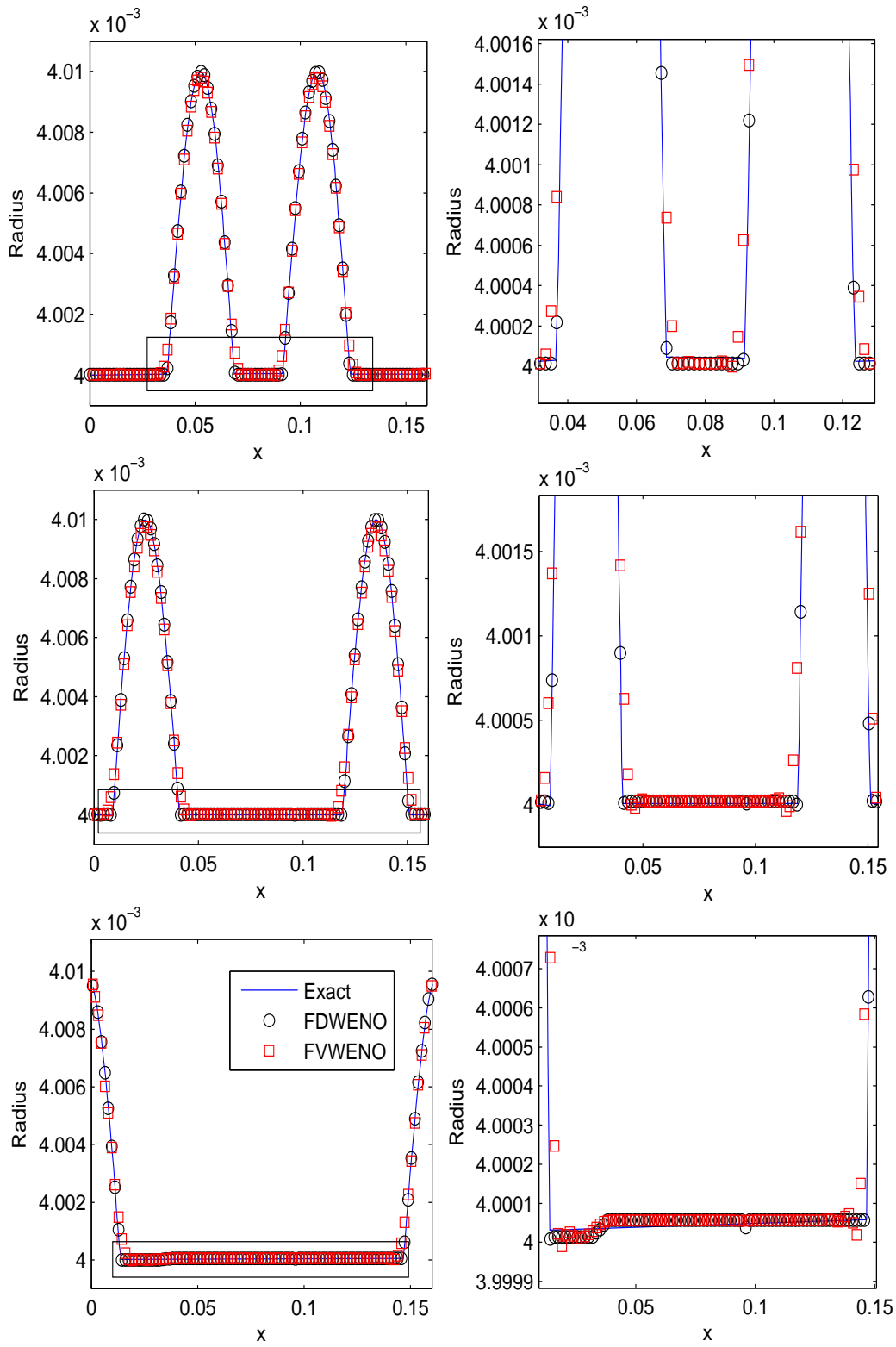
$$R_0(x) = \begin{cases} R_R + \Delta R, & 0 \leq x \leq x_1, \\ R_R + \frac{\Delta R}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \pi\right)\right), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ R_R, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به‌طوری که  $x_1 = 19L/40$  و  $x_2 = L/2$ . بنابراین، شرایط اولیه در این مثال به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

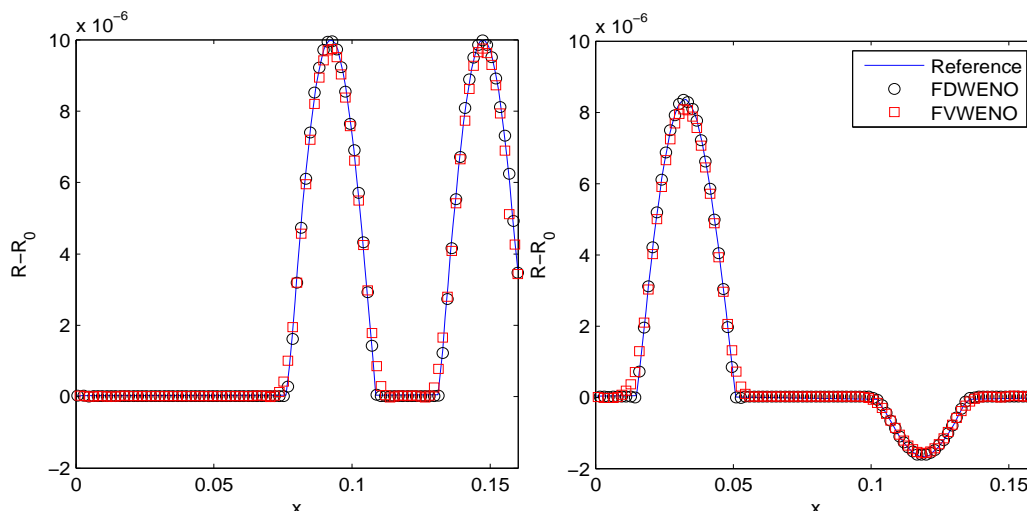
$$R(x, 0) = \begin{cases} R_0(x) \left(1 + 5 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{5\pi}{L} \left(x - \frac{13L}{40}\right)\right)\right), & x \in \left[\frac{13L}{40}, \frac{17L}{40}\right], \\ R_0(x), & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad Q(x, 0) = 0.$$

در این مثال شرط مرزی انتقالی در نظر گرفته می‌شود. شکل ۴ نتایج حاصل از هر دو روش را به همراه جواب مرجع، به‌دست آمده توسط روش FVWENO با  $N = 2000$ ، در زمان‌های مختلف را نمایش می‌دهد. شکل ۴ نشان می‌دهد که نتایج به‌دست آمده با یکدیگر قابل مقایسه هستند، اما عمل کرد روش جدید معرفی شده در این کار تحقیقاتی بهتر است.





شکل ۳: مثال ۲.۳ با  $N = 100$  برای  $R$ . بالا:  $t = 0.0002$ . وسط:  $t = 0.0004$ . پایین:  $t = 0.0006$ .



شکل ۴: مثال ۲.۳ با  $N = 100$  برای  $R - R_0$ . چپ:  $t = 0.02$ . راست:  $t = 0.06$ .

مثال ۵.۳. به عنوان آخرین مثال، مدل زیر به همراه یک عبارت اصطکاک خطی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} A_t + Q_x = 0, \\ Q_t + \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{2\rho\sqrt{\pi}} A^{\frac{1}{2}} \right)_x = \frac{KA}{\rho\sqrt{\pi}} (\sqrt{A})_x - C_f \frac{Q}{A}, \end{cases} \quad (1.3)$$

که  $C_f = 8\pi\nu$  است، که در آن  $\nu$  ویسکوزیته خون است. دامنه محاسباتی این مثال، عبارت است از  $[0, 3]$  که توسط شرایط اولیه

$$A(x, 0) = \pi R_0^2, \quad Q(x, 0) = 0,$$

به همراه پارامترهای زیر کامل خواهد شد:

$$K = 10^8 \text{ Pa/m}, \quad \rho = 1060 \text{ kg/m}^3, \quad R_0 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

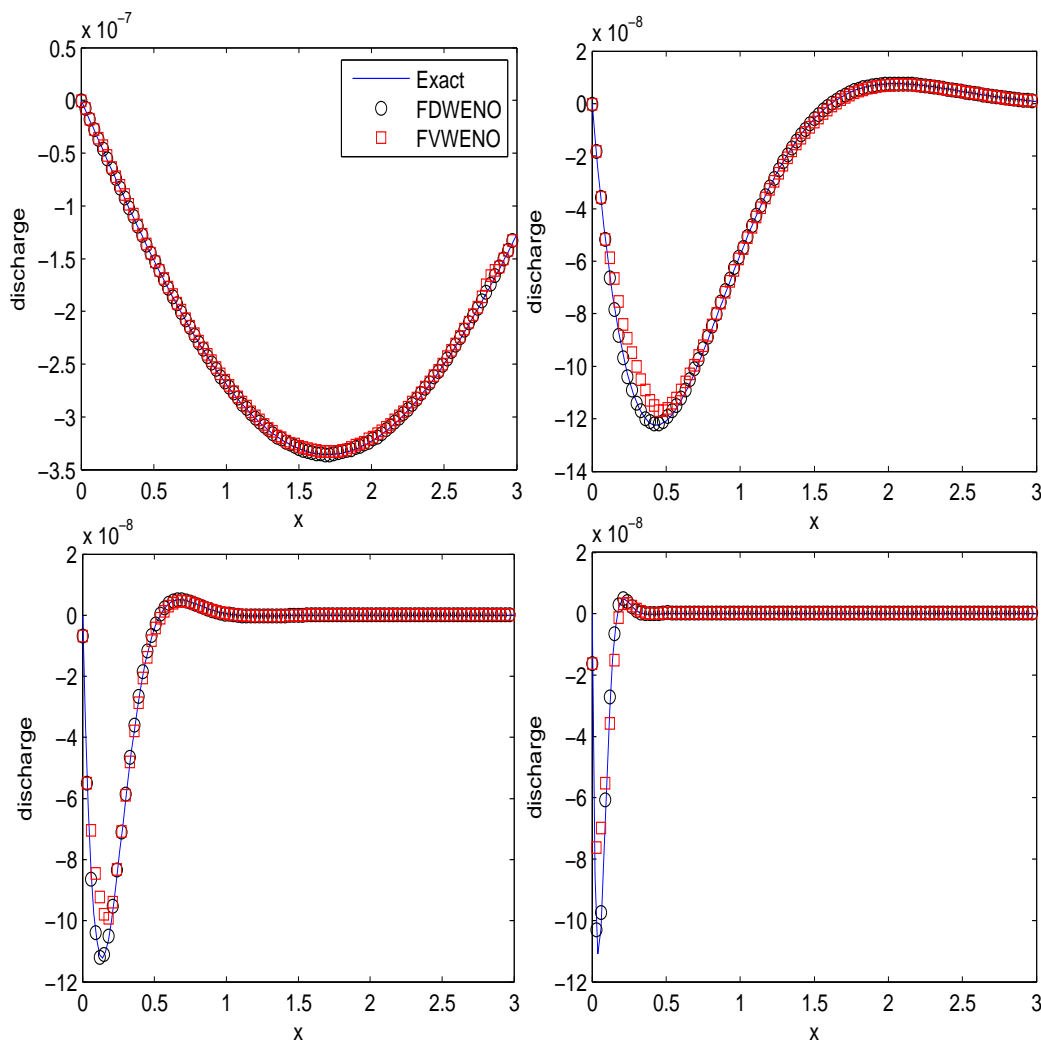
سپس، یک موج تخمیر (به تغییرات و کاهش تدریجی انرژی در دامنه مدل مشروط با عبارت اصطکاک خطی اشاره می‌کند) در دامنه به دست می‌آوریم [۶]:

$$Q(x, t) = \begin{cases} 0, & k_r x \geq \omega t, \\ Q_{\text{amp}} \sin(\omega t - k_r x) \exp(k_i x), & k_r x \leq \omega t, \end{cases} \quad (2.3)$$

با

$$\begin{aligned} k_r &= \left( \frac{\omega^4}{c_0^4} + \left( \frac{\omega C_f}{\pi R_0^2 c_0^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \cos \left( \frac{1}{2} \arctan \left( -\frac{C_f}{\pi R_0^2 \omega} \right) \right), \\ k_i &= \left( \frac{\omega^4}{c_0^4} + \left( \frac{\omega C_f}{\pi R_0^2 c_0^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \sin \left( \frac{1}{2} \arctan \left( -\frac{C_f}{\pi R_0^2 \omega} \right) \right), \\ \omega &= 4\pi s, \quad Q_{\text{amp}} = 3.45 \times 10^{-7} \text{ m}^3/s, \\ c_0 &= \sqrt{\frac{KR_0}{2\rho}}. \end{aligned}$$

خاطر نشان شود که شرایط مرزی از معادله (۲.۳) استخراج می‌گردد. نتایج عددی حاصل از روش‌های FDWENO و FVWENO به همراه جواب دقیق برای مقادیر متفاوت  $C_f$  در زمان نهایی  $t = 25s$  در شکل ۵ نشان داده شده است. عمل کرد هر دو روش قابل قبول است، اما عمل کرد روش FDWENO برای این تست در مقایسه با روش FVWENO بهتر است.



شکل ۵: مثال ۵.۳ در زمان نهایی  $t = ۲۵$  ثانیه و با  $N = ۱۰۰$  برای  $Q$ . بالا (چپ):  $C_f = ۰/۰۰۰۰۲۲$ . بالا (راست):  $C_f = ۰/۰۰۵۰۵۳$ . پایین (چپ):  $C_f = ۰/۰۰۵۰۵۳$ . پایین (راست):  $C_f = ۰/۰۵۰۵۳$ .

## ۴ نتیجه گیری

در این کار تحقیقاتی، یک روش وزن دار ضرورتاً غیرنوسانی بر پایه تفاضل متناهی (FDWENO) از مرتبه دقت پنجم و متعادل شده برای حل مدل جریان خون در شرایط شرایین ارائه شد. با کمک جریان‌های عددی متعادل شده، روش FDWENO ویژگی تعادل داشته را برای جواب‌های حالت پایدار حفظ می‌کند و در عین حال دقت مرتبه پنجم خود را در نواحی هموار به دست می‌آورد. همچنین در نواحی ناپیوسته و شاک‌دار، رفتار غیرنوسانی جعلی ندارد. مثال‌های عددی مختلفی در نظر گرفته شد تا ویژگی تعادل یافته، دقت مرتبه پنجم و جلوگیری از نوسانات جعلی را مورد بررسی قرار دهد. نتایج حاصل از این مثال‌ها، نشان داد که روش جدید معرفی شده در این کار تحقیقاتی، به خوبی عمل می‌کند.

## فهرست منابع

- [1] Abedian, R., 2022. A finite difference Hermite RBF-WENO scheme for hyperbolic conservation laws. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 94(6), pp. 583–607. doi: 10.1002/flid.5067
- [2] Abedian, R., Adibi, H. and Dehghan, M., 2014. A high-order symmetrical weighted hybrid ENO-

- flux limiter scheme for hyperbolic conservation laws. *Comput. Phys. Commun.*, 185(1), pp. 106–127. doi: 10.1016/j.cpc.2013.08.020
- [3] Cavallini, N., Caleffi, V. and Coscia, V., 2008. Finite volume and WENO scheme in one-dimensional vascular system modelling. *Comput. Math. Appl.*, 56(9), pp. 2382–2397. doi: 10.1016/j.camwa.2008.05.039
- [4] Cavallini, N. and Coscia, V., 2010. One-dimensional modelling of venous pathologies: Finite volume and WENO schemes. *R. Rannacher, A. Sequeira (eds.), Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, pp. 147-170. doi: 10.1007/978-3-642-04068-9
- [5] Delestre, O. and Lagrée, P. Y., 2013. A well-balanced finite volume scheme for blood flow simulation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 72(2), pp. 177–205. doi: 10.1002/flid.3736
- [6] Delestre, O., Lucas, C., Ksinant, P. A., Darboux, F., Laguerre, C., Vo, T. N. T., James, F. and Cordier, S., 2013. SWASHES: A compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 72(3), pp. 269–300. doi: 10.1002/flid.3741
- [7] Gottlieb, S., Shu, C.-W. and Tadmor, E., 2001. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Rev.*, 43(1), pp. 89–112. doi: 10.1137/S003614450036757X
- [8] Greenberg, J. M. and LeRoux, A. Y., 1996. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1), pp. 1–16. doi: 10.1137/0733001
- [9] Jiang, G.-S. and Shu, C.-W., 1996. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 126(1), pp. 202–228. doi: 10.1006/jcph.1996.0130
- [10] Jiang, Y., Shu, C.-W. and Zhang, M. P., 2013. An alternative formulation of finite difference weighted ENO schemes with Lax-Wendroff time discretization for conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(2), pp. A1137–A1160. doi: 10.1137/120889885
- [11] Noelle, S., Xing, Y. L. and Shu, C.-W., 2007. High-order well-balanced finite volume WENO schemes for shallow water equation with moving water. *J. Comput. Phys.*, 226(1), pp. 29–58. doi: 10.1016/j.jcp.2007.03.031
- [12] Peer, A. A. I., Dauhoo, M. Z., Gopaul, A. and Bhuruth, M., 2010. A weighted ENO-flux limiter scheme for hyperbolic conservation laws. *Int. J. Comput. Math.*, 87(15), pp. 3467–3488. doi: 10.1080/00207160903124934
- [13] Ruuth, S. J. and Hundsdorfer, W., 2005. High-order linear multistep methods with general monotonicity and boundedness properties. *J. Comput. Phys.*, 209(1), pp. 226–248. doi: 10.1016/j.jcp.2005.02.029
- [14] Xing, Y. L., Shu, C.-W. and Noelle, S., 2011. On the advantage of well-balanced schemes for moving-water equilibria of the shallow water equations. *J. Sci. Comput.*, 48(1), pp. 339–349. doi: 10.1007/s10915-010-9377-y
- [15] Yao, Z., Li, G. and Gao, J., 2017. A high order well-balanced finite volume WENO scheme for a blood flow model in arteries. *East Asian J. Applied Math.*, 7(4), pp. 852–866. doi: 10.4208/eajam.181016.300517f



## A fifth-order finite difference well-balanced WENO scheme for a blood flow model in arteries

Rooholah Abedian,<sup>(1)</sup> <sup>2</sup> Mahmood Khaksar-e Oshagh<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> School of Engineering Science, College of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 25 September 2023

Accepted: 25 December 2023

**Abstract:** In this research work, a fifth-order well-balanced weighted essentially non-oscillatory scheme based on finite difference (FDWENO) was presented to solve a blood flow model in arteries. The FD-WENO scheme preserves the balanced property for steady-state solutions while achieving fifth-order accuracy in smooth regions. Additionally, it does not exhibit spurious non-oscillatory behavior in discontinuous and shock areas. Several numerical examples were considered to investigate the balanced characteristic, fifth-order accuracy, and prevention of spurious oscillations. The results of these examples demonstrated the effectiveness of the newly developed scheme in this research.

**Keywords:** Finite difference, WENO, Well-Balanced property, Blood Flow Model.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>2</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (R. Abedian) [rabedian@ut.ac.ir](mailto:rabedian@ut.ac.ir), (M. Khaksar-e Oshagh) [m.khaksar@cfu.ac.ir](mailto:m.khaksar@cfu.ac.ir)