



یک مدل جدید همه‌گیرشناسی در زیست‌بوم با انتشار و تابع پاسخ رادیکالی

صفیه باقری‌هامانه، محمدحسین اکرمی ابرقویی، محمد حیدری، قاسم بریدلقمانی^۱

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذریناه

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۲۸

چکیده: هدف از این پژوهش مطالعه یک مدل همه‌گیرشناسی در یک زیست‌بوم با نرخ شیوع دوخطی و تابع پاسخ رادیکالی است. ابتدا نقاط تعادل و پایداری سیستم را برای مقادیر مختلف پارامترها بررسی می‌کنیم. چالش اصلی در مدل‌های جمعیت، یافتن یک روش عددی برای تقریب جواب نامنفی است. برخی از روش‌های عددی مانند روش اویلر ناکارآمدند زیرا گاهی اوقات قادر به ایجاد جواب نامنفی نیستند. تقریب‌های نامنفی حاصل از روش‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد نیز مشروط‌اند. در این مقاله، یک روش عددی را پیشنهاد می‌کنیم که پاسخ‌های قابل قبول نامشروط را ارائه می‌کند. پس از آن سازگاری روش عددی پیشنهادی را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از شبیه‌سازی عددی کارایی روش پیشنهادی را با دو روش اویلر و غیر استاندارد مقایسه می‌کنیم. در نهایت اثر رفتار گله‌ای گونه شکار را بر تراکم جمعیت گونه‌ها مورد بررسی قرار داده و برای برخی از مقادیر عددی از پارامترهای موجود در مسئله، مدل دینامیکی را تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: انتشار، تابع پاسخ رادیکالی، روش تفاضل متناهی، زیست‌بوم، همه‌گیرشناسی.

رده‌بندی ریاضی: 35B35; 65Nxx

۱ مقدمه

در دهه‌های گذشته محققان حوزه‌ی زیست‌شناسی برای تحقیق روی زیست‌بوم‌ها و بررسی رفتار گونه‌های جانوری از مدل‌سازی کمک گرفته‌اند. در اکثر زیستگاه‌ها، گونه‌های جانوری برای یافتن غذا و منطقه در رقابت هستند. یکی از روش‌های موثر در زمینه چگونگی ارتباط متقابل بین گونه‌ها و نحوه تعاملشان با یکدیگر در یک زیست‌بوم، تبدیل تعاملات بوم‌سازگان به مدل‌های ریاضی است. برای توصیف بهتر تعامل بین گونه‌های شکار و شکارچی، مدل‌های ریاضی متفاوتی می‌توان مطرح کرد. یکی از پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل شکار و شکارچی است.

^۱نویسنده مسئول مقاله

مدل شکار و شکارچی اولین بار توسط لوتکا^۲ و ولترا^۳ پیشنهاد شد [۲۴]. پس از آن سیر تکاملی این مدل‌ها و شیوع بیماری‌های همه‌گیر در سراسر جهان، مدل شکار و شکارچی با مدل بیماری، ترکیب شد [۶، ۱۹]. مدل‌های همه‌گیرشناسی در محیط زیست بیشتر در قالب معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) معرفی می‌شوند. به‌عنوان مثال رحمان و چاکراواری^۵ [۳۰] رفتار دینامیکی بیماری در گونه‌های شکار را مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که مدل پیشنهادی آنها دارای انشعاب هاپف است (برای دریافت اطلاعات بیشتر منابع [۱۴، ۲۹، ۳۵، ۳۶] را بنگرید).

در سال‌های اخیر پژوهشگران برای بررسی واقعی‌تر تعامل بین گونه‌های شکار و شکارچی، تغییرات جمعیت را وابسته به زمان و مکان در نظر گرفته‌اند، یعنی مدل‌های زیستی را توسط معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) با عبارت انتشار، مدل‌سازی می‌کنند. به‌عنوان نمونه، باته و هیلکر^۷ [۹] یک مدل با انتشار شکار و شکارچی را در نظر گرفته‌اند که یک بیماری در بین گونه شکار همه‌گیر شده‌است. آنها در مطالعه خود تاثیر مواد ساطع شده از شکار را در سرعت حمله شکارچی و همچنین انتشار بیماری بررسی می‌کنند. نویسندگان در [۷] یک مدل همه‌گیرشناسی در زیست‌بوم با نرخ محدب را مورد بررسی قرار داده و تاثیر محدب بودن تابع انتقال بیماری بر سرعت تهاجم شکارچی و تعامل با گونه شکار را مطالعه کرده‌اند. ونگ و نی^۸ [۳۸]، رفتار دینامیکی یک مدل شکار و شکارچی با انتشار را در محیط‌های بسته مطالعه کرده و از تابع لیاپانوف برای بررسی پایداری نقطه تعادل استفاده کرده‌اند (برای مطالعه بیشتر مقالات [۱۰، ۱۱، ۱۶] را ببینید).

رشد گونه‌ها، میزان مرگ‌ومیر آنها، عامل رقابت در زیستگاه، تهاجم، نرخ انتقال بیماری و تابع پاسخ، مولفه‌های مهم برای مدل‌سازی همه‌گیرشناسی در یک زیست‌بوم‌اند. یکی از مهم‌ترین معیارهای تهاجمی بودن یک گونه شکارگر، تابع پاسخ و میزان گسترش این گونه در زیستگاه است. در نتیجه در مدل‌سازی ریاضی یک زیست‌بوم، یافتن یک تابع پاسخ مناسب نقش کلیدی ایفا می‌کند. تابع پاسخ نشان‌دهنده توانایی و میزان سرعت شکارچی در به‌دام انداختن شکار است. به‌عبارت دیگر این تابع میزان اثر مصرف طعمه بر تغییر نرخ رشد شکارچی را بررسی می‌کند [۱]. پژوهشگران در مطالعات اولیه خود، تابع پاسخ را فقط وابسته به چگالی گونه شکار معرفی کردند ولی با مشاهدات و تحقیقات بیشتر مشخص شد که توابع پاسخ وابسته به چگالی هر دو گونه شکار و شکارچی، واقعی‌ترند و برای نمایش تعاملات بین آنها بهتر عمل می‌کنند. در ادامه به چند نمونه مهم از توابع پاسخ اشاره می‌کنیم [۲۸]:

• تابع پاسخ هالینگ در حالت کلی [۱۷، ۱۸، ۲۳]: $R(x) = \frac{\alpha x^\gamma}{1 + \beta x^\rho}$, $\gamma, \rho \geq 0$

• تابع پاسخ آی‌ولف [۲۱، ۲۲]: $R(x) = \alpha(1 - e^{-\frac{x}{\beta}})$

• تابع پاسخ مایکلیس-منتن [۲۰]: $R(x, y) = \frac{\alpha x}{\beta y + x}$

• تابع پاسخ بدینگتون-دی‌آنجلیس [۱۵، ۳۲]: $R(x, y) = \frac{\alpha x}{\beta + \sigma y + x}$

با مطالعه بیشتر زیستگاه‌های جانوری و ارتباط متقابل بین گونه‌ها، می‌توان توابع پاسخی مطرح کرد که رفتارهای خاص آنها را در نظر بگیرد. به‌عنوان نمونه باید برای رفتارهای دفاعی چون گریز به پناهگاه‌ها، دفع دشمن با ساطع کردن بو و یا دفاع گله‌ای شکار، توابع پاسخ متفاوتی را در نظر گرفت. یکی از این توابع پاسخ، تابع پاسخ رادیکالی است. پال^۹ و همکاران [۲۸] روی یک مدل شکار و شکارچی با تابع پاسخ رادیکالی تحقیق کرده و در مورد پایداری محلی و سراسری سیستم مطالعه کرده‌اند. آنها وجود دور حدی را در مدل پیشنهادی خود مورد بررسی قرار داده‌اند. بانرجی^{۱۰} و همکاران [۶] نیز در مطالعه خود یک مدل شکار و شکارچی که بیماری در جمعیت شکار انتشار یافته، تجزیه و تحلیل کرده و تعامل شکار و شکارچی را با کمک تابع پاسخ رادیکالی مدل‌سازی کرده و در مورد نقاط تعادل، انشعاب و دور حدی سیستم تحقیق کرده‌اند. همچنین جیملی^{۱۱} و همکاران [۱۳] در مقاله خود مدلی را در حوزه‌ی زیست‌بوم معرفی کرده‌اند که بین گونه شکارچی بیماری سرایت کرده و گونه شکار در هنگام حمله شکارچیان از خود دفاع گروهی دارند. آنها در تحقیق خود وجود انشعاب‌های متفاوت، دور حدی و پایداری نقاط تعادل را بررسی کرده‌اند (برای مطالعه بیشتر به [۸، ۲۵، ۳۱] مراجعه نمایید).

در این مطالعه یک مدل بیماری همه‌گیر با مدل شکار و شکارچی ترکیب کرده و آنرا از دید متفاوتی بررسی می‌کنیم. برای گروه شکار رفتار گله‌ای در نظر می‌گیریم یعنی جمعیت ضعیف‌تر و بیمار، در حصار دفاعی گروه قوی‌تر قرار می‌گیرند. بنابراین شکارهایی که در محیط بیرونی گله قرار دارند در معرض خطر شکار شدن و تعامل با شکارچی هستند. به‌عبارت دیگر فقط شکارهای سالم در لبه گله مصرف می‌شوند

^۲Lotka

^۳Volterra

^۴Ordinary differential equations

^۵Rahman and Chakravarty

^۶Partial differential equations

^۷Bate and Hilker

^۸Wang and Nie

^۹Pal

^{۱۰}Banerjee

^{۱۱}Gimmelli

در حالی که شکارهای آلوده در پشت گله پناه می‌گیرند. با توجه به این موضوع تابع پاسخ را به صورت رادیکالی در نظر می‌گیریم تا بیانگر دفاع گروهی گونه شکار باشد [۵، ۶]. مدل پیشنهادی خود را با استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه می‌کنیم. یافتن پاسخ تحلیلی برای اکثر معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار دشوار بوده و یا امکان‌پذیر نیست. در ادامه با توجه به اینکه، از یک طرف اکثر مدل‌های همه‌گیرشناسی در محیط زیست به شکل غیرخطی هستند و از طرف دیگر به دلیل اهمیت ویژه پیش‌بینی رفتار بیماری در برنامه‌ریزی و خط مشی سیاسی، تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی مربوط به بیماری‌های عفونی در بین جمعیت‌ها نقش کلیدی دارد، اکثر پژوهشگران برای حل این گونه مدل‌ها، روش‌های عددی را پیشنهاد می‌دهند. گاهی روش‌های عددی که برای حل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی پیشنهاد می‌شوند، پاسخ‌های غیرقابل قبولی ایجاد می‌کنند. مثلاً پاسخ‌های منفی در مدل‌های جمعیتی باعث تجزیه و تحلیل نادرست از رفتار جواب‌های سیستم می‌شوند در حالی که ممکن است خود سیستم رفتار آشوبناک نداشته باشد [۳، ۳۷]. بنابراین در این مقاله جهت رفع معایب اعلام شده، روش عددی پیشنهاد می‌دهیم که قادر به یافتن پاسخ‌های نامنفی نامشروط بوده و می‌تواند کارایی لازم را در جهت تقریب مناسب داشته باشد. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، به معرفی مدل پیشنهادی می‌پردازیم. پایداری نقاط تعادل مدل با جمله انتشار و بدون انتشار در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته است. بخش ۴، توضیح روش‌های عددی است. سازگاری روش عددی پیشنهادی در بخش ۵ تجزیه و تحلیل شده است. در بخش ۶، با شبیه‌سازی عددی، چگونگی تعامل بین دو گونه شکار و شکارچی را توصیف کرده‌ایم. در نهایت، نتیجه‌گیری و نتایج در بخش آخر خلاصه شده است.

۲ معرفی مدل

در این بخش یک مدل شکار و شکارچی همراه با شیوع بیماری در گونه شکار را به شرح زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \partial_t S = d_s \partial_x^2 S + rS - \sigma S - \beta SI - \alpha_s \sqrt{S}P, \\ \partial_t I = d_i \partial_x^2 I - \mu I + \beta SI - \alpha_i IP, \\ \partial_t P = d_p \partial_x^2 P - dP + e(\alpha_s \sqrt{S} + \alpha_i I)P. \end{cases} \quad (1.2)$$

این مسئله با شرایط اولیه

$$S(x, 0) = f_1(x), \quad I(x, 0) = f_2(x), \quad P(x, 0) = f_3(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.2)$$

که در آن توابع $f_i(x)$ ، برای $i = 1, 2, 3$ معلومند و شرایط مرزی همگن (نویمان) به صورت

$$\begin{cases} \partial_t S(0, t) = \partial_t S(L, t) = 0, \\ \partial_t I(0, t) = \partial_t I(L, t) = 0, \\ \partial_t P(0, t) = \partial_t P(L, t) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

در نظر گرفته می‌شوند. توابع مجهول $S(x, t)$ ، $I(x, t)$ و $P(x, t)$ به ترتیب تراکم شکار حساس، تراکم شکار بیمار و تراکم شکارچی را نمایش می‌دهند. پارامترهای مدل پیشنهادی در جدول ۱ معرفی شده‌اند.

جدول ۱: پارامترهای مدل (۱.۲).

پارامتر	شرح
r	نرخ رشد گونه شکار
σ	میزان مرگ و میر طبیعی طعمه
μ	نرخ مرگ و میر گونه شکار (طبیعی یا بر اثر بیماری)
d	نرخ مرگ و میر طبیعی گونه شکارچی
α_s	نرخ حمله شکارچی به شکار غیر آلوده
α_i	نرخ حمله شکارچی به شکار بیمار
e	نرخ تغییر تراکم شکارچیان بر اثر مصرف طعمه
d_s	ضریب انتشار طعمه سالم
d_i	ضریب انتشار طعمه بیمار
d_p	ضریب انتشار شکارچی
β	میزان انتقال بیماری از یک تماس

خاطر نشان شود که تمام پارامترهای مدل (۱.۲) را مثبت فرض می‌کنیم.

۳ نقاط تعادل و بررسی پایداری

در این بخش ابتدا نقاط تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) را محاسبه کرده و سپس در مورد پایداری آنها بحث می‌کنیم. نقاط تعادل دستگاه (۱.۲) با حل دستگاه معادلات جبری زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} rS - \sigma S - \beta SI - \alpha_s \sqrt{S}P = 0, \\ -\mu I + \beta SI - \alpha_i IP = 0, \\ -dP + e(\alpha_s \sqrt{S} + \alpha_i I)P = 0. \end{cases}$$

نقاط تعادل قابل قبول این سیستم عبارتند از نقطه تعادل بدیهی $E_1 = (0, 0, 0)$ ، نقطه تعادل فقط شکار $E_2 = (\frac{r-\sigma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}, 0)$ ، نقطه تعادل عاری از بیماری $E_3 = (\frac{d}{\alpha_s e}, 0, \frac{(r-\sigma)d}{\alpha_s e})$ و نقطه تعادل بومی $E_4 = (S^*, I^*, P^*)$ که در آن

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\mu e^2 \alpha_s^2}{(e \alpha_i (r - \sigma) - \beta d)^2} = \frac{\mu^2 e^2 \alpha_s^2 \alpha_i^2 I^{*2}}{\beta^2 d^2 (1 - \frac{1}{R_0})^2}, \\ I^* &= \frac{\mu e^2 \alpha_s^2 + d e \alpha_i (r - \sigma) - \beta d^2}{(\beta d - e \alpha_i (r - \sigma)) e \alpha_i} = \frac{\beta d^2 (1 - \frac{1}{R_0})}{(\beta d - e \alpha_i (r - \sigma)) e \alpha_i}, \\ P^* &= \mu \frac{e \alpha_i (r - \sigma) (e \alpha_i (r - \sigma) - \beta d) + \beta (\mu e^2 \alpha_s^2 + e \alpha_i d (r - \sigma) - \beta d^2)}{(\beta d - e \alpha_i (r - \sigma))^2} = \frac{e \mu (\beta I^* - (r - \sigma))}{\beta d - e \alpha_i (r - \sigma)}. \end{aligned}$$

در این جا برای $d_s = d_i = d_p = 0$ مقدار $R_0 = \frac{\beta d^2}{\mu e^2 \alpha_s^2 + d e \alpha_i (r - \sigma)}$ را عدد باز تولید بیماری می‌نامند. اگر $R_0 < 1$ زیستگاه عاری از بیماری بوده و چنان چه $R_0 > 1$ ، بیماری بومی خواهد شد. در مورد نقاط تعادل، نتایج را می‌توان به صورت قضیه زیر خلاصه کرد:

قضیه ۱.۳. با فرض مثبت بودن تمام پارامترهای دستگاه (۱.۲) داریم:

• به ازای تمام مقادیر پارامترها، نقطه تعادل بدیهی E_1 وجود دارد.

• اگر $r - \sigma > 0$ ، نقاط تعادل E_2 و E_3 وجود دارند.

• اگر $R_0 > 1$ ، $r - \sigma > \frac{\beta d}{e \alpha_i}$ و $r - \sigma > \beta I^*$ آن گاه E_4 وجود خواهد داشت.

در ادامه به بررسی پایداری سیستم دینامیکی (۱.۲) می‌پردازیم. ابتدا پایداری دینامیکی نقاط تعادل در حالت بدون انتشار را بررسی کرده و سپس با استفاده از سری فوریه جواب، شرایط پایداری سیستم دینامیکی با انتشار را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۳ بررسی پایداری مدل بدون انتشار

برای بررسی پایداری نقاط تعادل در حالت بدون انتشار، ماتریس ژاکوبی مدل (۱.۲) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$J(S, I, P) = \begin{bmatrix} r - \sigma - \beta I - \frac{1}{2} \frac{\alpha_s P}{\sqrt{S}} & -\beta S & -\alpha_s \sqrt{S} \\ \beta I & -\alpha_i P + \beta S - \mu & -\alpha_i I \\ \frac{1}{2} \frac{e \alpha_s P}{\sqrt{S}} & e \alpha_i P & -d + e(\alpha_s \sqrt{S} + \alpha_i I) \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

سپس پایداری هر نقطه را با کمک مقادیر ویژه ماتریس J بررسی می‌کنیم.

به دلیل منفرد بودن ماتریس (۱.۳) در نقطه تعادل بدیهی، رفتار حدی آن را در نزدیکی نقطه تعادل E_1 مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت ماتریس ژاکوبی (۱.۳)، به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix}.$$

با توجه به مقادیر ویژه $J(E_1)$ ، می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۲.۳. نقطه تعادل بدیهی E_1 ، برای $r < \sigma$ و $r > \sigma$ ، به ترتیب پایدار و ناپایدار (نقطه زین) است.

در ادامه به پایداری نقطه تعادل فقط شکار می‌پردازیم. برای ساده‌تر شدن تحلیل پایداری، معادله مشخصه ماتریس ژاکوبی (۱.۳) را در این نقطه به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda^3 - \frac{((r-\sigma)\beta - \mu(r-\sigma) + \eta)\lambda^2}{\beta} + \frac{(r-\sigma)(\eta(\beta - \mu) + \mu^2\beta)\lambda}{\beta^2} - \frac{\eta(r-\sigma)\mu^2}{\beta^2} = 0, \quad (2.3)$$

که در آن $\eta = \alpha_s e^{\sqrt{\mu\beta}} + \alpha_i e^{(r-\sigma)} - \beta d$ است. ریشه‌های این معادله عبارتند از

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad \lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \lambda_3 = \frac{\eta}{\beta},$$

که در آن $a = (r-\sigma)(\beta - \mu)$ و $b = 4\beta(r-\sigma)\mu^2$ برای $a^2 \geq b$ و λ_1 و λ_2 هر دو حقیقی مقدار و علامت آنها وابسته به علامت a است. به عبارت دیگر با در نظر داشتن شرط وجود نقطه تعادل E_1 در قضیه ۲.۳، علامت λ_1 و λ_2 بستگی به مقادیر μ و β دارد. اگر $\beta > \mu$ آن‌گاه λ_1 و λ_2 هر دو مثبت و اگر $\beta < \mu$ آن‌گاه هر دو منفی‌اند. در مقابل برای $b < a^2$ ، علامت قسمت حقیقی λ_1 و λ_2 نیز بستگی به مقادیر پارامترهای μ و β دارد. با توجه به ریشه‌های معادله (۲.۳)، می‌توان نتایج را به صورت قضیه زیر خلاصه کرد:

قضیه ۳.۳. نقطه تعادل E_1

- با شرط $\eta > 0$ ، برای $\beta < \mu$ و $\beta > \mu$ به ترتیب نقطه زین و ناپایدار است.
- با شرط $\eta < 0$ ، برای $\beta < \mu$ و $\beta > \mu$ به ترتیب نقطه زین و پایدار است.

پایداری مدل در نقطه تعادل عاری از بیماری برای بررسی رفتار بیماری واگیردار در یک زیست‌بوم دارای اهمیت ویژه‌ای است. برای این منظور با محاسبه ماتریس ژاکوبی (۱.۳) در نقطه تعادل E_3 داریم:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} \frac{r-\sigma}{\gamma} & -\frac{\beta d^\lambda}{\alpha_s^\lambda e^\lambda} & -\frac{d}{e} \\ 0 & \frac{(R_0-1)\beta d^\lambda}{R_0 \alpha_s^\lambda e^\lambda} & 0 \\ \frac{1}{\gamma} e^{(r-\sigma)} & \frac{\alpha_i d(r-\sigma)}{\alpha_s^\lambda} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

ماتریس (۳.۳) دارای مقادیر ویژه

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4} \left(r - \sigma + \sqrt{(r-\sigma)(r-\sigma - \lambda d)} \right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4} \left(r - \sigma - \sqrt{(r-\sigma)(r-\sigma - \lambda d)} \right), \\ \lambda_3 &= \frac{(R_0 - 1)\beta d^\lambda}{R_0 \alpha_s^\lambda e^\lambda}, \end{aligned}$$

است. با توجه به شرط وجود نقطه تعادل E_3 در قضیه ۳.۳، قسمت‌های حقیقی λ_1 و λ_2 ، همواره مثبت‌اند پس جواب‌های دستگاه (۱.۲) در راستای بردارهای ویژه نظیر λ_1 و λ_2 ، ناپایدارند. اگر $R_0 < 1$ ، جواب‌های دستگاه در راستای بردار ویژه نظیر λ_3 ، پایدارند. در نتیجه قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۴.۳. نقطه تعادل عاری از بیماری برای $R_0 > 1$ ، ناپایدار است و برای $R_0 < 1$ ، یک نقطه زین است.

مشابه روند قبل برای بررسی پایداری نقطه تعادل بومی E_4 ، ابتدا چند جمله‌ای مشخصه ماتریس ژاکوبی (۱.۳) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda^3 + v_2 \lambda^2 + v_1 \lambda + v_0 = 0,$$

که در آن

$$v_0 = \frac{\mu k}{2\alpha_i e} + \frac{\mu^2 k e \alpha_s^2}{2\alpha_i h^2} + \frac{2\mu^2 k e^2 \alpha_s^2 \beta^2}{2\alpha_i h^4} - \frac{2\mu^2 k e^3 \alpha_s^2 \beta}{2\alpha_i h^4} + \frac{\mu^2 k e \alpha_s^2 \beta d}{\alpha_i h^3} - \frac{\mu^2 k e^2 \alpha_s^2 \beta (r - \sigma)}{h^3} - \frac{\mu k (r - \sigma)}{h} + \frac{\mu^2 k^2}{\alpha_i h^2 e} - \frac{2\mu^2 k e \alpha_s^2 \beta}{\alpha_i h^2},$$

$$v_1 = d(r - \sigma) - \frac{k(r - \sigma)}{h} - \frac{k\mu}{h} + \frac{dk\mu}{h\alpha_i e} - \frac{k^2\mu}{h^2\alpha_i e} + \frac{e^2\alpha_s^2\beta k\mu^2}{h^3} - \frac{hd}{2\alpha_i e} + \frac{e^2\alpha_s^2(r - \sigma)\mu}{h} - \frac{e\alpha_s^2\beta d\mu}{2h\alpha_i} + \frac{e\alpha_s^2\beta k\mu^2}{h^2\alpha_i} - \frac{e\alpha_s^2\beta k\mu}{2h^2\alpha_i} - \frac{e\alpha_s^2 k\mu^2}{h^2\alpha_i} + \frac{k}{2\alpha_i e},$$

$$v_2 = d - (r - \sigma) - \frac{k}{h} - \frac{h}{2\alpha_i e} + \frac{k\mu}{h\alpha_i e} - \frac{e^2\alpha_s^2\mu}{h} + \frac{e\alpha_s^2\beta\mu}{2h\alpha_i},$$

$$k = \mu e^2\alpha_s^2 + de\alpha_i(r - \sigma) - \beta d^2,$$

$$h = e\alpha_i(r - \sigma) - \beta d.$$

به دلیل پیچیدگی ماتریس ژاکوبی و تعداد زیاد پارامترهای موجود در آن، دستیابی به شرایط صریح برای تحلیل پایداری نقطه تعادل E_4 امری دشوار است. با این حال می توان با انتخاب مقادیر عددی متفاوت برای پارامترها، نوع پایداری را در حالت های خاص بررسی کرد. در این جا با در نظر گرفتن دو دسته پارامتر به بررسی پایداری نقطه تعادل بومی می پردازیم.

۱. با انتخاب مقادیر

$$\mu = 0.2, r = 0.35, \beta = 0.9, \alpha_s = 1, \alpha_i = 1, d = 0.5, e = 0.7, \sigma = 0.1,$$

نقطه تعادل مثبت

$$E_4 = (0.2591735537, 0.2051948052, 0.3325619835),$$

به دست می آید و مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی (۱.۳) در E_4 به شرح زیر محاسبه می شوند:

$$\lambda_1 = 0.24118610771324465 + 0.244259523290692I,$$

$$\lambda_2 = 0.24118610771324465 - 0.244259523290692I,$$

$$\lambda_3 = -0.15574883952648933.$$

همان طور که ملاحظه می شود نقطه بومی E_4 ، نقطه زین بوده و جواب های دستگاه (۱.۲) در راستای بردار ویژه نظیر λ_3 پایدار هستند.

۲. با انتخاب مقادیر

$$\mu = 0.2, r = 0.95, \beta = 0.9, \alpha_s = 1, \alpha_i = 1, d = 0.5, e = 0.7, \sigma = 0.1,$$

نقطه تعادل مثبت

$$E_4 = (0.4851365065, 0.177683014, 0.2366228559),$$

به دست می آید و مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی (۱.۳) در E_4 به شرح زیر محاسبه می شوند:

$$\lambda_1 = 0.5907994805556119,$$

$$\lambda_2 = 0.1377743075125088,$$

$$\lambda_3 = 0.15573333211879304.$$

با توجه مثبت بودن تمام مقادیر ویژه این ماتریس، جواب های دستگاه (۱.۲) در این نقطه ناپایدار هستند.

۲.۳ بررسی پایداری مدل با انتشار

در این بخش برای بررسی پایداری مدل با انتشار (۱.۲)، با الهام از روند مطرح شده در [۲]، ابتدا سیستم خطی زیر را حول نقطه تعادل (S^*, I^*, P^*) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \partial_t S = d_s \partial_x^2 S + a_{11} S_1 + a_{12} I_1 + a_{13} P_1, \\ \partial_t I = d_i \partial_x^2 I + a_{21} S_1 + a_{22} I_1 + a_{23} P_1, \\ \partial_t P = d_p \partial_x^2 P + a_{31} S_1 + a_{32} I_1 + a_{33} P_1. \end{cases} \quad (۴.۳)$$

فرض کنیم

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= \sum_k S_k e^{\lambda t} \cos(kx), \\ I_1(x, t) &= \sum_k I_k e^{\lambda t} \cos(kx), \\ P_1(x, t) &= \sum_k P_k e^{\lambda t} \cos(kx), \end{aligned}$$

بسط سری‌های فوریه توابع پاسخ دستگاه (۴.۳) هستند. در این جا $k = \frac{n\pi}{\gamma}$ (n یک عدد صحیح مثبت)، عدد موج است. حال با قرار دادن $S_1(x, t)$ ، $I_1(x, t)$ و $P_1(x, t)$ در (۴.۳)، داریم:

$$\begin{cases} \sum_k (a_{11} - \tilde{d}_s k^2 - \lambda) S_k + \sum_k a_{12} I_k + \sum_k a_{13} P_k = 0, \\ \sum_k a_{21} S_k + \sum_k (a_{22} - \tilde{d}_i k^2 - \lambda) I_k + \sum_k a_{23} P_k = 0, \\ \sum_k a_{31} S_k + \sum_k a_{32} I_k + \sum_k (a_{33} - d_p k^2 - \lambda) P_k = 0. \end{cases} \quad (۵.۳)$$

اکنون با مقایسه ماتریس ژاکوبی دستگاه‌های (۴.۳) و (۵.۳)، می‌توان مقادیر a_{mn} برای $m, n = 1, 2, 3$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\beta I^* + r - \sigma - \frac{a_s P^*}{\sqrt{s}}, & a_{12} &= -\beta S^*, & a_{13} &= \alpha_s \sqrt{S^*}, \\ a_{21} &= \beta I^*, & a_{22} &= -\alpha_i P^* + \beta S^* - \mu, & a_{23} &= -\alpha_i I^*, \\ a_{31} &= \frac{P^* e \alpha_s}{\sqrt{S^*}}, & a_{32} &= P^* e \alpha_i, & a_{33} &= -d + e(\alpha_s \sqrt{S^*} + \alpha_i I^*). \end{aligned}$$

در ادامه برای به دست آوردن شرایط پایداری از معیار پایداری روث-هورویتز استفاده می‌کنیم [۳۳]. این معیار را برای چند جمله‌ای مشخصه دستگاه (۵.۳) در نظر می‌گیریم. این چند جمله‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda^3 + \omega_2(k) \lambda^2 + \omega_1(k) \lambda + \omega_0(k) = 0,$$

که در آن

$$\omega_2(k) = (d_i + d_p + d_s) k^2 - a_{22} - a_{33} - a_{11},$$

$$\omega_1(k) = [(d_p + d_s) d_i + d_p d_s] k^4 + [(2d_p + 2d_s) d_i + (-a_{33} - a_{11}) d_i + (-a_{22} - a_{11}) d_p - d_s (a_{22} + a_{33})] k^2 + (a_{22} + a_{33}) a_{11} - a_{12} a_{21} + a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} - a_{13} a_{31},$$

$$\omega_0(k) = k^6 d_i d_p d_s + [(-a_{11} d_p - a_{33} d_s) d_i - a_{22} d_p d_s] k^4 + [(a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) d_i + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) d_p + d_s (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32})] k^2 + (-a_{22} a_{33} + a_{23} a_{32}) a_{11} - a_{12} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{23} a_{31}.$$

در مورد پایداری نقطه تعادل دستگاه (۱.۲) قضیه زیر را داریم:

قضیه ۵.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل با انتشار (۱.۲) در نقطه تعادل (S^*, I^*, P^*) پایدار است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \omega_2(k) > 0, \\ \omega_0(k) > 0, \\ \omega_2(k)\omega_1(k) - \omega_0(k) > 0. \end{cases} \quad (۶.۳)$$

با توجه به تعداد زیاد پارامترهای موجود در (۶.۳)، یافتن شرایط صریح برای تحلیل پایداری نقاط تعادل، امری دشوار است. با این حال می توان با انتخاب مقادیر عددی برای پارامترها، نوع پایداری نقاط تعادل را در حالت خاص بررسی کرد. با انتخاب مقادیر

$$\mu = 0.2, r = 0.35, \beta = 0.8, \alpha_s = 1, \alpha_i = 1, d = 0.5, e = 0.8, \sigma = 0.1,$$

و در نظر گرفتن رابطه (۶.۳)، پایداری نقاط تعادل سیستم (۱.۲) را بررسی کرده ایم و نتایج در جداول ۲ و ۳ نمایش داده شده است.

جدول ۲: پایداری نقطه تعادل (N^*, I^*, P^*) در حالت بدون انتشار $(k = 0)$.

پایداری	$\omega_1\omega_2 - \omega_0$	ω_0	ω_2	(N^*, I^*, P^*)
زین	-0.0875	-0.250	0.45	$E_1 = (0, 0, 0)$
غیرهذلولوی	0	-0.01221380455	-0.0244276091	$E_2 = (N^*, I^*, 0)$
ناپایدار	-0.0988435808	-0.0050382653	-0.02056122448	$E_3 = (N^*, 0, P^*)$
زین	-0.02881484676	0.009382998822	-0.03266233759	$E_4 = (N^*, I^*, P^*)$

جدول ۳: پایداری نقطه تعادل (N^*, I^*, P^*) در حالت با انتشار $(k^2 > 0)$.

پایداری	$\omega_1\omega_2 - \omega_0$	ω_0	ω_2	n_2	n_1	(N^*, I^*, P^*)
پایدار	3.936653656	0.2741035113	2.448594891	1	1	$E_1 = (0, 0, 0)$
پایدار	1.879426338	0.05757861053	1.974167282	1	1	$E_2 = (N^*, I^*, 0)$
زین	1.447495021	-0.04940367964	1.7929812646	1	1	$E_3 = (N^*, 0, P^*)$
پایدار	1.897962827	0.06094086751	1.965932553	1	1	$E_4 = (N^*, I^*, P^*)$

تا این جا به بررسی دینامیک دستگاه (۱.۲) پرداختیم. با توجه به اینکه یافتن جواب تحلیلی مدل (۱.۲) میسر نیست. در ادامه روش عددی برای حل این دستگاه ارائه می دهیم.

۴ شرح روش عددی

استفاده از روش های عددی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل جزئی به ویژه در حالت غیرخطی همواره امری راهگشا در جهت تحلیل رفتار پدیده ها و پیش بینی آنها در آینده است. یکی از پرکاربردترین روش عددی برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی، روش های تفاضل متناهی است که تاریخچه طولانی دارد. در این دسته از روش ها با استفاده از تقریب های مشتق، معادلات حاکم در حالت پیوسته به یک دسته معادلات تفاضلی تبدیل می شوند.

در این بخش برای تجزیه و تحلیل رفتار دستگاه (۱.۲)، روی ناحیه حل مسئله $\Omega = [0, L] \times [0, T]$ ، جواب های سیستم را به صورت تقریبی با استفاده از روش تفاضل متناهی محاسبه می کنیم. برای این منظور ابتدا ناحیه حل مسئله Ω ، را به صورت زیر افراز می کنیم:

$$\Omega_h = \{x_i : x_i = ih, 0 \leq i \leq M, M \in \mathbb{N}, h = \frac{L}{M}\}, \quad (۱.۴)$$

$$\Omega_\tau = \{t_n : t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N, N \in \mathbb{N}, \tau = \frac{T}{N}\}. \quad (۲.۴)$$

سپس تقریب‌های مربوط به مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به زمان و مکان و تقریب مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به مکان را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه U_i^n تقریبی از $U(x_i, t_n)$ است، از نمادهای

$$\delta_\tau U_i^n = \frac{1}{\tau} [U_i^{n+1} - U_i^n], \quad (3.4)$$

$$\tilde{\delta}_h U_i^n = \frac{1}{2h} [U_{i+1}^n - U_{i-1}^n], \quad (4.4)$$

$$\Delta_h U_i^n = \frac{1}{h^2} [U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n], \quad (5.4)$$

برای سهولت نشان دادن روش استفاده می‌کنیم. ابتدا روش اویلر پیشرو و روش تفاضل متناهی غیراستاندارد را برای تقریب جواب دستگاه (۱.۲) به کار می‌گیریم. در ادامه با توجه به ماهیت مدل‌های جمعیتی، به ارائه یک روش تفاضلی کارآمد می‌پردازیم به طوری که انتظار این دسته از مدل‌ها را، از جواب تقریبی برآورده سازد.

۱.۴ روش اویلر پیشرو

برای پیاده‌سازی روش اویلر پیشرو (FE-FDM¹²)، ابتدا با جایگذاری نقاط شبکه‌ای (۱.۴) و (۲.۴) در (۱.۲) و استفاده از فرمول‌های (۳.۴) و (۵.۴)، دسته معادلات تفاضلی زیر برای $i = 0, 1, 2, \dots, M$ و $n = 1, 2, 3, \dots, N$ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \delta_\tau S_i^n = d_s \Delta_h S_i^n + r S_i^n - \sigma S_i^n - \beta S_i^n I_i^n - \alpha_s \sqrt{S_i^n} P_i^n, \\ \delta_\tau I_i^n = d_i \Delta_h I_i^n - \mu I_i^n + \beta S_i^n I_i^n - \alpha_i I_i^n P_i^n, \\ \delta_\tau P_i^n = d_p \Delta_h P_i^n - d P_i^n + e(\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n. \end{cases} \quad (6.4)$$

در ادامه با بازنویسی (۶.۴)، می‌توان رابطه صریح دوترازی زیر را برای یافتن جواب‌های تقریبی (۱.۲) به دست آورد:

$$\begin{cases} S_i^{n+1} = (1 - 2\gamma_s + \tau r - \tau \sigma) S_i^n + \gamma_s (S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) - \tau [\beta S_i^n I_i^n + \alpha_s \sqrt{S_i^n} P_i^n], \\ I_i^{n+1} = (1 - 2\gamma_i - \tau \mu) I_i^n + \gamma_i (I_{i+1}^n + I_{i-1}^n) + \tau [\beta S_i^n I_i^n - \alpha_i I_i^n P_i^n], \\ P_i^{n+1} = (1 - 2\gamma_p - \tau d) P_i^n + \gamma_p (P_{i+1}^n + P_{i-1}^n) + e\tau (\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n, \end{cases} \quad (7.4)$$

که در آن

$$\gamma_s = \frac{\tau d_s}{h^2}, \quad \gamma_i = \frac{\tau d_i}{h^2}, \quad \gamma_p = \frac{\tau d_p}{h^2}. \quad (8.4)$$

با توجه به شرایط اولیه (۲.۲)، مقادیر آغازین از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} S_i^\circ = f_1(x_i), \\ I_i^\circ = f_2(x_i), \\ P_i^\circ = f_3(x_i). \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (9.4)$$

هم‌چنین با استفاده از شرایط مرزی (۳.۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \partial_t S(x_0, t_n) = \partial_t S(x_M, t_n) = 0, \\ \partial_t I(x_0, t_n) = \partial_t I(x_M, t_n) = 0, \\ \partial_t P(x_0, t_n) = \partial_t P(x_M, t_n) = 0. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (10.4)$$

¹²Forward Euler finite difference method

با استفاده از (۴.۴) و (۱۰.۴) می توان مقادیر مرزی مورد نیاز برای محاسبه (۷.۴) به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} S_1^n = S_{-1}^n, & S_{M+1}^n = S_{M-1}^n, \\ I_1^n = I_{-1}^n, & I_{M+1}^n = I_{M-1}^n, \\ P_1^n = P_{-1}^n, & P_{M+1}^n = P_{M-1}^n. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (11.4)$$

در نظر داشته باشید که در روش اویلر کنترل مثبت بودن جوابها بسیار دشوار است. این موضوع زمانی حادث می شود که مسئله روی بازه زمانی بزرگ مورد بررسی قرار بگیرد.

۲.۴ روش تفاضل متناهی غیراستاندارد

در این بخش، با توجه به طرح پیشنهادی میکنز [۲۶، ۲۷]، روش تفاضل متناهی غیراستاندارد (NS-FDM^{۱۳}) را به شرح زیر بر روی مدل (۱.۲) پیاده سازی می کنیم:

$$\begin{cases} \delta_\tau S_i^n = d_s \Delta_h S_i^n + r S_i^n - \sigma S_i^{n+1} - \beta S_i^{n+1} I_i^n - \alpha_s \frac{S_i^{n+1}}{\sqrt{S_i^n}} P_i^n, \\ \delta_\tau I_i^n = d_i \Delta_h I_i^n - \mu I_i^{n+1} + \beta S_i^n I_i^n - \alpha_i I_i^{n+1} P_i^n, \\ \delta_\tau P_i^n = d_p \Delta_h P_i^n - d P_i^{n+1} + e(\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n, \end{cases} \quad (12.4)$$

که در آن $n = 1, 2, 3, \dots, N$ و $i = 0, 1, 2, \dots, M$ با بازنویسی (۱۲.۴) به فرمول های صریح دوترازی زیر می رسمیم:

$$\begin{cases} S_i^{n+1} = \frac{1}{AN_s} [(1 - 2\gamma_s) S_i^n + r\tau S_i^n + \gamma_s (S_{i+1}^n + S_{i-1}^n)], \\ I_i^{n+1} = \frac{1}{AN_i} [(1 - 2\gamma_i) I_i^n + \gamma_i (I_{i+1}^n + I_{i-1}^n) + \tau\beta S_i^n I_i^n], \\ P_i^{n+1} = \frac{1}{AN_p} [(1 - 2\gamma_p) P_i^n + \gamma_p (P_{i+1}^n + P_{i-1}^n) + e\tau(\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n], \end{cases} \quad (13.4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} AN_s &= 1 + \tau\beta I_i^n + \tau\sigma + \tau\alpha_s \frac{1}{\sqrt{S_i^n}} P_i^n, \\ AN_i &= 1 + \tau\mu + \tau\alpha_i P_i^n, \\ AN_p &= 1 + \tau d. \end{aligned}$$

مقادیر آغازین و مقادیر مرزی مورد نیاز در جهت محاسبه رابطه (۱۳.۴) مشابه مقادیر آغازین (۹.۴) و مرزی (۱۱.۴) در روش اویلر پیشرو هستند. توجه داریم که جواب های تقریبی به دست آمده از روش تفاضل متناهی غیراستاندارد (۱۳.۴) مثبت اند هرگاه

$$\begin{cases} 1 - 2\gamma_s > 0, \\ 1 - 2\gamma_i > 0, \\ 1 - 2\gamma_p > 0, \end{cases} \quad (14.4)$$

که در آن $\gamma_s, \gamma_i, \gamma_p$ در رابطه (۸.۴) معرفی شده اند. بنابراین برخلاف روش اویلر در روش غیراستاندارد میکنز می توان به صورت مشروط جواب های تقریبی مثبت را برای مسئله به دست آورد.

۳.۴ طرح پیشنهادی

با توجه به ماهیت مدل های جمعیتی همواره یافتن جواب های نامنفی مورد انتظار است. در چنین مدلهایی جواب های منفی منجر به نوسانات غیرواقعی می شوند. علاوه بر این رادیکالی بودن تابع پاسخ، لزوم مثبت بودن جواب را دوچندان می کند. بنابراین به دنبال روش های عددی هستیم که جواب های نامنفی تولید کرده و در عین حال تقریب خوبی از جواب های مسئله بدهد. در ادامه به ارائه یک طرح تفاضلی نامشروط

¹³Non-standard finite difference method

برای رسیدن به جواب نامنفی دستگاه (۱.۲) می‌پردازیم. روش ارائه شده در این بخش با الهام از روش‌های مطرح شده در مراجع [۲، ۴، ۱۲] به دست می‌آید. در حالت کلی این دسته از روش‌ها تحت عنوان روش‌های حافظ مثبت نامشروط (UPP-FDM^{۱۴}) شناخته می‌شوند. خاطر نشان کنیم که ایده اصلی این خانواده از روش‌ها ایجاد طرحی تفاضلی متناسب با ساختار مسئله مورد بحث به گونه‌ایست که شرط نامنفی بودن جواب‌های تقریبی را به صورت نامشروط برآورده سازد. از این رو در استفاده از این دسته از روش‌ها باید متناسب با ساختار مسئله طرح تفاضلی مناسبی ارائه شود. با پیاده‌سازی روش پیشنهادی برای مدل (۱.۲)، داریم:

$$\begin{cases} \delta_\tau S_i^n = d_s \gamma_s [S_{i+1}^n - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^n] + rS_i^n - \sigma S_i^{n+1} - \beta S_i^{n+1} I_i^n - \alpha_s \frac{S_i^{n+1}}{\sqrt{S_i^n}} P_i^n, \\ \delta_\tau I_i^n = d_i \gamma_i [I_{i+1}^n - 2I_i^{n+1} + I_{i-1}^n] - \mu I_i^{n+1} + \beta S_i^n I_i^n - \alpha_i I_i^{n+1} P_i^n, \\ \delta_\tau P_i^n = d_p \gamma_p [P_{i+1}^n - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^n] - dP_i^{n+1} + e(\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n, \end{cases} \quad (۱۵.۴)$$

که در آن $n = 1, 2, 3, \dots, N$ و $i = 0, 1, 2, \dots, M$ با بازنویسی (۱۵.۴) به فرمول‌های صریح دوترازی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} S_i^{n+1} = \frac{1}{AP_s} [(1 + \tau r)S_i^n + \gamma_s(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n)], \\ I_i^{n+1} = \frac{1}{AP_i} [I_i^n + \gamma_i(I_{i+1}^n + I_{i-1}^n) + \tau \beta S_i^n I_i^n], \\ P_i^{n+1} = \frac{1}{AP_p} [P_i^n + \gamma_p(P_{i+1}^n + P_{i-1}^n) + e\tau(\alpha_s \sqrt{S_i^n} + \alpha_i I_i^n) P_i^n], \end{cases} \quad (۱۶.۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} AP_s &= 1 + 2\gamma_s + \tau\sigma + \tau\beta I_i^n + \tau\alpha_s \frac{1}{\sqrt{S_i^n}} P_i^n, \\ AP_i &= 1 + 2\gamma_p + \tau\mu + \tau\alpha_i P_i^n, \\ AP_p &= 1 + 2\gamma_p + \tau d. \end{aligned}$$

در این جا نیز مقادیر آغازین و مقادیر مرزی مورد نیاز در جهت محاسبه رابطه (۱۶.۴) مشابه مقادیر آغازین (۹.۴) و مرزی (۱۱.۴) در روش اولبر پیشروست. همان طور که مشاهده می‌شود با توجه به مثبت بودن پارامترها و نامنفی بودن جواب‌های اولیه، مثبت بودن پاسخ‌ها بدون قید و شرط حفظ می‌شود.

۵ سازگاری روش عددی پیشنهادی

در این قسمت به بررسی روند سازگاری روش UPP-FDM می‌پردازیم. روش عددی تفاضل متناهی برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی سازگار است هرگاه با کاهش تقسیم‌بندی زمان و طول گام‌های مکانی، خطای برشی به صفر نزدیک شود. در این صورت جواب تقریبی به دست آمده از روش تفاضل متناهی به جواب واقعی نزدیک می‌شود [۲۳]. در ادامه روش UPP-FDM را برای دستگاه (۱.۲) اعمال کرده و سازگاری این روش را به تفصیل بیان می‌کنیم. برای پرهیز از تکرار، محاسبات را فقط برای معادله اول دستگاه (۱.۲) به صورت زیر می‌آوریم:

$$\partial_t S = d_s \partial_x^2 S + rS - \sigma S - \beta SI - \alpha_s \sqrt{S} P \quad (۱.۵)$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از اولین رابطه (۱۶.۴) داریم:

$$S_i^{n+1} \left[1 + \frac{2\tau d_s}{h^2} + \tau\sigma + \tau\beta I_i^n + \frac{\tau\alpha_s P_i^n}{\sqrt{S_i^n}} \right] = (r\tau + 1)S_i^n + \frac{2\tau d_s}{h^2} (S_{i+1}^n + S_{i-1}^n). \quad (۲.۵)$$

اکنون بسط تیلور تابع $S(x, t + \tau)$ برحسب زمان و بسط تیلور توابع $S(x + h, t)$ و $S(x - h, t)$ برحسب مکان به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} S(x, t + \tau) = S(x, t) + \tau \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial t^3} + \dots, \\ S(x - h, t) = S(x, t) - h \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial x^3} + \dots, \\ S(x + h, t) = S(x, t) + h \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial x^3} + \dots \end{cases} \quad (۳.۵)$$

¹⁴Unconditionally positivity preserving method

با جایگذاری (۳.۵) در (۲.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \tau TS(h, \tau) = & S(x_i, t_{n+1}) \left[1 + \frac{\tau d_s}{h^\tau} + \tau\sigma + \tau\beta I(x_i, t_n) + \frac{\tau\alpha_s P(x_i, t_n)}{\sqrt{S(x_i, t_n)}} \right] - (r\tau + 1)S(x_i, t_n) \\ & - \frac{\tau d_s}{h^\tau} (S(x_{i+1}, t_n) + S(x_{i-1}, t_n)) = \left[S(x_i, t_n) + \tau \frac{\partial S(x_i, t_n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} + \right. \\ & \left. \frac{\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial t^3} + \dots \right] \left[1 + \frac{\tau d_s}{h^\tau} + \tau\sigma + \tau\beta I(x_i, t_n) + \frac{\tau\alpha_s P(x_i, t_n)}{\sqrt{S(x_i, t_n)}} \right] - (r\tau + 1) \\ & S(x_i, t_n) - \frac{\tau d_s}{h^\tau} \left[S(x_i, t_n) - h \frac{\partial S(x_i, t_n)}{\partial x} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 S(x_i, t_n)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x_i, t_n)}{\partial x^3} + \right. \\ & \left. \dots + S(x_i, t_n) + h \frac{\partial S(x_i, t_n)}{\partial x} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 S(x_i, t_n)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 S(x_i, t_n)}{\partial x^3} + \dots \right]. \quad (4.5) \end{aligned}$$

توجه داریم که در محاسبه رابطه (۲.۵)، برای ساده‌سازی رابطه، طرفین معادله را در مقدار τ ضرب کرده‌ایم. بنابراین خطای برشی روش عددی را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} TS(h, \tau) = & \frac{\partial S}{\partial t} - d_s \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - rS + \sigma S + \beta SI + \alpha_s \sqrt{S} P + \frac{\tau d_s \frac{\partial S}{\partial t}}{h^\tau} + \frac{\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{2} + \frac{\tau^2 \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{6} + \frac{\tau^3 \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{24} - \\ & \frac{h^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial x^4}}{12} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{3h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{12h^\tau} + \dots \quad (5.5) \end{aligned}$$

فرآیند مشابهی را برای دو معادله دیگر سیستم (۱.۲) بکاربرده و خطاهای برشی آنها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} TI(h, \tau) = & \frac{\partial S}{\partial t} - d_s \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \mu I - \beta SI + \alpha_i IP + \frac{\tau d_s \frac{\partial S}{\partial t}}{h^\tau} + \frac{\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{2} + \frac{\tau^2 \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{6} + \frac{\tau^3 \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{24} - \\ & \frac{h^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial x^4}}{12} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{3h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{12h^\tau} + \dots, \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TP(h, \tau) = & \frac{\partial S}{\partial t} - d_s \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + dP - e(\alpha_s \sqrt{S} + \alpha_i I)P + \frac{\tau d_s \frac{\partial S}{\partial t}}{h^\tau} + \frac{\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{2} + \frac{\tau^2 \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{6} + \frac{\tau^3 \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{24} - \\ & \frac{h^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial x^4}}{12} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}{h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^3 S}{\partial t^3}}{3h^\tau} + \frac{\tau^\tau d_s \frac{\partial^4 S}{\partial t^4}}{12h^\tau} + \dots \quad (7.5) \end{aligned}$$

با مشاهده روابط (۵.۵) تا (۷.۵) ملاحظه می‌شود که با انتخاب $\tau = h^k$ برای $k \geq 3$ برای $h \rightarrow 0$ خطای برشی هر سه رابطه به صفر میل کرده و در نتیجه روش پیشنهادی برای محاسبه تقریب جواب سازگار است.

۶ شبیه‌سازی عددی

در این بخش، برخی از نتایج شبیه‌سازی خود را ارائه می‌دهیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۱.۲) را با سه توافق متناهی اوپلر پیشرو، روش تفاضل متناهی غیراستاندارد و روش پیشنهادی حل کرده‌ایم. در این مسئله دامنه حرکت گونه‌های جانوری در بازه $[0, 100]$ فرض شده و شرایط اولیه سیستم به صورت

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5, \\ f_2(x) &= 0.6(1 - \tanh(x - 20)), \\ f_3(x) &= 0.9(1 - \tanh(x - 20)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

در نظر گرفته می‌شوند. برای شبیه‌سازی عددی سه دسته از پارامترهای زیر را در نظر می‌گیریم:

• دسته اول

$$\alpha_s = \alpha_i = d_s = e = r = 1, \sigma = 0.3, \mu = 0.1, d = \beta = 0.5, d_i = 0.2, d_p = 0.1$$

• دسته دوم

$$e = \alpha_s = \alpha_i = 1, r = \beta = 0.1, \sigma = d_p = 0.3, \mu = d_i = 0.5, d = 0.2, d_s = 0.1$$

• دسته سوم

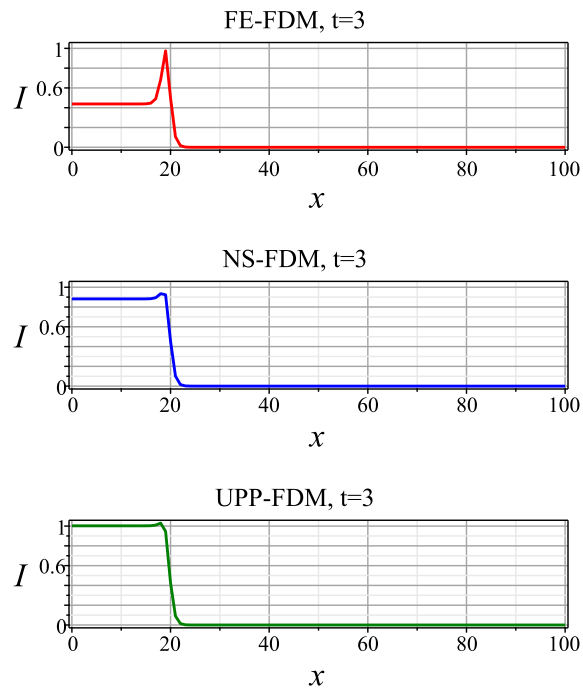
$$e = r = \alpha_s = \alpha_i = 1, \sigma = \mu = 0.3, d = \beta = 0.5, d_s = 0.1, d_i = 0.52, d_p = 0.6$$

جواب تقریبی سیستم برای شکار آلوده را در هر سه روش، با هم مقایسه کرده تا کارایی روش‌های مطرح شده در تولید جواب‌های نامنفی مورد بررسی قرار گیرد. این نتایج در جدول ۴ نمایش داده شده است. در این جدول مشاهده می‌شود که روش اویلر در محدوده زمانی بزرگ با شکست مواجه خواهد شد. چنانچه تقسیم‌بندی زمان و مکان طوری انتخاب شوند که شرایط (۱۴.۴) برآورده شود، روش تفاضلی غیراستاندارد موفق به تولید تقریب‌های قابل قبولی خواهد بود. در غیر این صورت این روش عددی قادر به تولید جواب‌های نامنفی نخواهد بود. توجه کنیم که روش پیشنهادی نه تنها به صورت نامشروط جواب نامنفی را تولید می‌کند بلکه از زمان قابل قبولی برای محاسبه این تقریب‌ها است.

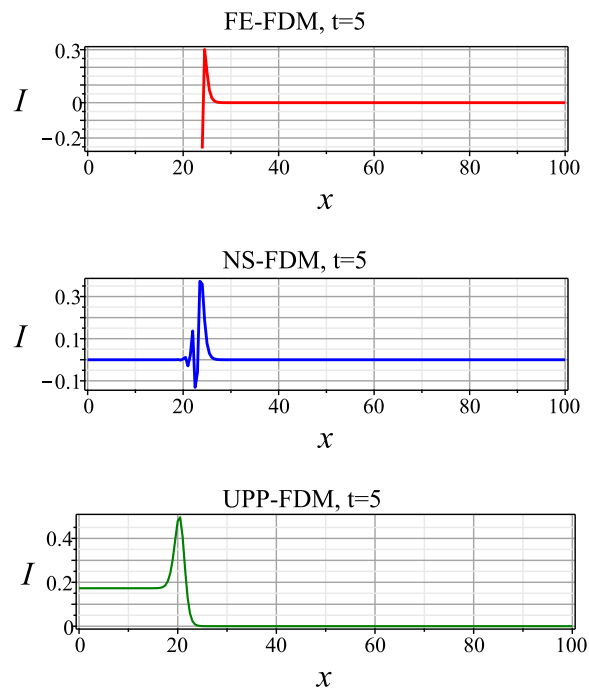
UPP-FDM	NS-FDM	FE-FDM	M	N	t	پارامتر
✓	✓	✓	۱۰۰	۵۰	۳	دسته اول
✓	✓	×	۵۰	۶۰	۵	دسته دوم
✓	×	×	۲۰۰	۵۰	۱۰	دسته سوم
۱/۰۰۰	۱/۰۳۱	۰/۹۲۲				زمان پردازنده با پارامتر دسته اول

جدول ۴: کارایی روش‌های FE-FDM، NS-FDM و UPP-FDM در تولید جواب مثبت برای شکار بیمار.

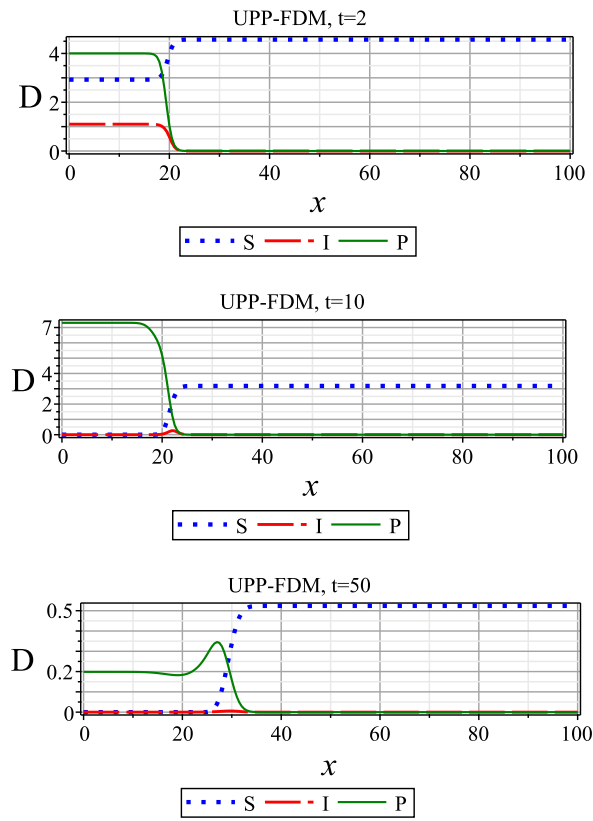
با توجه به اهمیت گسترش بیماری و اثر آن روی رشد هر دو گونه شکار و شکارچی، تراکم شکار بیمار که با سه روش FE-FDM، NS-FDM و UPP-FDM محاسبه شده است را در شکل ۱ نمایش داده‌ایم. در این شکل دیده می‌شود که هر سه روش عددی تفاضلی با در نظر گرفتن پارامترهای دسته اول در زمان $t = 3$ ، تقریب‌های نامنفی تولید کرده‌اند ولی شکل ۲ گویای این مطلب است که روش اویلر در محاسبه تقریب جواب با شکست روبه‌رو شده و روش تفاضل متناهی غیراستاندارد نیز قادر نیست تا انتظارمان را در ایجاد جواب نامنفی برآورده سازد و این مطلب باعث نوساناتی می‌شود که منجر به تفسیرهای نادرستی از مدل خواهد شد. خاطر نشان شود که برای حل دستگاه (۱.۲)، پارامترهای دسته سوم در زمان $t = 10$ انتخاب شده‌اند. نظر به اینکه روش UPP-FDM به صورت نامشروط، موفق به محاسبه تقریب‌های قابل قبول برای مدل (۱.۲) است، از تقریب‌های حاصل از روش پیشنهادی برای تفسیر چگونگی رفتار گونه‌ها و تغییر تراکم جمعیت آنها در زیستگاه کمک می‌گیریم. با توجه به شرایط آغازین (۹.۴) و توابع (۱.۶) در زمان ابتدایی جمعیت شکارچی در بازه $[0, 20]$ متراکم بوده و در خارج این بازه شکارچی وجود ندارد. بنابراین در زمان‌های اولیه تعداد شکارچیان در این محدوده بیشتر بوده و در پی آن با توجه به تهاجم شکارچی، جمعیت شکار اندک خواهد شد. در زمان‌های بعدی با در نظر گرفتن انتشار گونه‌ها در مکان‌های دیگر برای یافتن طعمه یا فرار از دشمن، دفاع گروهی شکار و یا ابتلا به بیماری در گونه شکار و عواملی از این دست همگی، باعث تغییر جمعیت در مناطق دیگری از زیست بوم خواهد شد. شکل ۳ نمایش می‌دهد که در هر زمان چگونه با افزایش جمعیت شکارچی، تراکم جمعیت شکار کاسته می‌شود. در هر سه قسمت از این شکل، نمودار آبی‌رنگ، نمایش تراکم جمعیت شکار حساس، نمودار قرمز رنگ، نمایش جمعیت شکار بیمار، نمودار سبز رنگ، نمایش تراکم جمعیت گونه شکارچی و نماد D نشانگر تراکم جمعیت هر گونه مورد بحث است. شکل ۳ حاصل از حل دستگاه (۱.۲)، با به کار گرفتن پارامترهای دسته سوم در زمان‌های $t = 2$ ، $t = 10$ و $t = 50$ است. در شکل ۴ می‌توانیم تغییر جمعیت گونه‌ها را با گذشت زمان به طور جداگانه در هر دسته مقایسه کنیم. نمودار رنگ سبز نمایش تراکم جمعیت هر دسته در زمان $t = 5$ و نمودار رنگ آبی نمایش تراکم جمعیت در زمان $t = 10$ و نمودار قرمز رنگ نمایش تراکم در زمان $t = 50$ است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود با گذشت زمان جمعیت گونه شکار حساس کاهش یافته است. این کاهش ناشی از ابتلا به بیماری و تلف شدن توسط شکارچی است. بعد از آن این جمعیت به مقدار ثابتی همگراست. بیماری هم در مقطع زمانی به اوج خود رسیده و بعد از گذشت زمان از بین می‌رود. در مورد شکارچی هم می‌توان به این نتیجه رسید که با گذشت زمان و به علت دفاع گروهی گونه شکار از ضعیف‌ترها، منبع غذایی آنها رو به پایان است و منقرض خواهند شد.



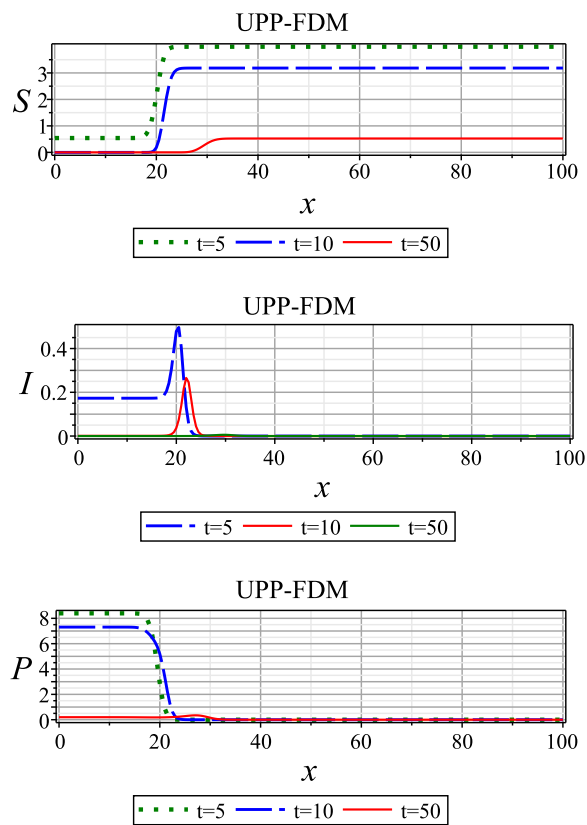
شکل ۱: تراکم شکار بیمار برای سه روش عددی FE-FDM ، NS-FDM و UPP-FDM با پارامترهای دسته اول.



شکل ۲: تراکم شکار بیمار برای سه روش عددی FE-FDM ، NS-FDM و UPP-FDM با پارامترهای دسته سوم.



شکل ۳: تراکم جمعیت گونه‌ها (D) برای روش عددی UPP-FDM در زمان‌های ۲، ۱۰ و ۵۰ با پارامترهای دسته سوم.



شکل ۴: تراکم جمعیت گونه‌ها برای روش عددی UPP-FDM در زمان‌های ۵، ۱۰ و ۵۰ با پارامترهای دسته سوم

۷ نتیجه‌گیری

در این مطالعه، مدل شکار و شکارچی با بیماری را بررسی کرده‌ایم. نرخ شیوع بیماری را دوخطی و تابع پاسخ را رادیکالی در نظر می‌گیریم. ابتدا شرایط وجود نقاط تعادل را بررسی کردیم و نتایج در قضیه ۱.۳ خلاصه شده است. در ادامه به بحث پایداری نقاط تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۱.۲) در دو حالت با انتشار و بدون انتشار پرداختیم. نتایج در قضایای ۲.۳ تا ۵.۳ بیان شده و در جداول ۲ و ۳ درج شده‌اند. با توجه به دفاع گروهی گونه شکار، شکارچی کمتر در عملیات شکار خود موفق خواهد شد. این موضوع می‌تواند به دلیل دسترسی کمتر شکارچی به شکار باشد. چرا که تقابل دو گونه شکار و شکارچی در محیط بیرونی تراکم جمعیت شکار اتفاق می‌افتد. بنابراین گروه‌های قوی‌تر در گونه شکار، بیشتر از شکارهای بیمار و ضعیف‌تر محافظت می‌کنند. در نهایت جمعیت شکارچی رو به انقراض می‌رود. این موضوع توسط شکل ۴ قسمت (ج) تایید می‌شود. با توجه به تجمع گروهی گونه شکار، بیماری نیز در مقطعی از زمان رو به افزایش بوده، به نقطه اوج خود می‌رسد و به تدریج از بین می‌رود. شکل ۴ قسمت (ب) این مطلب را تایید می‌کند.

برای تحلیل بهتر رفتار مدل (۱.۲)، از سه روش تفاضل متناهی روش اویلر پیشرو، روش غیراستاندارد و روش حافظ مثبت نامشروط در شبیه‌سازی این مدل استفاده کردیم. تغییرات تراکم جمعیت گونه‌های شکار و شکارچی در زمان‌ها و پارامترهای مختلف در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ گزارش شده‌اند. ضمناً جدول ۴ نشان‌دهنده مزیت روش UPP-FMD را در تولید تقریب‌های نامنفی را نسبت به دو روش اویلر و غیراستاندارد است. با بررسی زمان شبیه‌سازی‌ها مشاهده شد که روش UPP-FMD، زمان محاسبه قابل قبولی برای به‌دست آوردن تقریب‌های نامنفی دارد. هم‌چنین سازگاری روش UPP-FMD در بخش ۴ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. برای مطالعات آینده، با توجه به تغییر مسیر حرکت جانوران به دلایل مختلف، افزایش بعد مکانی برای مدل (۱.۲) را در نظر داریم و یا با توجه به رفتار متفاوت گونه‌ها در محیط زیست مثلاً جابه‌جایی پرندگان یا ماهی‌ها در زیستگاه‌های خود، توابع پاسخ رادیکالی با فرجه مناسب می‌تواند مدل را واقعی‌تر کند.

فهرست منابع

- [۱] ظهوری زنگنه، حمیدرضا، فتاح پور، هانیه، ۱۳۹۷. تاریخچه تکامل مدل‌های شکار-شکارچی. فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۷(۶۲)، صص. ۳۵-۵۷. doi: 20.1001.1.10226443.1397.37.62.3.4
- [2] Ahmed N., Wei Z., Baleanu D., Rafiq M. and Rehman M. A., 2019. Spatio-temporal numerical modeling of reaction-diffusion measles epidemic system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(10), pp. 103101. doi: 10.1063/1.5116807
- [3] Ahmed N., SS T., Rafiq M., Rehman M. A., Ali M., and Ahmad M. O., 2019. Positivity preserving operator splitting nonstandard finite difference methods for SEIR reaction diffusion model. *Open Mathematics*, 17(1), pp. 313-330. doi: 10.1515/math-2019-0027
- [4] Ahmed N., Wei Z., Baleanu D., Rafiq M., Rehman M. A., 2019. Spatio-temporal numerical modeling of reaction-diffusion measles epidemic system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(10), pp. 103101. doi: 10.1063/1.5116807
- [5] Ajraldi V., Pittavino M. and Venturino E., 2011. Modeling herd behavior in population systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(4), pp. 2319-2338. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.02.002
- [6] Banerjee, M., Kooi, B. W., Venturino, E., 2017. An ecoepidemic model with prey herd behavior and predator feeding saturation response on both healthy and diseased prey. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 12(2), pp. 133-161. doi: 10.1051/mmnp/201712208
- [7] Bagheri, S., Akrami, M. H., Loghmani, G. B., and Heydari, M., 2024. Traveling wave in an eco-epidemiological model with diffusion and convex incidence rate: Dynamics and numerical simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 216, pp. 347-366. doi: 10.1016/j.matcom.2023.10.001

- [8] Braza P. A., 2012. Predator–prey dynamics with square root functional responses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(4), pp. 1837-1843. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.12.014
- [9] Bate A. M. and Hilker F. M., 2019. Prey-taxis and travelling waves in an eco-epidemiological model. *Bulletin of mathematical biology*, 81, pp. 995-1030. doi: 10.1007/s11538-018-00546-0
- [10] Baurmann M., Gross T. and Feudel U., 2007. Instabilities in spatially extended predator–prey systems: Spatio-temporal patterns in the neighborhood of Turing–Hopf bifurcations. *Journal of Theoretical Biology*, 245(2), pp. 220-229. doi: 10.1016/j.jtbi.2006.09.036
- [11] Bendahmane M. and Langlais M., 2010. A reaction-diffusion system with cross-diffusion modeling the spread of an epidemic disease. *Journal of Evolution Equations*, 10, pp. 883-904. doi: 10.1007/s00028-010-0074-y
- [12] Chen-Charpentier B. M. and Kojouharov H. V., 2013. An unconditionally positivity preserving scheme for advection–diffusion reaction equations. *Mathematical and computer modelling*, 57(9-10), pp. 2177-2185. doi: 10.1016/j.mcm.2011.05.005
- [13] Gimmelli G., Kooi B. W. and Venturino E., 2015. Ecoepidemic models with prey group defense and feeding saturation. *Ecological Complexity*, 22, pp. 50-58. doi: 10.1016/j.ecocom.2015.02.004
- [14] Greenhalgh D., Khan Q. J. and Al-Kharousi F. A., 2020. Eco-epidemiological model with fatal disease in the prey. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, 53, pp. 103072. doi: 10.1016/j.nonrwa.2019.103072
- [15] Haque M., 2011. A detailed study of the Beddington–DeAngelis predator–prey model. *Mathematical Biosciences*, 234(1), pp. 1-16. doi: org/10.1016/j.mbs.2011.07.003
- [16] Hillen T. and Painter K. J., 2009. A user’s guide to PDE models for chemotaxis. *Journal of mathematical biology*, 58(1-2), pp. 183. doi:10.1007/s00285-008-0201-3
- [17] Holling C. S., 1959. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European Pine Sawfly¹. *The Canadian Entomologist*, 91(5), pp. 293-320. doi: 10.4039/Ent91293-5
- [18] Holling C. S., 1959. Some characteristics of simple types of predation and parasitism¹. *The canadian entomologist*, 91(7), pp. 385-398. doi: 10.4039/Ent91385-7
- [19] Kim S., Antwi-Fordjour K., 2022. Prey group defense to predator aggregated induced fear. *The European Physical Journal Plus*, 137(6), pp. 1-17. doi: 10.1140/epjp/s13360-022-02926-x
- [20] Hsu S. B., Hwang T. W. and Kuang Y., 2001. Global analysis of the Michaelis–Menten-type ratio-dependent predator-prey system. *Journal of mathematical biology*, 42, pp. 489-506. doi: 10.1007/s002850100079
- [21] Kiss K. and Tóth J., 2009. n-Dimensional ratio-dependent predator-prey systems with memory. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 17(1-2), pp. 17-35. doi: 10.1007/s12591-009-0002-1
- [22] Kooij R. E. and Zegeling A., 1996 A predator–prey model with Ivlev’s functional response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 198(2), pp. 473-489. doi: 10.1006/jmaa.1996.0093
- [23] Lin C. M. and Ho C. P., 2006. Local and global stability for a predator–prey model of modified Leslie–Gower and Holling-type II with time-delay. *Tunghai Sci*, 8, pp. 33-61. doi: 10.29723/TS.200607.0003

- [24] Lotka A. J., 1956. *Elements of mathematical biology*. Dover Publications. ISBN: 9780486603469
- [25] Liu H. and Cheng H., 2018. Dynamic analysis of a prey–predator model with state-dependent control strategy and square root response function. *Advances in Difference Equations*, 1, pp. 1-13. doi: 10.1186/s13662-018-1507-0
- [26] Mickens R.E., 1989. Exact solutions to a finite-difference model of a nonlinear reaction-advection equation: Implications for numerical analysis. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 5, pp. 313-325. doi: 10.1002/num.1690050404
- [27] Mickens R. E., 1994. A best finite-difference scheme for the fisher equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 10(5), pp. 581-585. doi: 10.1002/num.1690100505
- [28] Pal D., Santra P. and Mahapatra G. S., 2017. Predator–prey dynamical behavior and stability analysis with square root functional response. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, (3), pp. 1833-1845. doi: 10.1007/s40819-016-0200-9
- [29] Pal A. K and Samanta G. P., 2010. Stability analysis of an eco-epidemiological model incorporating a prey refuge. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 15, pp. 473-491. doi: 10.15388/NA.15.4.14319
- [30] Rahman M. S. and Chakravarty S., 2013. A predator-prey model with disease in prey. *Nonlinear Analysis Modelling and Control*, 18(2), pp. 191-209. doi: 10.15388/NA.18.2.14022
- [31] Salman S. M., Yousef A. M. and Elsadany A. A., 2016. Stability, bifurcation analysis and chaos control of a discrete predator-prey system with square root functional response. *Chaos, Solitons and Fractals*, 93, pp. 20-31. doi: 10.1016/j.chaos.2016.09.020
- [32] Sarwardi S., Haque M. and Mandal P. K., 2014. Persistence and global stability of Bazykin predator–prey model with Beddington–DeAngelis response function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(1), pp. 189-209. doi: 10.1016/j.cnsns.2013.05.029
- [33] Sapoukhina N., Tyutyunov Y. and Arditi R., 2003. The role of prey taxis in biological control: a spatial theoretical model. *The American Naturalist*, 162(1), pp. 61-76. doi: 10.1086/375297
- [34] Smith G. D., 1985. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press. ISBN: 0198596502, 9780198596509
- [35] Sieber M., Malchow H. and Hilker F. M., 2014. Disease-induced modification of prey competition in eco-epidemiological models. *MoEcological Complexity*, 18, pp. 74-82. doi: 10.1016/j.ecocom.2013.06.002
- [36] Tan Y., Cai Y., Yao R., Hu M. and Wang W., 2022. Complex dynamics in an eco-epidemiological model with the cost of anti-predator behaviors. *Nonlinear Dynamics*, pp. 1-15. doi: 10.1007/s11071-021-07133-4
- [37] Twizell E. H., Wang Y., and Price W. G., 1990. Chaos-free numerical solutions of reaction-diffusion equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1880), pp. 541-576. doi: 10.1098/rspa.1990.0106
- [38] Wang J. and Nie H., 2022. Invasion dynamics of a predator-prey system in closed advective environments. *Journal of Differential Equations*, 318, pp. 298-322. doi: 10.1016/j.jde.2022.02.043



A new eco-epidemiological model with diffusion and square root functional response

S. Bagheri, M. H. Akrami, M. Heydari, G. B. Loghmani ¹⁵

Department of Mathematical Science, Yazd University, Yazd, Iran
Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 19 September 2023

Accepted: 27 December 2023

Abstract: The aim of this study is to investigate an eco-epidemiological model with a bilinear incidence rate and a square root functional response. First, we examine the equilibrium and stability points of the system for various parameter values. The main challenge in population models is finding a numerical method for approximating non-negative solutions. Some numerical methods, such as the Euler method, are inefficient as they sometimes fail to produce non-negative solutions. Non-negative approximations obtained from non-standard finite difference methods are also conditional. In this paper, we propose a numerical method that provides unconditional and acceptable solutions. We then discuss the compatibility of the proposed numerical method. Finally, we compare the efficiency of the proposed method with the Euler and non-standard methods using numerical simulations. We also investigate the effect of the hunting behavior of the prey species on the population density and analyze the dynamic model for some numerical values of the parameters involved in the problem.

Keywords: Diffusion, Square root functional, Finite difference method, Epidemiology.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹⁵Corresponding author.

E-mail addresses: (S. Bagheri) sbagheri1354@yahoo.com, (M.H. Akrami) akrami@yazd.ac.ir
(M. Heydari) m.heydari@yazd.ac.ir, (G.B. Loghmani) loghmani@yazd.ac.ir