مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۴، ص ۵۲۴-۵۳۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2024.44416.2189

دانشگاه شهید چمران اهواز

ابراشتقاق‌های موضعی روی C^*-مدول‌های هیلبرت

سید خلیل اکرامی [۱]

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۳

چکیده: یک دنباله از نگاشت‌های خطی پیوسته $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ از C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a \in \mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق پیوسته $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ روی $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر عدد طبیعی n، $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$. در این مقاله نشان خواهیم داد که اگر $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد به‌طوری‌که هر اشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک اشتقاق باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق است. همچنین نشان می‌دهیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر یک‌دار به‌طور خودکار پیوسته است.

واژه‌های کلیدی: C^*-مدول هیلبرت، ابراشتقاق، اشتقاق، ابراشتقاق موضعی، اشتقاق موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 16W25, 46L57, 47B47, 46H40.

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. نگاشت خطی d روی $\mathcal{A}$ را یک اشتقاق می‌نامیم، اگر رابطه $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ برقرار باشد. یک دنباله از نگاشت‌های خطی $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ با $D_0 = I$ روی $\mathcal{A}$ را یک ابراشتقاق می‌نامیم، اگر برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ رابطه

$$D_n(xy) = \sum_{i=0}^{n} D_i(x) D_{n-i}(y)$$

به ازای هر عدد صحیح نامنفی n برقرار باشد. میرزاوزیری در [۱۳] ثابت کرد که یک تناظر یک به یک بین ابراشتقاق‌ها روی یک جبر $\mathcal{A}$ و دنباله‌های اشتقاق‌ها روی $\mathcal{A}$ وجود دارد. او ثابت کرد که به ازای هر ابراشتقاق $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ با $D_0 = I$ روی $\mathcal{A}$ دنباله‌ای منحصر به فرد از اشتقاق‌های $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} \big(\prod_{j=1}^{i} \frac{1}{r_j + \dots + r_i} \big) \, d_{r_1} \dots d_{r_i} \Big).$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله (S. Kh. Ekrami) ekrami@pnu.ac.ir

اکرامی [۳] در مورد دنباله اشتقاق‌های متناظر با یک ابراشتقاق داخلی روی جبر یک‌دار $\mathcal{A}$ تحقیقاتی انجام داد. او نشان داد که اگر $\mathfrak{p} = \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\mathfrak{q} = \{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو دنباله در $\mathcal{A}$ باشند به‌طوری‌که $p_0 = q_0 = 1_{\mathcal{A}}$ و برای هر عدد طبیعی n،

$$(\mathfrak{p} * \mathfrak{q})_n = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i} = 0, \quad (\mathfrak{q} * \mathfrak{p})_n = \sum_{i=0}^{n} q_i p_{n-i} = 0,$$

و $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق باشد که با ضابطه

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x q_{n-i}$$

برای هر $x \in \mathcal{A}$ تعریف شده باشد، آنگاه دنباله اشتقاق‌های $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناظر با $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از اشتقاق‌های داخلی خواهد بود که برای هر $x \in \mathcal{A}$ در رابطه

$$\begin{aligned} d_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} (-1)^{i-1}\, r_1 p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_i} \Big) x \\ + x \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} (-1)^{i-1}\, r_i q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_i} \Big) \end{aligned}$$

به ازای هر عدد طبیعی n صدق می‌کند.

در این مقاله در مورد اشتقاق‌های موضعی روی جبرهای باناخ بحث خواهیم کرد. یک نگاشت خطی پیوسته D از جبر باناخ $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ یک اشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$ یک اشتقاق d_a از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ (وابسته به a) وجود داشته باشد به‌طوری‌که $D(a) = d_a(a)$. توجه کنید که منظور از اشتقاق d_a یک اشتقاق داخلی نیست. جانسون [۹] ثابت کرد که هر اشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر، یک اشتقاق است. همچنین او نشان داد هنگامی که $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر است، می‌توان فرض پیوستگی را در تعریف اشتقاق موضعی حذف نمود.

نارنجانی و دیگران در [۱۴] مفهوم ابراشتقاق موضعی روی جبرهای باناخ را تعریف کردند. یک دنباله $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی پیوسته از جبر باناخ $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$ یک ابراشتقاق پیوسته $\{d_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ (وابسته به a) وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، $D_n(a) = d_{a,n}(a)$. آنها ثابت کردند هنگامی که $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر است، هر ابراشتقاق موضعی روی $\mathcal{A}$ ، یک ابراشتقاق است و به‌علاوه هر ابراشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر به‌طور خودکار پیوسته است.

با انگیزه از مفهوم ابر اشتقاق موضعی روی جبرهای باناخ [۱۴] ، مفهوم ابراشتقاق موضعی روی C^*-مدول‌های هیلبرت را معرفی می‌کنیم. C^*-مدول هیلبرت یک تعمیم از فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی مقادیر خود را از یک C^*-جبر می‌گیرد [۱۱]. در ابتدا مفهوم C^*-مدول هیلبرت را بیان می‌کنیم.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد. فضای خطی مختلط $\mathfrak{M}$ را که یک $\mathfrak{A}$-مدول چپ با ضرب اسکالر سازگار

$$\lambda(ax) = (\lambda a)x = a(\lambda x) \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathfrak{M},\ a \in \mathfrak{A})$$

است، یک $\mathfrak{A}$-مدول ضرب داخلی می‌نامیم، اگر یک ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle .,. \rangle : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, z \in \mathfrak{M}$، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathfrak{A}$،

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ($\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$)،

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$،

(iii) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$،

(iv) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$.

از این تعریف نتیجه می‌شود که ضرب داخلی در متغیر دوم خود مزدوج خطی است و به ازای هر $x,y\in\mathfrak{M}$ و $a\in\mathfrak{A}$، $\langle x,ay\rangle=\langle x,y\rangle a^*$. اگر $\mathfrak{A}$-مدول ضرب داخلی $\mathfrak{M}$ نسبت به نرم $\|x\|_{\mathfrak{M}}=\|\langle x,x\rangle\|_{\mathcal{A}}^{\frac{1}{2}}$ کامل باشد، آنگاه آن را یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت یا یک C^*-مدول هیلبرت روی C^*-جبر $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. برای مثال، هر C^*-جبر $\mathfrak{A}$ یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت با ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle a,b\rangle=ab^*$ است که در آن $a,b\in\mathfrak{A}$. هر فضای هیلبرت مختلط یک $\mathbb{C}$-مدول هیلبرت (چپ) است.

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد. نگاشت خطی $\psi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ یک اشتقاق نامیده می‌شود، اگر در رابطه

$$\psi(\langle x,y\rangle z)=\langle\psi(x),y\rangle z+\langle x,\psi(y)\rangle z+\langle x,y\rangle\psi(z)$$

برای هر $x,y,z\in\mathcal{M}$ صدق کند. یک دنباله از نگاشت‌های خطی $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ با $\varphi_0=I$ (نگاشت همانی روی $\mathfrak{M}$)، یک ابراشتقاق نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y,z\in\mathcal{M}$ و هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$\varphi_n(\langle x,y\rangle z)=\sum_{\substack{i+j+k=n\\ 0\le i,j,k\le n}}\langle\varphi_i(x),\varphi_j(y)\rangle\varphi_k(z).$$

اکرامی در [۵] یک مشخص‌سازی از ابراشتقاق‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت ارائه کرد. او نشان داد که به ازای هر ابراشتقاق $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ دنباله‌ای منحصر به فرد از اشتقاق‌های $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathfrak{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$\psi_n=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\sum_{j=1}^{k}r_j=n}(-1)^{k-1}\,r_1\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}\dots\varphi_{r_k}\Big).$$

نگاشت خطی پیوسته Ψ روی C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ یک اشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a\in\mathfrak{M}$ یک اشتقاق ψ_a روی $\mathfrak{M}$ وابسته به a وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\Psi(a)=\psi_a(a)$. یک دنباله از نگاشت‌های خطی پیوسته $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a\in\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق پیوسته $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ روی $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر عدد طبیعی n، $\Phi_n(a)=\varphi_{a,n}(a)$.

در این مقاله نشان خواهیم داد که اگر $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد به‌طوری‌که هر اشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک اشتقاق باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق است. همچنین نشان می‌دهیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر یک‌دار به‌طور خودکار پیوسته است.

برای بحث در مورد اشتقاق‌ها، ابراشتقاق‌ها و تعمیم‌های آن‌ها خواننده می‌تواند به [۴، ۶–۸، ۱۲، ۱۳] و [۱۶] و برای بحث در مورد پیوستگی خودکار اشتقاق‌ها و موضوعات وابسته به آن، به [۱، ۲، ۱۰، ۱۵] و [۱۸] رجوع نماید.

۲ نتایج

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد. یک دنباله از نگاشت‌های خطی $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ با $\varphi_0=I$ (نگاشت همانی روی $\mathfrak{M}$)، یک ابراشتقاق نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y,z\in\mathcal{M}$ و هر عدد طبیعی n داشته باشم

$$\varphi_n(\langle x,y\rangle z)=\sum_{\substack{i+j+k=n\\ 0\le i,j,k\le n}}\langle\varphi_i(x),\varphi_j(y)\rangle\varphi_k(z).$$

ابراشتقاق $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ پیوسته نامیده می‌شود، اگر هر φ_n پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد. یک دنباله از نگاشت‌های خطی پیوسته $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر $a\in\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق پیوسته $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر عدد طبیعی n، $\Phi_n(a)=\varphi_{a,n}(a)$.

گزاره ۲.۲. فرض کنید $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق موضعی از یک C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ با $\Phi_0=I$ باشد. آنگاه یک دنباله $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اشتقاق‌های موضعی روی $\mathfrak{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عدد طبیعی n،

$$(n+1)\Phi_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\Psi_{k+1}\Phi_{n-k}.$$

اثبات. فرض کنید a یک عضو $\mathfrak{M}$ باشد. چون $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق موضعی است، یک ابراشتقاق پیوسته $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر n، $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$.

از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$، اگر $\Psi_1 : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ به صورت $\Psi_1 = \Phi_1$ روی $\mathfrak{M}$ تعریف شود، آنگاه Ψ_1 یک اشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ است. چون $\Psi_1(a) = \Phi_1(a) = \varphi_{a,1}(a)$ و $\varphi_{a,1}$ یک اشتقاق پیوسته روی $\mathfrak{M}$ است. اکنون فرض کنید Ψ_k تعریف شده و برای هر $k \leqslant n$ یک اشتقاق موضعی باشد. در این صورت، به‌طور استقرایی می‌توان فرض کرد که برای هر $k \leqslant n$ یک اشتقاق $\psi_{a,k} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ وجود دارد که با رابطه

$$\psi_{a,k} = k\varphi_{a,k} - \sum_{i=0}^{k-2} \psi_{a,i+1}\varphi_{a,k-1-i}$$

تعریف می‌شود به‌طوری‌که $\Psi_k(a) = \psi_{a,k}(a)$.

با قرار دادن

$$\Psi_{n+1} = (n+1)\Phi_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_{k+1}\Phi_{n-k}$$

نشان می‌دهیم که Ψ_{n+1} یک اشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ است. برای این کار فرض کنیم

$$\psi_{a,n+1} = (n+1)\varphi_{a,n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{a,k+1}\varphi_{a,n-k}.$$

آشکار است که $\Psi_{n+1}(a) = \psi_{a,n+1}(a)$. نشان می‌دهیم که $\psi_{a,n+1}$ یک اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است. برای $x, y, z \in \mathfrak{M}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\psi_{a,n+1}(\langle x, y\rangle z)\\
&= (n+1)\varphi_{a,n+1}(\langle x, y\rangle z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,n-\ell}(\langle x, y\rangle z)\\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 0\leq i,j,k\leq n+1}} (n+1)\langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1}\Big(\sum_{\substack{p+q+r=n-\ell\\ 0\leq p,q,r\leq n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z)\Big).
\end{aligned}$$

چون $i + j + k = n + 1$ و $\psi_{a,1}, \psi_{a,2}, \dots, \psi_{a,n}$ اشتقاق‌هایی روی $\mathfrak{M}$ هستند. داریم:

$$\begin{aligned}
&\psi_{a,n+1}(\langle x, y\rangle z)\\
&= \sum_{\substack{i+j+k\\ =n+1}} (i+j+k)\langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r\\ =n-\ell}} \psi_{a,\ell+1}\Big(\langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z)\Big)\\
&= \sum_{\substack{i+j+k\\ =n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) + \sum_{\substack{i+j+k\\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), j\varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) + \sum_{\substack{i+j+k\\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle k\varphi_{a,k}(z)\\
&\quad - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r\\ =n-\ell}} \Big(\langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z) + \langle \varphi_{a,p}(x), \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z)\\
&\qquad\qquad + \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,r}(z)\Big).
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم

$$A = \sum_{\substack{i+j+k\\=n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r\\=n-\ell}} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z),$$

$$B = \sum_{\substack{i+j+k\\=n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), j\varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r\\=n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,q}(y)\rangle \varphi_{a,r}(z),$$

$$C = \sum_{\substack{i+j+k\\=n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle k\varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r\\=n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y)\rangle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,r}(z),$$

آنگاه $\psi_{a,n+1}(\langle x,y\rangle z) = A+B+C$. اکنون A، B و C را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$A = \sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 0\le i,j,k\le n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{i+j+k=n-\ell\\ 0\le i,j,k\le n-\ell}} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z).$$

در مجموع دوم، داریم $0 \le \ell \le n-1$، $0 \le i,j,k \le n-\ell$، $i+j+k+\ell = n$ و $\ell \neq n$. بنابراین اگر قرار دهیم $r = i+\ell$، آنگاه $r+j+k=n$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i+j+k=n+1} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{r+j+k=n} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq n}}^{r} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,r-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z)\\
&= \sum_{i+j+k=n} \langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{i+j+k=n} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq n}}^{i} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z)\\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n\\ i\neq n}} \langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\substack{i+j+k=n\\ i\neq n}} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq n}}^{i} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y)\rangle \varphi_{a,k}(z)\\
&\quad + \langle (n+1)\varphi_{a,n+1}(x), y\rangle z - \sum_{\ell=0}^{n-1} \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,n-\ell}(x), y\rangle z\\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n\\ i\neq n}} \Big\langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x) - \sum_{\ell=0}^{i} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y)\Big\rangle \varphi_{a,k}(z)\\
&\quad + \Big\langle (n+1)\varphi_{a,n+1}(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,n-\ell}(x), y\Big\rangle z.
\end{aligned}$$

چون برای هر $i = 0,1,\ldots,n-1$،

$$(i+1)\varphi_{a,i+1} = \sum_{\ell=0}^{i} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,i-\ell},$$

داریم

$$A = \Big\langle \Big((n+1)\varphi_{a,n+1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,n-\ell}\Big)(x), y\Big\rangle z = \langle \psi_{a,n+1}(x), y\rangle z.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $B = \langle x, \psi_{a,n+1}(y)\rangle z$ و $C = \langle x, y\rangle \psi_{a,n+1}(z)$. بنابراین برای هر $x, y, z \in \mathfrak{M}$،

$$\psi_{a,n+1}(\langle x, y\rangle z) = A + B + C = \langle \psi_{a,n+1}(x), y\rangle z + \langle x, \psi_{a,n+1}(y)\rangle z + \langle x, y\rangle \psi_{a,n+1}(z).$$

به عبارت دیگر $\psi_{a,n+1}$ نیز یک اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است. این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت است به‌طوری‌که هر اشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک اشتقاق می‌باشد. در این صورت هر ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ با $\Phi_0 = I$ باشد. طبق گزاره ۲.۲ یک دنباله $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اشتقاق‌های موضعی روی $\mathfrak{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که $(n+1)\Phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \Psi_{k+1}\Phi_{n-k}$. طبق فرض هر اشتقاق موضعی Ψ_n یک اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است.

اکنون از استقرا روی n استفاده کرده تا نشان دهیم $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است. برای $n = 0$، داریم $\Phi_0 = I$. فرض کنید برای هر $r \leq n$،

$$\Phi_r(\langle x, y\rangle z) = \sum_{i+j+k=r} \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z).$$

آنگاه برای $n+1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&(n+1)\Phi_{n+1}(\langle x, y\rangle z)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \Psi_{\ell+1}\Phi_{n-\ell}(\langle x, y\rangle z) = \sum_{\ell=0}^{n} \Psi_{\ell+1} \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z))\\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{i+j+k=n-\ell} \Big(\langle \Psi_{\ell+1}\Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1}\Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \psi_{\ell+1}\Phi_k(z)\Big)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{i+j+k=n-\ell} \Big(\langle \Psi_{\ell+1}\Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z)\Big) + \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{i+j+k=n-\ell} \Big(\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1}\Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z)\Big)\\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{i+j+k=n-\ell} \Big(\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Psi_{\ell+1}\Phi_k(z)\Big).
\end{aligned}$$

اگر در مجموع اول قرار دهیم $i + \ell = r$، در مجموع دوم قرار دهیم $j + \ell = r$، و در مجموع سوم قرار دهیم $k + \ell = r$، آنگاه برای هر $x, y, z \in \mathfrak{M}$ داریم

$$\begin{aligned}
&(n+1)\Phi_{n+1}(\langle x, y\rangle z)\\
&= \sum_{r+j+k=n} \sum_{\ell=0}^{r} \Big(\langle \Psi_{\ell+1}\Phi_{r-\ell}(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z)\Big) + \sum_{i+r+k=n} \sum_{\ell=0}^{r} \Big(\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1}\Phi_{r-\ell}(y)\rangle \Phi_k(z)\Big)\\
&\quad + \sum_{i+j+r=n} \sum_{\ell=0}^{r} \Big(\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Psi_{\ell+1}\Phi_{r-\ell}(z)\Big)\\
&= \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^{i} \Big(\langle \Psi_{\ell+1}\Phi_{i-\ell}(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z)\Big) + \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^{j} \Big(\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1}\Phi_{j-\ell}(y)\rangle \Phi_k(z)\Big)\\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^{k} \Big(\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle \Psi_{\ell+1}\Phi_{k-\ell}(z)\Big)\\
&= \sum_{i+j+k=n} \Big(\langle (i+1)\Phi_{i+1}(x), \Phi_j(y)\rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), (j+1)\Phi_{j+1}(y)\rangle \Phi_k(z)\\
&\qquad + \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y)\rangle (k+1)\Phi_{k+1}(z)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i+j+k=n+۱} \Big(\langle i\Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), j\Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle k\Phi_k(z) \Big) \\
&= \sum_{i+j+k=n+۱} (i+j+k) \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) \\
&= (n+۱) \sum_{i+j+k=n+۱} \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z).
\end{aligned}$$

بنابراین $\{\Phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک ابراشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

ساکائی در [۱۷] ثابت کرد که هر اشتقاق روی یک C^*-جبر به‌طور خودکار پیوسته است. در قضیه بعد فرض می‌کنیم C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ یک C^*-جبر است. در این صورت با استفاده از قضیه ساکائی، نتیجه مشابهی را در مورد اشتقاق‌ها روی C^*-جبرهای یک‌دار ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-جبر یک‌دار باشد. در این صورت هر اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ به‌طور خودکار پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-جبر یک‌دار با عنصر یکه e بوده و ψ یک اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ باشد. یعنی برای هر $a, b, c \in \mathfrak{M}$،

$$\psi(\langle a, b \rangle c) = \langle \psi(a), b \rangle c + \langle a, \psi(b) \rangle c + \langle a, b \rangle \psi(c).$$

از آنجا که هر C^*-جبر $\mathfrak{A}$ یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت با ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle a, b \rangle = ab^*$ است که در آن $a, b \in \mathfrak{A}$، برای هر $a, b, c \in \mathfrak{M}$ داریم

$$\psi(ab^*c) = \psi(a)b^*c + a\psi(b)^*c + ab^*\psi(c). \qquad (۱.۲)$$

با قراردادن $a = b = c = \mathrm{e}$ در رابطه (۱.۲) نتیجه می‌شود $\psi(\mathrm{e})^* + \psi(\mathrm{e}) = ۰$، یا به عبارتی $\psi(\mathrm{e})^* = -\psi(\mathrm{e})$. نگاشت δ را با ضابطه

$$\delta(a) = \psi(a) - \frac{۱}{۲}\big(\psi(\mathrm{e})a + a\psi(\mathrm{e})\big)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $a, b \in \mathfrak{M}$ داریم

$$\begin{aligned}
\delta(ab) &= \psi(ab) - \frac{۱}{۲}\big(\psi(\mathrm{e})ab + ab\psi(\mathrm{e})\big) \\
&= \psi(a\mathrm{e}^*b) - \frac{۱}{۲}\big(\psi(\mathrm{e})ab + ab\psi(\mathrm{e})\big) \\
&= \psi(a)\mathrm{e}^*b + a\psi(\mathrm{e})^*b + a\mathrm{e}^*\psi(b) - \frac{۱}{۲}\big(\psi(\mathrm{e})ab + ab\psi(\mathrm{e})\big) \\
&= \psi(a)b - a\psi(\mathrm{e})b + a\psi(b) - \frac{۱}{۲}\psi(\mathrm{e})ab - \frac{۱}{۲}ab\psi(\mathrm{e}) \\
&= \psi(a)b - \frac{۱}{۲}\psi(\mathrm{e})ab - \frac{۱}{۲}a\psi(\mathrm{e})b + a\psi(b) - \frac{۱}{۲}a\psi(\mathrm{e})b - \frac{۱}{۲}ab\psi(\mathrm{e}) \\
&= \Big(\psi(a) - \frac{۱}{۲}\psi(\mathrm{e})a - \frac{۱}{۲}a\psi(\mathrm{e})\Big)b + a\Big(\psi(b) - \frac{۱}{۲}\psi(\mathrm{e})b - \frac{۱}{۲}b\psi(\mathrm{e})\Big) \\
&= \delta(a)b + a\delta(b).
\end{aligned}$$

بنابراین δ یک اشتقاق روی C^*-جبر $\mathfrak{M}$ است که بنابر قضیه ساکائی [۱۷] به‌طور خودکار پیوسته است. از این رو اشتقاق

$$\psi(a) = \delta(a) + \frac{۱}{۲}\big(\psi(\mathrm{e})a + a\psi(\mathrm{e})\big)$$

نیز روی C^*-جبر $\mathfrak{M}$ به‌طور خودکار پیوسته است. $\square$

نتیجه ۵.۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک C^*-جبر یک‌دار باشد. هر ابراشتقاق موضعی $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $\mathfrak{M}$ با $\Phi_0 = I$، به‌طور خودکار پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ با $\Phi_0 = I$ باشد. طبق گزاره ۲.۲ یک دنباله $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اشتقاق‌های موضعی روی $\mathfrak{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Phi_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \Psi_{k+1}\Phi_{n-k}$. از آنجا که هر اشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر یک اشتقاق است، نتیجه می‌گیریم که هر Ψ_n یک اشتقاق روی $\mathfrak{M}$ است. اکنون قضیه ۴.۲ نتیجه می‌دهد که هر Ψ_n به‌طور خودکار پیوسته است. بنابراین هر Φ_n $(n \geq 1)$ به عنوان یک ترکیب خطی از ترکیب‌های نگاشت‌های پیوسته، پیوسته است. □

۳ نتیجه گیری

در این مقاله نشان دادیم که اگر C^*-مدول هیلبرت $\mathfrak{M}$ یک C^*-جبر باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی $\mathfrak{M}$ یک ابراشتقاق است. همچنین ثابت کردیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک C^*-جبر یک‌دار به‌طور خودکار پیوسته است.

فهرست منابع

[1] Dales, H. G., 1978. Automatic continuity: a survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 10(2) pp.129–183. doi: 10.1112/blms/10.2.129

[2] Dales, H. G., 2000. Banach algebras and automatic continuity. *London Mathematical Society Monographs. New Series, 24. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.*

[3] Ekrami, S. Kh., 2024. A note on characterization of higher derivations and their product. *Journal of Mahani Mathematical Research*, 13(1) pp.403–415. doi: 10.22103/jmmr.2023.21376.1432

[4] Ekrami, S. Kh., 2022. Approximate orthogonally higher ring derivations. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 7(1) pp.93–106. doi: 10.30473/coam.2021.59727.1166

[5] Ekrami, S. Kh., 2023. Characterization of Hilbert C*-module higher derivations. *Georgian Mathematical Journal*. https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2085

[6] Ekrami, S. Kh., 2022. Jordan higher derivations, a new approach. *Journal of Algebraic Systems*, 10(1) pp.167–177. doi: 10.22044/JAS.2021.10636.1527

[7] Hasse, H. and Schmidt, F.K., 1937. Noch eine Begrüdung der theorie der höheren Differential quotienten in einem algebraischen Funtionenkörper einer Unbestimmeten. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 177 pp.215-237.

[8] Jewell, N.P., 1977. Continuity of module and higher derivations. *Pacific Journal of Mathematics*, 68 pp.91–98.

[9] Johnson, B.E., 2001, Local derivations on C*-algebras are derivations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353 pp.313–325. doi: 10.2307/221975

[10] Johnson, B.E. and Sinclair, A.M., 1968. Continuity of derivations and a problem of Kaplansky. *American Journal of Mathematics*, 90 pp.1067–1073. doi: 10.2307/2373290

[11] Kaplansky, I., 1953. Modules Over Operator Algebras. *American Journal of Mathematics*, 75 pp.839–858. doi: 10.2307/2372552

[12] Loy, R.J., 1973. Continuity of higher derivations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5 pp.505–510. doi: 10.2307/2039472

[13] Mirzavaziri, M., 2010. Characterization of higher derivations on algebras. *Communications in Algebra*, 38 pp.981–987. doi: 10.1080/00927870902828751

[14] Naranjania, L., Hassani, M. and Mirzavaziri, M., 2018. Local higher derivations on C^*- algebras are higher derivations. *International journal of nonlinear analysis and applications.*, 9(1) pp.111–115. doi: 10.22075/ijnaa.2018.3098

[15] Ringrose, J.R., 1972. Automatic continuity of derivations of operator algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 5(2) pp.432–438.

[16] Roy, A. and Sridharan, R., 1968. Higher derivations and central simple algebras. *Nagoya Mathematical Journal*, 32 pp.21–30.

[17] Sakai, S., 1960. On a conjecture of Kaplansky. *Tohoku Mathematical Journal*, 12 pp.31–33.

[18] Sinclair, A.M., 1976. Automatic continuity of linear operators. *London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 21, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne*.

Local higher derivations on Hilbert C*-modules

Sayed Khalil Ekrami [2]

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box 19395-3697, Tehran, Iran.

Communicated by: Amir Hossein Sanatpour

Received: 27 July 2023 Accepted: 23 January 2024

Abstract: A sequence of continuous linear mappings $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ form a Hilbert C*-module $\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{M}$ is called a *local higher derivation* if to each $a \in \mathfrak{M}$ there is a continuous higher derivation $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$ on $\mathfrak{M}$ such that $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$ for each non-negative integer n. In this paper we show that if $\mathfrak{M}$ is a Hilbert C*-module such that every local derivation on $\mathfrak{M}$ is a derivation, then each local higher derivation on $\mathfrak{M}$ is a higher derivation. Also, we prove that each local higher derivation on a unital C*-algebra is automatically continuous.

Keywords: Hilbert C*-module; higher derivation; local higher derivation; derivation; local derivation.

[2]Corresponding author.

E-mail address: (S. Kh. Ekrami) ekrami@pnu.ac.ir