



## ابراشتقاق‌های موضعی روی $C^*$ -مدول‌های هیلبرت

سید خلیل اکرامی<sup>۱</sup>

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت‌پور

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۵

چکیده: یک دنباله از نگاشت‌های خطی پیوسته  $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  از  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{M}$  یک ابراشتقاق پیوسته  $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$  روی  $\mathcal{M}$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$ . در این مقاله نشان خواهیم داد که اگر  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت باشد به طوری که هر اشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  یک اشتقاق باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق است. همچنین نشان می‌دهیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر یک‌دار به طور خودکار پیوسته است.

واژه‌های کلیدی:  $C^*$ -مدول هیلبرت، ابراشتقاق، اشتقاق، ابراشتقاق موضعی، اشتقاق موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 16W25, 46L57, 47B47, 46H40.

## ۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید  $\mathcal{A}$  یک جبر باشد. نگاشت خطی  $d$  روی  $\mathcal{A}$  را یک اشتقاق می‌نامیم، اگر رابطه  $d(xy) = d(x)y + xd(y)$  برای هر  $x, y \in \mathcal{A}$  برقرار باشد. یک دنباله از نگاشت‌های خطی  $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$  با  $D_0 = I$  روی  $\mathcal{A}$  را یک ابراشتقاق می‌نامیم، اگر برای هر  $x, y \in \mathcal{A}$  رابطه

$$D_n(xy) = \sum_{i=0}^n D_i(x)D_{n-i}(y)$$

به ازای هر عدد صحیح نامنفی  $n$  برقرار باشد. میرزاویری در [۱۳] ثابت کرد که یک تناظر یک به یک بین ابراشتقاق‌ها روی یک جبر  $\mathcal{A}$  و دنباله‌های اشتقاق‌ها روی  $\mathcal{A}$  وجود دارد. او ثابت کرد که به ازای هر ابراشتقاق  $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$  با  $D_0 = I$  روی  $\mathcal{A}$  دنباله‌ای منحصر به فرد از اشتقاق‌های  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  روی  $\mathcal{A}$  وجود دارد به طوری که

$$D_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sum_{j=1}^i r_j = n} \left( \prod_{j=1}^i \frac{1}{r_j + \dots + r_i} \right) d_{r_1} \dots d_{r_i} \right).$$

اکرامی [۳] در مورد دنباله اشتقاق‌های متناظر با یک ابراشتقاق داخلی روی جبر یک‌دار  $\mathcal{A}$  تحقیقاتی انجام داد. او نشان داد که اگر  $p = \{p_n\}_{n=0}^\infty$  و  $q = \{q_n\}_{n=0}^\infty$  دو دنباله در  $\mathcal{A}$  باشند به طوری که  $\mathcal{A} = \mathcal{A} = q_0 = p_0$  و برای هر عدد طبیعی  $n$ ,

$$(p * q)_n = \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i} = 0, \quad (q * p)_n = \sum_{i=0}^n q_i p_{n-i} = 0,$$

و  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  یک ابراشتقاق باشد که با ضابطه

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i x q_{n-i}$$

برای هر  $x \in \mathcal{A}$  تعریف شده باشد، آنگاه دنباله اشتقاق‌های  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  متناظر با  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  دنباله‌ای از اشتقاق‌های داخلی خواهد بود که برای هر  $x \in \mathcal{A}$  در رابطه

$$d_n(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sum_{j=1}^i r_j = n} (-1)^{i-1} r_1 p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_i} \right) x \\ + x \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sum_{j=1}^i r_j = n} (-1)^{i-1} r_i q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_i} \right)$$

به ازای هر عدد طبیعی  $n$  صدق می‌کند.

در این مقاله در مورد اشتقاق‌های موضعی روی جبرهای باناخ بحث خواهیم کرد. یک نگاهت خطی پیوسته  $D$  از جبر باناخ  $\mathcal{A}$  به  $\mathcal{A}$  یک اشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{A}$  یک اشتقاق  $d_a$  از  $\mathcal{A}$  به  $\mathcal{A}$  (وابسته به  $a$ ) وجود داشته باشد به طوری که  $D(a) = d_a(a)$ . توجه کنید که منظور از اشتقاق  $d_a$  یک اشتقاق داخلی نیست. جانسون [۹] ثابت کرد که هر اشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر، یک اشتقاق است. همچنین او نشان داد هنگامی که  $\mathcal{A}$  یک  $C^*$ -جبر است، می‌توان فرض پیوستگی را در تعریف اشتقاق موضعی حذف نمود.

نارنجانی و دیگران در [۱۴] مفهوم ابراشتقاق موضعی روی جبرهای باناخ را تعریف کردند. یک دنباله  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  از نگاهت‌های خطی پیوسته از جبر باناخ  $\mathcal{A}$  به  $\mathcal{A}$  یک ابراشتقاق موضعی نامیده می‌شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{A}$  یک ابراشتقاق پیوسته  $\{d_{a,n}\}_{n=0}^\infty$  از  $\mathcal{A}$  به  $\mathcal{A}$  (وابسته به  $a$ ) وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد صحیح نامنفی  $n$ ،  $D_n(a) = d_{a,n}(a)$ . آنها ثابت کردند هنگامی که  $\mathcal{A}$  یک  $C^*$ -جبر است، هر ابراشتقاق موضعی روی  $\mathcal{A}$ ، یک ابراشتقاق است و به علاوه هر ابراشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر به طور خودکار پیوسته است.

با انگیزه از مفهوم ابر اشتقاق موضعی روی جبرهای باناخ [۱۴]، مفهوم ابراشتقاق موضعی روی  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت را معرفی می‌کنیم.  $C^*$ -مدول هیلبرت یک تعمیم از فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی مقادیر خود را از یک  $C^*$ -جبر می‌گیرد [۱۱]. در ابتدا مفهوم  $C^*$ -مدول هیلبرت را بیان می‌کنیم.

فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $C^*$ -جبر باشد. فضای خطی مختلط  $\mathfrak{M}$  را که یک  $\mathfrak{M}$ -مدول چپ با ضرب اسکالر سازگار

$$\lambda(ax) = (\lambda a)x = a(\lambda x) \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathfrak{M}, a \in \mathfrak{A})$$

است، یک  $\mathfrak{M}$ -مدول ضرب داخلی می‌نامیم، اگر یک ضرب داخلی  $\mathfrak{M}$ -مقدار  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} : \langle \cdot, \cdot \rangle$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x, y, z \in \mathfrak{M}$  و  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ،  $a \in \mathfrak{A}$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (i)$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad (ii)$$

$$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \quad (iii)$$

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \quad (iv)$$

از این تعریف نتیجه می شود که ضرب داخلی در متغیر دوم خود مزدوج خطی است و به ازای هر  $x, y \in \mathcal{M}$  و  $a \in \mathcal{A}$  هیلبرت یا یک  $C^*$ -مدول هیلبرت روی  $C^*$ -جبر  $\mathcal{A}$  می نامیم. برای مثال، هر  $C^*$ -جبر  $\mathcal{A}$  یک  $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت با ضرب داخلی  $\mathcal{A}$ -مقدار  $\langle x, ay \rangle = \langle x, y \rangle a^*$  است که در آن  $a, b \in \mathcal{A}$ . هر فضای هیلبرت مختلط یک  $C$ -مدول هیلبرت (چپ) است. فرض کنید  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت باشد. نگاشت خطی  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  یک اشتقاق نامیده می شود، اگر در رابطه

$$\psi(\langle x, y \rangle z) = \langle \psi(x), y \rangle z + \langle x, \psi(y) \rangle z + \langle x, y \rangle \psi(z)$$

برای هر  $x, y, z \in \mathcal{M}$  صدق کند. یک دنباله از نگاشت های خطی  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  از  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}$  با  $I = \varphi_0$  (نگاشت همانی روی  $\mathcal{M}$ )، یک ابراشتقاق نامیده می شود، اگر برای هر  $x, y, z \in \mathcal{M}$  و هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم

$$\varphi_n(\langle x, y \rangle z) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ * \leq i, j, k \leq n}} \langle \varphi_i(x), \varphi_j(y) \rangle \varphi_k(z).$$

اکرامی در [۵] یک مشخص سازی از ابراشتقاق ها روی  $C^*$ -مدول های هیلبرت ارائه کرد. او نشان داد که به ازای هر ابراشتقاق  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  روی  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathcal{M}$  دنباله ای منحصر به فرد از اشتقاق های  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  روی  $\mathcal{M}$  وجود دارد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم

$$\psi_n = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sum_{j=1}^k r_j = n} (-1)^{k-1} r_1 \varphi_{r_1} \varphi_{r_2} \dots \varphi_{r_k} \right).$$

نگاشت خطی پیوسته  $\Psi$  روی  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathcal{M}$  یک اشتقاق موضعی نامیده می شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{M}$  یک اشتقاق  $\psi_a$  روی  $\mathcal{M}$  وابسته به  $a$  وجود داشته باشد به طوری که  $\Psi(a) = \psi_a(a)$ . یک دنباله از نگاشت های خطی پیوسته  $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  روی  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق موضعی نامیده می شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{M}$  یک ابراشتقاق پیوسته  $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$  روی  $\mathcal{M}$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$ .

در این مقاله نشان خواهیم داد که اگر  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت باشد به طوری که هر اشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  یک اشتقاق باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق است. همچنین نشان می دهیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر یک دار به طور خودکار پیوسته است.

برای بحث در مورد اشتقاق ها، ابراشتقاق ها و تعمیم های آن ها خواننده می تواند به [۴، ۶-۸، ۱۲، ۱۳] و [۱۶] و برای بحث در مورد پیوستگی خودکار اشتقاق ها و موضوعات وابسته به آن، به [۱، ۲، ۱۰، ۱۵] و [۱۸] رجوع نماید.

## ۲ نتایج

فرض کنید  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت باشد. یک دنباله از نگاشت های خطی  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  از  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}$  با  $I = \varphi_0$  (نگاشت همانی روی  $\mathcal{M}$ )، یک ابراشتقاق نامیده می شود، اگر برای هر  $x, y, z \in \mathcal{M}$  و هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم

$$\varphi_n(\langle x, y \rangle z) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ * \leq i, j, k \leq n}} \langle \varphi_i(x), \varphi_j(y) \rangle \varphi_k(z).$$

ابراشتقاق  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  پیوسته نامیده می شود، اگر هر  $\varphi_n$  پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت باشد. یک دنباله از نگاشت های خطی پیوسته  $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  از  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق موضعی نامیده می شود، اگر برای هر  $a \in \mathcal{M}$  یک ابراشتقاق پیوسته  $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^{\infty}$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$ .

گزاره ۲.۲. فرض کنید  $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  یک ابراشتقاق موضعی از یک  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}$  با  $I = \Phi_0$  باشد. آنگاه یک دنباله  $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  از اشتقاق های موضعی روی  $\mathcal{M}$  وجود دارد به طوری که برای هر عدد طبیعی  $n$

$$(n+1)\Phi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \Psi_{k+1} \Phi_{n-k}.$$

اثبات. فرض کنید  $a$  یک عضو  $\mathfrak{M}$  باشد. چون  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  یک ابراشتقاق موضعی است، یک ابراشتقاق پیوسته  $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^\infty$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $n$   $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$ .

از استقرای روی  $n$  استفاده می‌کنیم. برای  $n = 1$  اگر  $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} : \Psi_1$  به صورت  $\Psi_1 = \Phi_1$  روی  $\mathfrak{M}$  تعریف شود، آنگاه  $\Psi_1$  یک اشتقاق موضعی روی  $\mathfrak{M}$  است. چون  $\Psi_1(a) = \Phi_1(a) = \varphi_{a,1}(a)$  و  $\varphi_{a,1}$  یک اشتقاق پیوسته روی  $\mathfrak{M}$  است. اکنون فرض کنید  $\Psi_k$  تعریف شده و برای هر  $k \leq n$  یک اشتقاق موضعی باشد. در این صورت، به طور استقرایی می‌توان فرض کرد که برای هر  $k \leq n$  یک اشتقاق  $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} : \psi_{a,k}$  وجود دارد که با رابطه

$$\psi_{a,k} = k\varphi_{a,k} - \sum_{i=0}^{k-2} \psi_{a,i+1}\varphi_{a,k-1-i}$$

تعریف می‌شود به طوری که  $\Psi_k(a) = \psi_{a,k}(a)$  با قرار دادن

$$\Psi_{n+1} = (n+1)\Phi_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_{k+1}\Phi_{n-k}$$

نشان می‌دهیم که  $\Psi_{n+1}$  یک اشتقاق موضعی روی  $\mathfrak{M}$  است. برای این کار فرض کنیم

$$\psi_{a,n+1} = (n+1)\varphi_{a,n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{a,k+1}\varphi_{a,n-k}.$$

آشکار است که  $\Psi_{n+1}(a) = \psi_{a,n+1}(a)$ . نشان می‌دهیم که  $\psi_{a,n+1}$  یک اشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  است. برای  $x, y, z \in \mathfrak{M}$  داریم:

$$\begin{aligned} & \psi_{a,n+1}(\langle x, y \rangle z) \\ &= (n+1)\varphi_{a,n+1}(\langle x, y \rangle z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,n-\ell}(\langle x, y \rangle z) \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=n+1 \\ 0 \leq i,j,k \leq n+1}} (n+1)\langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_{a,\ell+1} \left( \sum_{\substack{p+q+r=n-\ell \\ 0 \leq p,q,r \leq n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z) \right). \end{aligned}$$

چون  $i+j+k = n+1$  و  $\psi_{a,1}, \psi_{a,2}, \dots, \psi_{a,n}$  اشتقاق‌هایی روی  $\mathfrak{M}$  هستند، داریم:

$$\begin{aligned} & \psi_{a,n+1}(\langle x, y \rangle z) \\ &= \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} (i+j+k)\langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r \\ =n-\ell}} \psi_{a,\ell+1} \left( \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z) \right) \\ &= \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) + \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), j\varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) + \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle k\varphi_{a,k}(z) \\ & \quad - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r \\ =n-\ell}} \left( \langle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z) + \langle \varphi_{a,p}(x), \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z) \right. \\ & \quad \left. + \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \psi_{a,\ell+1}\varphi_{a,r}(z) \right). \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم

$$A = \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r \\ =n-\ell}} \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z),$$

$$B = \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), j\varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r \\ =n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,q}(y) \rangle \varphi_{a,r}(z),$$

$$C = \sum_{\substack{i+j+k \\ =n+1}} \langle \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle k\varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q+r \\ =n-\ell}} \langle \varphi_{a,p}(x), \varphi_{a,q}(y) \rangle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,r}(z),$$

آنگاه  $\psi_{a,n+1}(\langle x, y \rangle z) = A + B + C$  اکنون  $A, B$  و  $C$  را محاسبه می کنیم. داریم

$$A = \sum_{\substack{i+j+k=n+1 \\ \circ \leq i, j, k \leq n+1}} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{i+j+k=n-\ell \\ \circ \leq i, j, k \leq n-\ell}} \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z).$$

در مجموع دوم، داریم  $\circ \leq \ell \leq n-1$ ،  $\circ \leq i, j, k \leq n-\ell$  و  $i+j+k+\ell = n$  و  $i \neq n$  بنابراین اگر قرار دهیم  $i+\ell = r$  و در نتیجه

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i+j+k=n+1} \langle i\varphi_{a,i}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{r+j+k=n} \sum_{\substack{\ell=\circ \\ \ell \neq n}}^r \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,r-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) \\ &= \sum_{i+j+k=n} \langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{i+j+k=n} \sum_{\substack{\ell=\circ \\ \ell \neq n}}^i \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i \neq n}} \langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) - \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i \neq n}} \sum_{\substack{\ell=\circ \\ \ell \neq n}}^i \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y) \rangle \varphi_{a,k}(z) \\ &\quad + \langle (n+1)\varphi_{a,n+1}(x), y \rangle z - \sum_{\ell=\circ}^{n-1} \langle \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,n-\ell}(x), y \rangle z \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i \neq n}} \left\langle (i+1)\varphi_{a,i+1}(x) - \sum_{\ell=\circ}^i \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,i-\ell}(x), \varphi_{a,j}(y) \right\rangle \varphi_{a,k}(z) \\ &\quad + \left\langle (n+1)\varphi_{a,n+1}(x) - \sum_{\ell=\circ}^{n-1} \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,n-\ell}(x), y \right\rangle z. \end{aligned}$$

چون برای هر  $i = \circ, 1, \dots, n-1$

$$(i+1)\varphi_{a,i+1} = \sum_{\ell=\circ}^i \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,i-\ell},$$

داریم

$$A = \left\langle \left( (n+1)\varphi_{a,n+1} - \sum_{\ell=\circ}^{n-1} \psi_{a,\ell+1} \varphi_{a,n-\ell} \right) (x), y \right\rangle z = \langle \psi_{a,n+1}(x), y \rangle z.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که  $B = \langle x, \psi_{a,n+1}(y) \rangle z$  و  $C = \langle x, y \rangle \psi_{a,n+1}(z)$ . بنابراین برای هر  $x, y, z \in \mathfrak{M}$

$$\psi_{a,n+1}(\langle x, y \rangle z) = A + B + C = \langle \psi_{a,n+1}(x), y \rangle z + \langle x, \psi_{a,n+1}(y) \rangle z + \langle x, y \rangle \psi_{a,n+1}(z).$$

به عبارت دیگر  $\psi_{a,n+1}$  نیز یک اشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  است. این اثبات را کامل می‌کند.  $\square$

قضیه ۳.۲. فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $C^*$ -مدول هیلبرت است به‌طوری‌که هر اشتقاق موضعی روی  $\mathfrak{M}$  یک اشتقاق می‌باشد. در این صورت هر ابراشتقاق موضعی روی  $\mathfrak{M}$  یک ابراشتقاق می‌باشد.

اثبات. فرض کنید  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  یک ابراشتقاق موضعی روی  $\mathfrak{M}$  با  $I \Phi_0 = \Phi_0$  باشد. طبق گزاره ۲.۲ یک دنباله  $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$  از اشتقاق‌های موضعی روی  $\mathfrak{M}$  وجود دارد به‌طوری‌که  $(n+1)\Phi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \Psi_{k+1} \Phi_{n-k}$ . طبق فرض هر اشتقاق موضعی  $\Psi_n$  یک اشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  است.

اکنون از استقرا روی  $n$  استفاده کرده تا نشان دهیم  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  یک ابراشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  است. برای  $n=0$  داریم  $\Phi_0 = I$ . فرض کنید برای هر  $r \leq n$

$$\Phi_r(\langle x, y \rangle z) = \sum_{i+j+k=r} \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z).$$

آنگاه برای  $n+1$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & (n+1)\Phi_{n+1}(\langle x, y \rangle z) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \Psi_{\ell+1} \Phi_{n-\ell}(\langle x, y \rangle z) = \sum_{\ell=0}^n \Psi_{\ell+1} \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z)) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Psi_{\ell+1} \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1} \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Psi_{\ell+1} \Phi_k(z)) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Psi_{\ell+1} \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z)) + \sum_{\ell=0}^n \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1} \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z)) \\ &+ \sum_{\ell=0}^n \sum_{i+j+k=n-\ell} (\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Psi_{\ell+1} \Phi_k(z)). \end{aligned}$$

اگر در مجموع اول قرار دهیم  $i + \ell = r$  در مجموع دوم قرار دهیم  $j + \ell = r$  و در مجموع سوم قرار دهیم  $k + \ell = r$  آنگاه برای هر  $x, y, z \in \mathfrak{M}$  داریم

$$\begin{aligned} & (n+1)\Phi_{n+1}(\langle x, y \rangle z) \\ &= \sum_{r+j+k=n} \sum_{\ell=0}^r (\langle \Psi_{\ell+1} \Phi_{r-\ell}(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z)) + \sum_{i+r+k=n} \sum_{\ell=0}^r (\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1} \Phi_{r-\ell}(y) \rangle \Phi_k(z)) \\ &+ \sum_{i+j+r=n} \sum_{\ell=0}^r (\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Psi_{\ell+1} \Phi_{r-\ell}(z)) \\ &= \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^i (\langle \Psi_{\ell+1} \Phi_{i-\ell}(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z)) + \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^j (\langle \Phi_i(x), \Psi_{\ell+1} \Phi_{j-\ell}(y) \rangle \Phi_k(z)) \\ &+ \sum_{i+j+k=n} \sum_{\ell=0}^k (\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Psi_{\ell+1} \Phi_{k-\ell}(z)) \\ &= \sum_{i+j+k=n} (\langle (i+1)\Phi_{i+1}(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), (j+1)\Phi_{j+1}(y) \rangle \Phi_k(z) \\ &+ \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle (k+1)\Phi_{k+1}(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i+j+k=n+1} \left( \langle i\Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), j\Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) + \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle k\Phi_k(z) \right) \\
&= \sum_{i+j+k=n+1} (i+j+k) \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z) \\
&= (n+1) \sum_{i+j+k=n+1} \langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle \Phi_k(z).
\end{aligned}$$

□ بنابراین  $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  یک ابراشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  است و اثبات کامل می شود.

ساکائی در [۱۷] ثابت کرد که هر اشتقاق روی یک  $C^*$ -جبر به طور خودکار پیوسته است. در قضیه بعد فرض می کنیم  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathfrak{M}$  یک  $C^*$ -جبر است. در این صورت با استفاده از قضیه ساکائی، نتیجه مشابهی را در مورد اشتقاق ها روی  $C^*$ -جبرهای یک دار ثابت می کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $C^*$ -جبر یک دار باشد. در این صورت هر اشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  به طور خودکار پیوسته است.

اثبات. فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $C^*$ -جبر یک دار با عنصر یکه  $e$  بوده و  $\psi$  یک اشتقاق روی  $\mathfrak{M}$  باشد. یعنی برای هر  $a, b, c \in \mathfrak{M}$

$$\psi(\langle a, b \rangle c) = \langle \psi(a), b \rangle c + \langle a, \psi(b) \rangle c + \langle a, b \rangle \psi(c).$$

از آنجا که هر  $C^*$ -جبر  $\mathfrak{A}$  یک  $\mathfrak{A}$ -مدول هیلبرت با ضرب داخلی  $\mathfrak{A}$ -مقدار  $\langle a, b \rangle = ab^*$  است که در آن  $a, b \in \mathfrak{A}$  برای هر  $a, b, c \in \mathfrak{M}$  داریم

$$\psi(ab^*c) = \psi(a)b^*c + a\psi(b)^*c + ab^*\psi(c). \quad (۱.۲)$$

با قراردادن  $a = b = c = e$  در رابطه (۱.۲) نتیجه می شود  $\psi(e) + a\psi(e)^* = -\psi(e)$  یا به عبارتی  $\psi(e)^* = -\psi(e)$ . نگاشت  $\delta$  را با ضابطه

$$\delta(a) = \psi(a) - \frac{1}{\psi}(\psi(e)a + a\psi(e))$$

تعریف می کنیم. در این صورت برای هر  $a, b \in \mathfrak{M}$  داریم

$$\begin{aligned}
\delta(ab) &= \psi(ab) - \frac{1}{\psi}(\psi(e)ab + ab\psi(e)) \\
&= \psi(ae^*b) - \frac{1}{\psi}(\psi(e)ab + ab\psi(e)) \\
&= \psi(a)e^*b + a\psi(e)^*b + ae^*\psi(b) - \frac{1}{\psi}(\psi(e)ab + ab\psi(e)) \\
&= \psi(a)b - a\psi(e)b + a\psi(b) - \frac{1}{\psi}\psi(e)ab - \frac{1}{\psi}ab\psi(e) \\
&= \psi(a)b - \frac{1}{\psi}\psi(e)ab - \frac{1}{\psi}a\psi(e)b + a\psi(b) - \frac{1}{\psi}a\psi(e)b - \frac{1}{\psi}ab\psi(e) \\
&= \left( \psi(a) - \frac{1}{\psi}\psi(e)a - \frac{1}{\psi}a\psi(e) \right) b + a \left( \psi(b) - \frac{1}{\psi}\psi(e)b - \frac{1}{\psi}b\psi(e) \right) \\
&= \delta(a)b + a\delta(b).
\end{aligned}$$

بنابراین  $\delta$  یک اشتقاق روی  $C^*$ -جبر  $\mathfrak{M}$  است که بنابر قضیه ساکائی [۱۷] به طور خودکار پیوسته است. از این رو اشتقاق

$$\psi(a) = \delta(a) + \frac{1}{\psi}(\psi(e)a + a\psi(e))$$

□ نیز روی  $C^*$ -جبر  $\mathfrak{M}$  به طور خودکار پیوسته است.

نتیجه ۵.۲. فرض کنید  $\mathcal{M}$  یک  $C^*$ -جبر یک‌دار باشد. هر ابراشتقاق موضعی  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  روی  $\mathcal{M}$  با  $I = \Phi_0$ ، به‌طور خودکار پیوسته است.

اثبات. فرض کنید  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  یک ابراشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  با  $I = \Phi_0$  باشد. طبق گزاره ۲.۲ یک دنباله  $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$  از اشتقاق‌های موضعی روی  $\mathcal{M}$  وجود دارد به‌طوری که  $\Phi_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \Psi_{k+1} \Phi_{n-k}$ . از آنجا که هر اشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر یک اشتقاق است، نتیجه می‌گیریم که هر  $\Psi_n$  یک اشتقاق روی  $\mathcal{M}$  است. اکنون قضیه ۴.۲ نتیجه می‌دهد که هر  $\Psi_n$  به‌طور خودکار پیوسته است. بنابراین هر  $\Phi_n$  ( $n \geq 1$ ) به‌عنوان یک ترکیب خطی از ترکیب‌های نگاشت‌های پیوسته، پیوسته است.  $\square$

### ۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که اگر  $C^*$ -مدول هیلبرت  $\mathcal{M}$ ، یک  $C^*$ -جبر باشد، آنگاه هر ابراشتقاق موضعی روی  $\mathcal{M}$  یک ابراشتقاق است. همچنین ثابت کردیم که هر ابراشتقاق موضعی روی یک  $C^*$ -جبر یک‌دار به‌طور خودکار پیوسته است.

### فهرست منابع

- [1] Dales, H. G., 1978. Automatic continuity: a survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 10(2) pp.129–183. doi: 10.1112/blms/10.2.129
- [2] Dales, H. G., 2000. Banach algebras and automatic continuity. *London Mathematical Society Monographs. New Series, 24. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*.
- [3] Ekrami, S. Kh., 2024. A note on characterization of higher derivations and their product. *Journal of Mahani Mathematical Research*, 13(1) pp.403–415. doi: 10.22103/jmmr.2023.21376.1432
- [4] Ekrami, S. Kh., 2022. Approximate orthogonally higher ring derivations. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 7(1) pp.93–106. doi: 10.30473/coam.2021.59727.1166
- [5] Ekrami, S. Kh., 2023. Characterization of Hilbert  $C^*$ -module higher derivations. *Georgian Mathematical Journal*. <https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2085>
- [6] Ekrami, S. Kh., 2022. Jordan higher derivations, a new approach. *Journal of Algebraic Systems*, 10(1) pp.167–177. doi: 10.22044/JAS.2021.10636.1527
- [7] Hasse, H. and Schmidt, F.K., 1937. Noch eine Begründung der theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionkörper einer Unbestimmten. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 177 pp.215-237.
- [8] Jewell, N.P., 1977. Continuity of module and higher derivations. *Pacific Journal of Mathematics*, 68 pp.91–98.
- [9] Johnson, B.E., 2001, Local derivations on  $C^*$ -algebras are derivations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353 pp.313–325. doi: 10.2307/221975
- [10] Johnson, B.E. and Sinclair, A.M., 1968. Continuity of derivations and a problem of Kaplansky. *American Journal of Mathematics*, 90 pp.1067–1073. doi: 10.2307/2373290
- [11] Kaplansky, I., 1953. Modules Over Operator Algebras. *American Journal of Mathematics*, 75 pp.839–858. doi: 10.2307/2372552



- [12] Loy, R.J., 1973. Continuity of higher derivations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5 pp.505–510. doi: 10.2307/2039472
- [13] Mirzavaziri, M., 2010. Characterization of higher derivations on algebras. *Communications in Algebra*, 38 pp.981–987. doi: 10.1080/00927870902828751
- [14] Naranjania, L., Hassani, M. and Mirzavaziri, M., 2018. Local higher derivations on  $C^*$ - algebras are higher derivations. *International journal of nonlinear analysis and applications*, 9(1) pp.111–115. doi: 10.22075/ijnaa.2018.3098
- [15] Ringrose, J.R., 1972. Automatic continuity of derivations of operator algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 5(2) pp.432–438.
- [16] Roy, A. and Sridharan, R., 1968. Higher derivations and central simple algebras. *Nagoya Mathematical Journal*, 32 pp.21–30.
- [17] Sakai, S., 1960. On a conjecture of Kaplansky. *Tohoku Mathematical Journal*, 12 pp.31–33.
- [18] Sinclair, A.M., 1976. Automatic continuity of linear operators. *London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 21, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne*.



## Local higher derivations on Hilbert $C^*$ -modules

Sayed Khalil Ekrami<sup>2</sup>

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box 19395-3697, Tehran, Iran.

Communicated by: Amir Hossein Sanatpour

Received: 27 July 2023

Accepted: 23 January 2024

**Abstract:** A sequence of continuous linear mappings  $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$  from a Hilbert  $C^*$ -module  $\mathfrak{M}$  into  $\mathfrak{M}$  is called a *local higher derivation* if to each  $a \in \mathfrak{M}$  there is a continuous higher derivation  $\{\varphi_{a,n}\}_{n=0}^\infty$  on  $\mathfrak{M}$  such that  $\Phi_n(a) = \varphi_{a,n}(a)$  for each non-negative integer  $n$ . In this paper we show that if  $\mathfrak{M}$  is a Hilbert  $C^*$ -module such that every local derivation on  $\mathfrak{M}$  is a derivation, then each local higher derivation on  $\mathfrak{M}$  is a higher derivation. Also, we prove that each local higher derivation on a unital  $C^*$ -algebra is automatically continuous.

**Keywords:** Hilbert  $C^*$ -module; higher derivation; local higher derivation; derivation; local derivation.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>2</sup>Corresponding author.

E-mail address: (S. Kh. Ekrami) [ekrami@pnu.ac.ir](mailto:ekrami@pnu.ac.ir)