



## یک روش ساده و دقیق برای حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از فرمول تفاضلات متناهی مرتبه‌ی دوم

امین جاجرمی<sup>(۱)</sup>، مجتبی حاجی‌پور<sup>(۲)</sup> و لیلا ترک‌زاده<sup>(۳)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران  
<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه مهندسی، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران  
<sup>(۳)</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۳۰

**چکیده:** در این مقاله، یک روش تقریبی ساده و با مرتبه‌ی دقت بالا برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه می‌شود. در این روش، ابتدا با استفاده از شرایط لازم بهینگی مبتنی بر اصل ماکزیم‌یابی پونتریاگین، مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی داده شده به یک مسأله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای تبدیل می‌شود. سپس با اعمال یک فرمول تفاضلات متناهی مرتبه‌ی دوم، مسأله‌ی مقدار مرزی حاصل را گسسته نموده و یک دستگاه معادلات جبری را فرمول‌بندی می‌کنیم. تجزیه و تحلیل همگرایی روش پیشنهادی نیز مورد بحث قرار می‌گیرد و روابط ماتریسی برای سهولت پیاده‌سازی ارائه می‌شود. نتایج عددی به‌دست آمده در این تحقیق با برخی روش‌های دیگر مقایسه می‌شود، که این نتایج مبین دقت، سرعت و کارایی بالای روش پیشنهادی برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی خطی و غیرخطی است.

**واژه‌های کلیدی:** مسأله‌ی کنترل بهینه، اصل ماکزیم‌یابی پونتریاگین، روش تفاضلات متناهی.

**رده‌بندی ریاضی:** 49M05; 65L12

### ۱ مقدمه

کنترل بهینه یکی از زمینه‌های تحقیقاتی فعال در تئوری کنترل بوده که کاربرد آن به دامنه‌ی وسیعی از مسائل مختلف در حوزه‌های مهندسی و غیرمهندسی گسترش پیدا کرده است. در دهه‌های اخیر روش‌های تقریبی مختلفی برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده است. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت [۴]، روش برنامه‌ریزی پویای بلمن [۲]، تکنیک تقریب‌های گلرکین [۱]، نگرش تقریب متوالی [۲۳] و روش تکرار تغییراتی [۲۲] اشاره نمود. همچنین، مقاله‌ی [۹] به ترکیب روش سری مودال و تکنیک تجزیه‌ی

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

مقادیر ویژه برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه‌ی غیرخطی می‌پردازد. مقاله‌ی [۱۲] نیز یک رویکرد پردازش موازی برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های کامپوزیت غیرخطی پیشنهاد می‌دهد. به‌علاوه، مرجع [۱۹] به ارائه‌ی یک تکنیک ترکیبی شامل نگرش تقریب متوالی و روش شبه‌طیفی لژاندر برای حل شرایط لازم بهینه‌ی مسأله‌ی کنترل بهینه می‌پردازد. در مقاله‌ی [۲۰] نیز مسأله‌ی کنترل بهینه با یک روش تکرار تغییراتی که توسط توابع اسپلاین درون‌یابی شده حل می‌شود. افزون بر موارد ذکر شده، برخی روش‌های تکراری [۵]، روش‌های مستقیم مبتنی بر ترکیب درونیابی لاگرانژ و توابع پالس [۱۴]، روش تابع جریمه [۱۵] و روش شبه‌طیفی [۲۴] نیز تا به امروز برای حل مسائل کنترل بهینه پایه‌ریزی شده‌اند. اما پیاده‌سازی این روش‌ها اغلب بسیار پیچیده و طاقت‌فرسا بوده و از لحاظ محاسباتی پرهزینه می‌باشد.

روش تفاضلات متناهی یکی از ابزارهای بسیار قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی و جزئی است که تاکنون در مدل‌بندی پردازش تصویر و حل سیستم‌های غیرخطی برگرفته از فرایندهای فیزیکی و اجتماعی به‌کار گرفته شده است. در [۱۸] به کمک روش رانگ-کوتا، یک دسته از مسائل کنترل بهینه به مسأله‌ی بهینه‌سازی گسسته تبدیل شده است. در [۳]، تجزیه و تحلیل همگرایی روش اولیبر برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه‌ی کلاسیک ارائه شده است. همچنین در [۱۱] یک روش عددی مبتنی بر فرمول‌های تفاضلات متناهی برای مسائل کنترل بهینه‌ی تأخیری استفاده شده است. ترکیب روش رانگ-کوتا و شلیک (شوتینگ) برای یافتن کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تأخیری نیز در [۸] پیشنهاد شده است. با وجود این، تا به امروز روش تفاضلات متناهی به‌طور جدی برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه توسعه داده نشده است.

در این مقاله سعی می‌کنیم با استفاده از فرمول‌های تفاضلات متناهی، یک روش تقریبی با دقت بالا را، که به‌سادگی قابل پیاده‌سازی است، برای حل یک مسأله‌ی کنترل بهینه به‌فرم زیر ارائه نماییم:

$$\min J = \frac{1}{\gamma} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt, \quad (1.1)$$

$$s.t. \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^k$  و  $u \in \mathbb{R}^m$  به‌ترتیب بردارهای حالت و کنترل‌اند و  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  پارامترهای  $Q_f \in \mathbb{R}^{k \times k}$  و  $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$  نشان‌دهنده‌ی ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت،  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ماتریس معین مثبت،  $A$  و  $B$  ماتریس‌های ثابت، و  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  یک تابع به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است. بر اساس اصل ماکزیم‌یابی پونتریاگین، شرایط لازم بهینه‌ی برای مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی (۱.۱)-(۲.۱) به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود [۱۶]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - S\lambda(t) + f(x(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ -\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + (A + \frac{\partial f(x)}{\partial x})^T \lambda(t), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = Q_f x(t_f), \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن  $S = BR^{-1}B^T$  و  $\lambda$  بردار کمک-حالت نام دارد. به‌علاوه، قانون کنترل بهینه توسط رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (4.1)$$

که  $B^T$  نشان‌دهنده‌ی ماتریس ترانهاده‌ی ماتریس  $B$  است. همان‌طور که دیده می‌شود، رابطه‌ی (۳.۱) یک مسأله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای را توصیف می‌کند. جواب تحلیلی مسأله‌ی (۳.۱) به‌سادگی قابل محاسبه نیست و در اغلب موارد غیرممکن است؛ بنابراین در این مقاله یک روش تقریبی برای حل مسأله‌ی (۳.۱) ارائه می‌شود. روش پیشنهادی دارای مرتبه‌ی دقت و سرعت همگرایی بالایی می‌باشد؛ به‌علاوه، این روش به‌راحتی برای مسائل خطی و غیرخطی قابل پیاده‌سازی است.

## ۲ طراحی روش تفاضلات متناهی دوزنقه

در این بخش، روش تفاضلات متناهی دوزنقه را برای حل مسأله‌ی مقدار مرزی (۳.۱) توسعه می‌دهیم. از این‌رو، ابتدا بردار  $y = [x, \lambda]^T$  را در نظر می‌گیریم؛ بنابراین می‌توان مسأله‌ی (۳.۱) را به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + F(y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (1.2)$$

که در آن  $F(y) = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$  و  $A_0 = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$  حال، افزاز  $\{t_n\}_{n=0}^N$  از بازه‌ی  $[t_0, t_f]$  را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که  $t_n = t_0 + nh$  و  $t_f = t_0 + Nh$  پارامتر  $h$  را طول گام زمانی گویند. فرض کنید  $x_n$  و  $\lambda_n$  به‌ترتیب مقادیر تقریبی از  $x(t_n)$  و  $\lambda(t_n)$  باشند، در این صورت  $y_n$  نشان‌دهنده‌ی مقدار تقریبی  $y(t_n)$  خواهد بود. در ادامه، روش تفاضلات متناهی ذوزنقه را برای حل مسأله‌ی (۱.۲) به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌نماییم:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{\gamma} [A_0 (y_n + y_{n+1}) + (F(y_n) + F(y_{n+1}))]. \quad (2.2)$$

به‌علاوه، با توجه به شرایط مرزی داده شده در (۳.۱) می‌توان نوشت  $\lambda_N = Q_f x_N$ . در نتیجه، مقدار تقریبی کنترل بهینه عبارت است از:

$$u_n^* = -R^{-1} B^T \lambda_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

که  $u_n^*$  نشان‌دهنده‌ی مقدار تقریبی از  $u^*(t_n)$  می‌باشد. در قضیه‌ی زیر نشان داده شده است که روش ذوزنقه‌ی ساخته شده برای مسأله‌ی مقدار مرزی (۳.۱) به جواب مسأله همگرا است. همچنین، نشان داده شده است که روش عددی حاصل دارای مرتبه‌ی دقت همگرایی دو می‌باشد؛ به عبارتی دیگر، خطای روش از مرتبه‌ی  $\mathcal{O}(h^2)$  است.

**قضیه ۱.۲.** تجزیه و تحلیل خطای روش ذوزنقه فرض کنید  $y(t_n) = [x(t_n), \lambda(t_n)]^T$  و  $y_n = [x_n, \lambda_n]^T$  به‌ترتیب جواب‌های مسأله‌ی مقدار مرزی (۳.۱) و دستگاه معادلات (۲.۲) باشند. آنگاه برای هر  $n = 0, 1, \dots, N$  باشد داریم:

$$\|y(t_n) - y_n\| \leq C_0 h^2, \quad (4.2)$$

که در آن  $C_0$  یک عدد ثابت مستقل از  $h$  است.

اثبات. بردار خطای سراسری  $e_n$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_n = y(t_n) - y_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (5.2)$$

اگر در فرمول (۲.۲) به‌جای مقادیر تقریبی  $y_n$  و  $y_{n+1}$  مقادیر واقعی  $y(t_n)$  و  $y(t_{n+1})$  را جایگزین نماییم، خطای قطع موضعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{\gamma} [A_0 (y(t_n) + y(t_{n+1})) + (F(y(t_n)) + F(y(t_{n+1})))]. \quad (6.2)$$

از این‌رو، با استفاده از رابطه‌ی (۱.۲) و بسط تیلور توابع  $y(t_{n+1})$  و  $\dot{y}(t_{n+1})$  حول  $t_n$  داریم:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{\gamma} [\dot{y}(t_n) + \dot{y}(t_{n+1})] \\ &= \frac{1}{h} \left[ (y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_n) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_n)) - y(t_n) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \left[ \dot{y}(t_n) + (\dot{y}(t_n) + h\ddot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(\eta_n)) \right] \\ &= -\frac{h^2}{12}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{24}y^{(4)}(\xi_n) - \frac{h^3}{6}y^{(4)}(\eta_n) = \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \quad (7.2)$$

که  $y^{(k)}$  نمایانگر مشتق  $k$ -ام تابع  $y$  است، و  $\xi_n$  و  $\eta_n$  بین  $t_n$  و  $t_{n+1}$  قرار دارند. با کم کردن رابطه‌ی (۲.۲) از رابطه‌ی (۶.۲) داریم:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{h}{\gamma} A_0 (e_n + e_{n+1}) + \frac{h}{\gamma} (F(y(t_n)) - F(y_n)) + \frac{h}{\gamma} (F(y(t_{n+1})) - F(y_{n+1})) + hT_n. \quad (8.2)$$

چون تابع  $f$  به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر و بردار  $\lambda$  بر  $[t_0, t_f]$  مشتق‌پذیر است، ثابت  $L$  به‌قسمی موجود است که [۱۷]:

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|. \quad (9.2)$$

قرار می‌دهیم  $\{ \|T_n\| : n = 0, \dots, N-1 \}$ ، از این رو برای معادله‌ی (۸.۲) داریم:

$$\|e_{n+1}\| \leq \left[ 1 + \frac{h}{\gamma} (\gamma \|A_0\| + L) \right] \|e_n\| + \frac{h}{\gamma} (\gamma \|A_0\| + L) \|e_{n+1}\| + hT. \quad (10.2)$$

اگر قرار دهیم  $M = \frac{1}{\gamma} (\gamma \|A_0\| + L)$ ، با استفاده از استقراء روی  $n$  داریم:

$$\|e_{n+1}\| \leq \frac{1 + hM\|e_n\| + hT}{1 - hM} \leq \frac{T}{M} \left( \left( 1 + \frac{hM}{1 - hM} \right)^{n+1} - 1 \right) + \left( 1 + \frac{hM}{1 - hM} \right)^{n+1} \|e_0\|. \quad (11.2)$$

در نتیجه، با کمک نامساوی  $1 + z \leq \exp(z)$ ، برای هر  $n$  رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\|e_n\| \leq \frac{T}{M} \left( \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) - 1 \right) + \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) \|e_0\|, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12.2)$$

در نهایت، با استفاده از فرمول قطع موضعی (۷.۲)، نامساوی فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\|e_n\| \leq \|e_0\| \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) + h^\gamma \left[ \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) - 1 \right] \frac{M_\gamma}{\gamma M}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (13.2)$$

که در آن  $M_\gamma = \max \left\{ \|y^{(\gamma)}(t)\| : t \in [t_0, t_f] \right\}$  حال قرار می‌دهیم:

$$z(t) = [x(t), \lambda(t_f + t_0 - t)]^T, \quad (14.2)$$

$$E_n = \|z(t_n) - z_n\|. \quad (15.2)$$

در این صورت از رابطه‌ی (۱۳.۲) داریم:

$$E_n \leq E_0 \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) + h^\gamma \left[ \exp\left(\frac{Mt_n}{1 - hM}\right) - 1 \right] \frac{M_\gamma}{\gamma M}. \quad (16.2)$$

با نادیده گرفتن خطای گردکردن همواره داریم  $E_0 = 0$ ، در نتیجه طبق (۱۶.۲) می‌توان نتیجه گرفت که  $\|y(t_i) - y_i\| \leq C_0 h^\gamma$  که در آن  $C_0 = \frac{M_\gamma}{\gamma M} (\exp(Mt_f) - 1)$ . □

## ۱.۲ نمایش ماتریسی روش ذوزنقه

قرار می‌دهیم  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$  و  $\mathbf{z} = [\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}]^T$  در این صورت روش ذوزنقه‌ی (۲.۲) برای گسسته‌سازی معادله‌ی (۱.۲) در فرمول ماتریسی زیر بازنویسی می‌شود:

$$G_0 \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} (J_1 \otimes I_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ (J_1^T \otimes I_k) \partial \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(x_0) \\ \mathbf{R}_\gamma(x_0) \end{bmatrix}, \quad (17.2)$$

که در آن  $\mathbf{R}_\gamma(x_0) = [-\frac{h}{\gamma} Qx_0, 0, \dots, 0]^T$ ،  $\mathbf{R}_1(x_0) = [x_0 + \frac{h}{\gamma} (Ax_0 + F(x_0)), 0, \dots, 0]^T$

$$G_0 = \begin{bmatrix} J \otimes I_k & hJ_1^T \otimes S \\ hJ_1 \otimes I_k & -(J \otimes I_k)^T \end{bmatrix} - h(J_1 \otimes A_0) + h(J_1 \otimes A_0)^T, \quad (18.2)$$

ضرب کرونگر روی ماتریس‌ها، و  $I_k$  و  $I_N$  به ترتیب ماتریس‌های همانی از مرتب  $k$  و  $N$  هستند؛ همچنین، ماتریس مربعی  $N$ -بعدی  $J$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19.2)$$

بنابراین،  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Z}$  بردارهای مجهولی هستند که از حل دستگاه غیرخطی (۱۷.۲) به دست می‌آیند. در این جا خاطر نشان کنیم که با توجه به اینکه  $x_i$  ها و  $\lambda_i$  ها،  $0 \leq i \leq N$ ، بردارهای ستونی  $k$  بعدی هستند، در نتیجه  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Z}$  بردارهایی ستونی با ابعاد  $k \times N$  می‌باشند. همچنین، بردارهای ستونی  $\mathbf{R}_1$  و  $\mathbf{R}_2$  دارای ابعاد  $k \times N$  بوده که بجز  $k$  مؤلفه‌ی اول آن‌ها، سایر درایه‌هایشان صفر است. به علاوه، اگر مسأله‌ی کنترل بهینه خطی باشد، یعنی  $f(x) \equiv 0$ ، آنگاه  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv 0$  و  $\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv 0$ ؛ در نتیجه، دستگاه معادلات (۱۷.۲) یک دستگاه معادلات جبری خطی است که می‌توان آن را با کمک حل کننده‌هایی همچون روش تجزیه‌ی LU و یا روش گرادیان مزدوج حل نمود. اما در حالتی که  $f(x) \neq 0$  باشد، به منظور حل دستگاه غیرخطی (۱۷.۲)، از یک تکنیک شبه‌خطی‌سازی استفاده می‌کنیم. به عبارتی دیگر، این دستگاه را به صورت تکراری برای  $r = 0, 1, 2, \dots$  به فرم زیر حل می‌نماییم:

$$\left( G_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h(J_1^T \otimes I_k) \partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(r)}) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(r+1)} \\ \mathbf{z}^{(r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(x_0) - h(J_1 \otimes I_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(r)}) \\ \mathbf{R}_2(x_0) \end{bmatrix}. \quad (20.2)$$

به علاوه، از دنباله‌ی زیر برای محاسبه‌ی مقادیر کنترل بهینه استفاده می‌کنیم:

$$u_n^{(r)} = -R^{-1} B^T \lambda_n^{(r)}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (21.2)$$

توجه داشته باشیم که در این تکنیک از بردارهای بدیهی صفر به عنوان بردار شروع استفاده می‌شود. بنابراین، حل مسأله‌ی مقدار مرزی غیرخطی (۳.۱) معادل با حل دنباله‌ی دستگاه خطی (۲۰.۲) برای  $r = 0, 1, 2, \dots$  می‌باشد. به منظور حل دستگاه‌های خطی، در این مقاله از روش تجزیه‌ی QR استفاده می‌شود.

### ۳ مثال‌های عددی

در این بخش، با استفاده از مثال‌های عددی، به بررسی قابلیت‌های روش پیشنهادی از جمله سادگی و دقت بالای آن در حل مسأله‌ی کنترل بهینه می‌پردازیم. برای مثال‌های ارائه شده، نتایج عددی به دست آمده از تکنیک پیشنهادی با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه شده است. محاسبات در این بخش با استفاده از یک دستگاه لپ تاپ با مشخصات CPU 2.20GHz، Intel® Core™ i7 و 8GB RAM در محیط نرم افزار متلب انجام شده است، و همچنین برای محاسبه‌ی مقدار تابع عمل کرد (۱.۱)، از روش انتگرال گیری سیمپسون استفاده شده است.

**مثال ۱.۳.** مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = x^2(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t) dt, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{x}(t) = x + u, & 0 \leq t \leq t_f, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

برای این مسأله  $k = 1$ ،  $Q_f = 2$ ،  $Q = 0$ ،  $R = 2$ ،  $A = 1$ ،  $B = 1$  و  $f(x) \equiv 0$ . همچنین، جواب واقعی این مسأله عبارت است از:

$$x^*(t) = \frac{x_0 e^t (1 + e^{-2(t-t_f)})}{1 + e^{2t_f}}, \quad u^*(t) = \frac{-2x(t)}{1 + e^{2(t-t_f)}}, \quad 0 \leq t \leq t_f. \quad (2.3)$$

برای  $t_f = 5$  و  $x_0 = 1$ ، مقدار واقعی تابع عمل کرد برابر است با  $J^* = 1.9999092$ . نتایج عددی در این حالت شامل ماکزیمم خطای مطلق بین جواب واقعی  $(x^*, u^*)$  و جواب تقریبی  $(x, u)$ ، زمان سپری شده و مقدار تقریبی تابع عمل کرد  $J$  حاصل از روش دوزنقه در جدول ۱ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد روش دوزنقه دارای مرتبه‌ی دقت دو می‌باشد، مطلبی که منطبق بر نتایج تئوری قضیه‌ی داده شده در بخش ۲ است. هنگامی که بازه‌ی  $[0, 5]$  به  $64$  زیر بازه‌ی مساوی تقسیم می‌شود، روش دوزنقه پس از گذشت تنها  $0.75\%$  ثانیه با ماکزیمم خطای مطلق  $10^{-6} \times 3/69$  و مقدار تقریبی تابع عمل کرد  $J = 1.99990523$  همگرا می‌شود، که این نکته بیانگر دقت و سرعت بالای روش می‌باشد.

**مثال ۲.۳.** مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

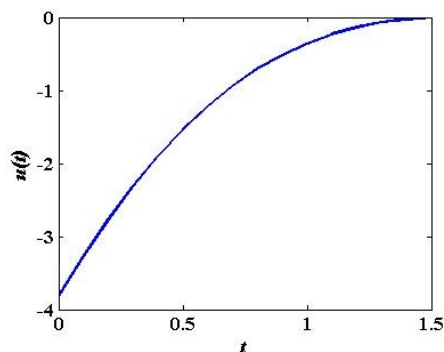
$$\begin{aligned} \min \quad & J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (4x^2(t) + u^2(t)) dt, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ x = [x_1 \ x_2]^T. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

جدول ۱: نتایج عددی شامل ماکزیمم خطای مطلق بین جواب واقعی و جواب تقریبی، زمان سپری شده و مقدار تقریبی تابع عمل کرد  $J$  حاصل از روش دوزنقه برای حل مثال ۱.۳.

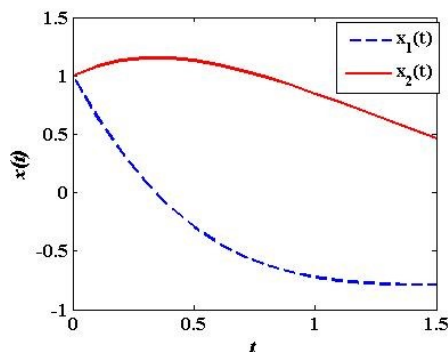
تعداد سلولها $N$	مقدار تقریبی تابع عمل کرد $J$	ماکزیمم خطای مطلق	مرتب‌بندی روش	زمان سپری شده (ثانیه)
۱۰	۱٫۹۶۸۰۶۷۶۳	$۱٫۵۷ \times ۱۰^{-۲}$	-	۰٫۰۱۳
۲۰	۱٫۹۹۰۱۳۹۴۸	$۳٫۸۶ \times ۱۰^{-۳}$	۲٫۰۲	۰٫۰۱۴
۴۰	۱٫۹۹۷۳۴۷۰۹	$۹٫۵۹ \times ۱۰^{-۴}$	۲٫۰۰	۰٫۰۱۵
۸۰	۱٫۹۹۹۲۶۱۰۹	$۲٫۳۹ \times ۱۰^{-۴}$	۲٫۰۰	۰٫۰۱۹
۱۶۰	۱٫۹۹۹۷۴۶۷۰	$۵٫۹۹ \times ۱۰^{-۵}$	۲٫۰۰	۰٫۰۳۹
۳۲۰	۱٫۹۹۹۸۶۸۵۵	$۱٫۴۹ \times ۱۰^{-۵}$	۲٫۰۰	۰٫۲۳۲
۶۴۰	۱٫۹۹۹۹۰۵۲۳	$۳٫۶۹ \times ۱۰^{-۶}$	۲٫۰۱	۰٫۷۵۰

جدول ۲: مقدار تقریبی تابع عمل کرد  $J$  و زمان سپری شده‌ی روش دوزنقه برای حل مثال ۲.۳.

تعداد سلول $N$	۱۰	۲۰	۴۰	۸۰	۱۶۰	۳۲۰	۶۴۰
مقدار تابع عمل کرد $J$	۴٫۷۸۸۸۰	۴٫۷۶۱۷۹	۴٫۷۵۴۱۹	۴٫۷۵۲۱۶	۴٫۷۵۱۶۳	۴٫۷۵۱۵۰	۴٫۷۵۱۴۶
زمان سپری شده (ثانیه)	۰٫۲۴	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۸	۰٫۴۳	۰٫۱۴۶	۰٫۶۶۴



(ب) متغیر کنترل  $u(t)$



(الف) متغیرهای حالت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$

شکل ۱: جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش دوزنقه برای متغیرهای حالت و کنترل مثال ۲.۳ متناظر با تعداد زیر بازه‌ی  $N = ۱۶۰$ .

در مسأله‌ی (۳.۳) داریم:  $Q_f = ۰$ ،  $Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$  و  $R = ۱$ . نتایج عددی حاصل از روش دوزنقه برای حل این مثال در جدول ۲ و شکل ۱ گزارش شده است. این نتایج بیانگر کارایی روش برای حل مسائل در دو بعد با سرعت و دقت بالا می‌باشد. از جدول ۲ دیده می‌شود که روش با تعداد زیر بازه‌ی  $۶۴۰$  و پس از گذشت تنها  $۰٫۶۶۴$  ثانیه به مقدار تقریبی  $۴٫۷۵۱۴۶$  از تابع عمل کرد همگراست.

مثال ۳.۳. مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt,$$

$$s.t. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_2^2 + u, & 0 \leq t \leq 1, \\ x_1(0) = -0.8, x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (۴.۳)$$

برای این مثال  $k = ۲$ ،  $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ،  $R = ۱$ ،  $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$  می‌باشد.

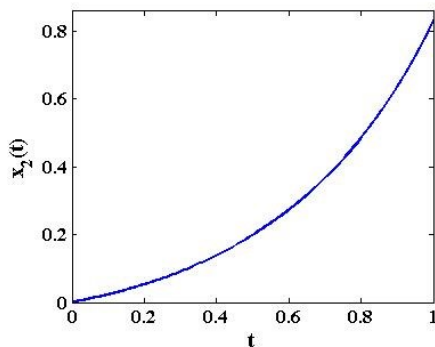
همچنین، با توجه به اینکه این مسأله غیرخطی است، از این رو می‌بایست روش (۲.۰.۲) را به صورت تکراری استفاده نماییم. نتایج عددی شامل مقدار تقریبی تابع عمل کرد و زمان سپری شده پس از ۱۵ بار تکرار برای تعداد زیر بازه‌های متفاوت در جدول ۳ گزارش شده است. با مقایسه‌ی نتایج عددی در این جدول دیده می‌شود که روش پیشنهادی برای  $N = ۶۴۰$  در زمان بسیار کوتاهی (تنها پس از گذشت  $۴٫۰۲۱$  ثانیه) و با ماکزیمم خطای مطلق از مرتبه‌ی  $۱۰^{-۷}$  همگرا می‌شود. در حالی که روش تکرار تغییراتی [۲۲] و تکنیک تکرار تغییراتی درون‌یابی

جدول ۳: مقدار تقریبی تابع عمل کرد  $J$  و زمان سپری شده‌ی روش دوزنقه برای حل مثال ۳.۳.

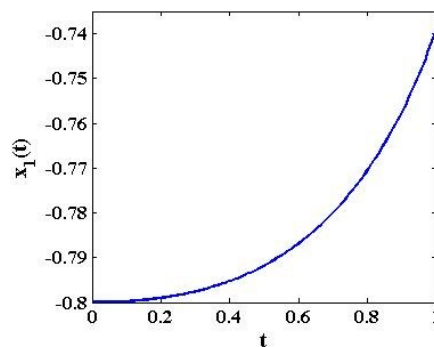
تعداد سلول $N$	۱۰	۲۰	۴۰	۸۰	۱۶۰	۳۲۰	۶۴۰
مقدار تابع عمل کرد $J$	۰٫۴۴۴۱۱	۰٫۴۴۳۴۸	۰٫۴۴۳۳۳	۰٫۴۴۳۳۰	۰٫۴۴۳۲۹	۰٫۴۴۳۲۹	۰٫۴۴۳۲۹
زمان سپری شده (ثانیه)	۰٫۰۶۵	۰٫۰۷۳	۰٫۰۸۷	۰٫۱۶۳	۰٫۵۲۱	۱٫۸۴۰	۴٫۰۲۱

جدول ۴: مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی به‌دست آمده از سه روش عددی مختلف برای حل مثال ۳.۳.

روش پیشنهادی	روش تکرار تغییراتی درون‌یابی شده [۲۱]	روش تکرار تغییراتی [۲۲]	روش عددی
زمان سپری شده (ثانیه)	۷٫۵۰۴	۶۷٫۰۴۹	۴۰٫۲۱
ماکزیمم خطای مطلق	گزارش نشده	گزارش نشده	۱۰-۷

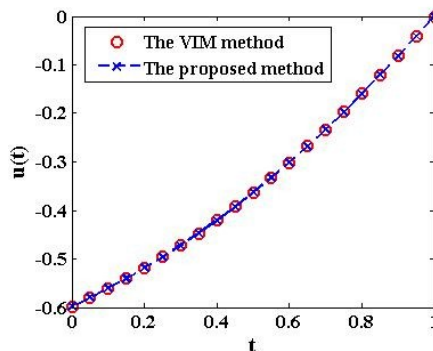


(ب) متغیر حالت  $x_2(t)$



(الف) متغیر حالت  $x_1(t)$

شکل ۲: جواب‌های تقریبی به‌دست آمده از روش دوزنقه برای متغیرهای حالت مثال ۳.۳ متناظر با تعداد زیر بازه‌ی  $N = ۱۶۰$ .

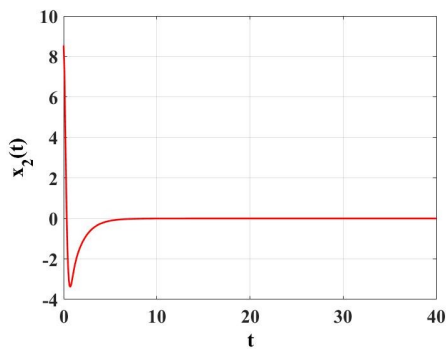
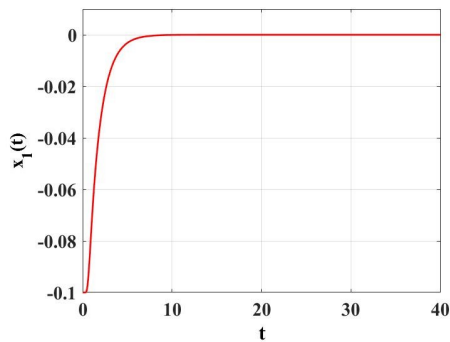
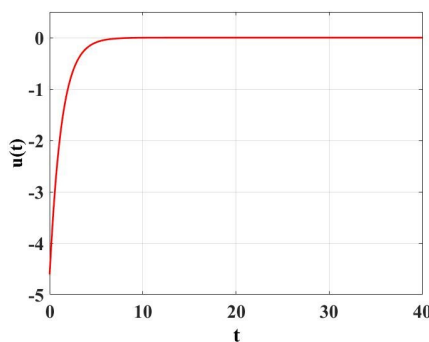
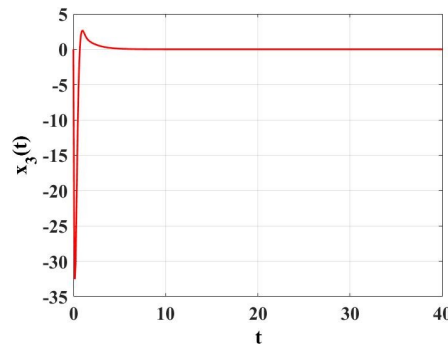


شکل ۳: مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی متغیر کنترل برای مثال ۳.۳ به‌دست آمده توسط روش پیشنهادی و روش تکرار تغییراتی [۲۲].

شده [۲۱] به‌ترتیب با گذشت زمان‌های ۶۷٫۰۴۹ و ۷٫۵۰۴ ثانیه همگرا شده‌اند (جدول ۴). نمودار متغیرهای حالت، متناظر با تعداد زیر بازه‌ی  $N = ۱۶۰$ ، در شکل ۲ رسم شده است. همچنین، نمودار جواب تقریبی متغیر کنترل حاصل از روش پیشنهادی با جواب تقریبی روش تکرار تغییراتی [۲۲] در شکل ۳ مقایسه شده‌اند. شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند که جواب تقریبی مطابق با جواب‌های ارائه شده در مرجع [۲۲] است.

مثال ۴.۳. مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی تأخیری با افق نامتناهی زیر (که در مرکز تحقیقات ناسا ارائه شده است [۶]) را در نظر می‌گیریم:

$$\min J = \int_0^{\infty} (10000x_1^2(t) + u^2(t)) dt, \tag{۵.۳}$$

(ب) متغیر حالت  $x_2(t)$ (الف) متغیر حالت  $x_1(t)$ (د) متغیر کنترل  $u(t)$ (ج) متغیر حالت  $x_3(t)$ 

شکل ۴: جواب‌های تقریبی به‌دست آمده از روش دوزنقه برای متغیرهای حالت و کنترل مثال ۴.۳ متناظر با تعداد زیر بازه‌ی  $N = 2000$ .

مشروط بر اینکه:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{\sigma}x_1(t) - \frac{K}{\sigma}x_2(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = -\omega^2 x_2(t) - 2\xi\omega x_3(t) + \omega^2 u(t), \quad t > 0, \\ x_1(t) = -0.1, \quad x_2(t) = 1.547, \quad x_3(t) = 0, \quad -0.33 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

که در آن  $\sigma = 1.964$ ،  $K = -0.117$ ،  $\xi = 0.8$  و  $\omega = 6$  می‌باشد.

در این مثال، مقدار واقعی تابع هزینه برابر با  $J^* = 136/40 \cdot 490$  است [۱۳]. با طول گام  $N = 2000$ ، روش عددی ارائه شده را برای حل این مسأله روی بازه‌ی  $[0, 40]$  به‌کار می‌بریم. به‌علاوه، از یک درون‌یاب خطی برای تقریب جمله‌ی تأخیر استفاده می‌کنیم. در نتیجه، پس از گذشت ۴۰ ثانیه، مقدار تقریبی تابع هزینه برابر با  $J = 136/40 \cdot 482$  به‌دست می‌آید. در حالی که روش ارائه شده در [۷] با طول گام  $N = 2000$  به مقدار تابع هزینه  $J = 136/41 \cdot 180$  همگرا شده است. این مطلب نشان می‌دهد که ما با طول گام یکسان در مقایسه با روش پیشنهادی در [۷] به پاسخ نزدیک‌تری به مقدار بهینه ( $J^* = 136/40 \cdot 490$ ) رسیده‌ایم. همچنین، روش به‌کار گرفته شده در [۱۰] پس از ۵۸۹۳ ثانیه به مقدار  $J = 136/40 \cdot 4818$  همگرا شده است. بنابراین، نسبت به این تکنیک نیز روش ما سریع‌تر و دقیق‌تر است. نمودار متغیرهای حالت و کنترل در شکل ۴ رسم شده‌اند. این شکل نشان می‌دهد که جواب‌های تقریبی به‌دست آمده در این مقاله مطابق با جواب‌های ارائه شده در مراجع [۶، ۷، ۱۰، ۱۳] است. بنابراین، روش پیشنهادی برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی تأخیری با افق نامتناهی نیز سریع و دقیق می‌باشد.

## ۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی کارا برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه ارائه شد. به‌منظور طراحی این روش، با استفاده از یک فرمول تفاضلات متناهی مرتبه‌ی دوم، شرایط لازم بهینگی متناظر با مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی داده شده گسسته‌سازی شد. در قضیه‌ی ۱.۲، همگرایی



روش اثبات شد و نشان داده شد که نرخ همگرایی آن از مرتبه‌ی دو است. همچنین، به کمک روابط ماتریسی، روش پیشنهادی به‌سادگی برای یک مسأله‌ی کنترل بهینه پیاده‌سازی گردید. به‌منظور تأیید کارایی روش، نتایج عددی حاصل از آن برای حل برخی از مسائل کنترل بهینه فراهم شد که مبین دقت، سرعت و کارایی بالای تکنیک ارائه شده بود. به‌طور دقیق‌تر، نتایج عددی گزارش شده در جدول ۱ بیانگر سرعت بالای همگرایی و دقت مرتبه‌ی دوم برای حل یک مسأله‌ی خطی بود. همچنین، جدول ۲ و شکل ۱ نشان دادند که روش پیشنهادی برای حل مسائل دو بعدی نیز بسیار موفق می‌باشد. به‌علاوه، جدول ۳ و شکل‌های ۲ و ۳ تأیید کردند که این روش برای حل مسائل غیرخطی نیز بسیار کارا است و در مقایسه با روش‌های موجود به‌راحتی قابل پیاده‌سازی بوده و در عین حال دقیق‌تر و سریع‌تر است. در نهایت، شکل ۴ نشان‌دهنده‌ی سرعت و دقت بالای روش پیشنهادی برای حل یک مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تأخیری با افق نامتناهی بود.

## فهرست منابع

- [1] Beard, R.W., Saridis, G.N. and Wen, J.T., 1997. Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Automatica*, 33(12), pp. 2159–2177. doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00128-3](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00128-3)
- [2] Bellman, R., 1952. On the theory of dynamic programming. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(8), pp. 716–719. doi: <https://doi.org/10.1073/pnas.38.8.716>
- [3] Bonnans, J.F. and Festa, A., 2017. Error estimates for the Euler discretization of an optimal control problem with first-order state constraints. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(2), pp. 445–471. doi: <https://doi.org/10.1137/140999621>
- [4] Çimen, T., 2008. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), pp. 3761–3775. doi: <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00635>
- [5] Doan, V.D., Fujimoto, H., Koseki, T., Yasuda, T., Kishi, H. and Fujita, T., 2018. Iterative dynamic programming for optimal control problem with isoperimetric constraint and its application to optimal eco-driving control of electric vehicle. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 7(1), pp. 80–92. doi: <https://doi.org/10.1541/ieejia.7.80>
- [6] Germani, A., Manes, C. and Pepe, P., 2000. A twofold spline approximation for finite horizon LQG control of hereditary systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(4), pp. 1233–1295. doi: <https://doi.org/10.1137/S0363012998337461>
- [7] Hajipour, M. and Jajarmi, A., 2018. Numerical solution of the state-delayed optimal control problems by a fast and accurate finite difference  $\theta$ -method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 55, pp. 265–276. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.07.017>
- [8] Jabbari-Khanbehbin, T., Gachpazan, M., Effati, S. and Miri S.M., 2022. Shooting continuous Runge-Kutta method for delay optimal control problems. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 12(3), pp. 680–703. doi: <https://doi.org/10.22067/ijnao.2022.78108.1166>
- [9] Jajarmi, A. and Baleanu, D., 2018. Optimal control of nonlinear dynamical systems based on a new parallel eigenvalue decomposition approach. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(2), pp. 1071–1083. doi: <https://doi.org/10.1002/oca.2397>
- [10] Jajarmi, A., Dehghan Nayyeri, M. and Saberi Nik, H., 2016. A novel feedforward-feedback suboptimal control of linear time-delay systems. *Journal of Complexity*, 35, pp. 46–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jco.2016.02.001>

- [11] Jajarmi, A. and Hajipour, M., 2017. An efficient finite difference method for the time-delay optimal control problems with time-varying delay. *Asian Journal of Control*, 19(2), pp. 554–563. doi: <https://doi.org/10.1002/asjc.1371>
- [12] Jajarmi, A. and Hajipour, M., 2017. An efficient parallel processing optimal control scheme for a class of nonlinear composite systems. *Acta Mathematica Scientia*, 37(3), pp. 703–721. doi: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(17\)30032-2](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30032-2)
- [13] Manitius, A. and Tran, H., 1986. Numerical simulation of a nonlinear feedback controller for a wind tunnel model involving a time delay. *Optimal Control Applications and Methods*, 7(1), pp. 19–39. doi: <https://doi.org/10.1002/oca.4660070103>
- [14] Marzban, H.R. and Pirmoradian, H., 2018. A direct approach for the solution of nonlinear optimal control problems with multiple delays subject to mixed state-control constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 53, pp. 189–213. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.025>
- [15] Marzban, H.R. and Razzaghi, M., 2003. Hybrid functions approach for linearly constrained quadratic optimal control problems. *Applied Mathematical Modelling*, 27(6), pp. 471–485. doi: [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(03\)00050-7](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(03)00050-7)
- [16] Pontryagin, L.S., 1959. Optimal regulation processes. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14(1)(85), pp. 3–20. URL: <http://mi.mathnet.ru/rm7262>
- [17] Rudin, W., 1976. Principles of Mathematical Analysis (Vol. 3). New York: McGraw–Hill.
- [18] Schwartz, A. and Polak, E., 1996. Consistent approximations for optimal control problems based on Runge–Kutta integration. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(4), pp. 1235–1269. doi: <https://doi.org/10.1137/S0363012994267352>
- [19] Shirazian, M., 2023. An iterative Legendre pseudospectral method for suboptimal control of nonlinear control affine systems. *Mathematical Communications*, 28(1), pp. 153–169. URI: <https://hrcak.srce.hr/303396>
- [20] Shirazian, M., 2023. Optimal control design for linear time-varying systems by interpolated variational iteration method. *Journal of Vibration and Control*, 29(21-22), pp. 4987–4998. doi: <https://doi.org/10.1177/10775463221127739>
- [21] Shirazian, M., 2023. The interpolated variational iteration method for solving a class of nonlinear optimal control problems. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 13(2), pp. 224–242. doi: <https://doi.org/10.22067/ijnao.2022.77393.1158>
- [22] Shirazian, M. and Effati, S., 2012. Solving a class of nonlinear optimal control problems via he’s variational iteration method. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 10, pp. 249–256. doi: <https://doi.org/10.1007/s12555-012-0205-z>
- [23] Tang, G.Y., 2005. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach. *Systems & Control Letters*, 54(5), pp. 429–434. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.09.012>
- [24] Wang, X., Peng, H., Zhang, S., Chen, B. and Zhong, W., 2017. A symplectic pseudospectral method for nonlinear optimal control problems with inequality constraints. *ISA Transactions*, 68, pp. 335–352. doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.02.018>



## An accurate and straightforward method for solving optimal control problems using the second-order finite difference formula

Amin Jajarmi<sup>(1)</sup> <sup>1</sup>, Mojtaba Hajipour<sup>(2)</sup> and Leila Torkzadeh<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

<sup>(3)</sup> Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, Semnan, Iran

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 19 April 2023

Accepted: 1 March 2024

**Abstract:** In this paper, a simple and highly accurate approximate method for solving optimal control problems (OCPs) is presented. In this method, initially, by using the necessary optimality conditions based on the Pontryagin's maximum principle, the given OCP is transformed into a two-point boundary value problem (BVP). Then, by applying a second-order finite difference formula, the resulting BVP is discretized, and a system of algebraic equations is formulated. Convergence analysis of the proposed method is also discussed, and matrix formulations are provided for ease of implementation. The numerical results obtained in this study are compared with some other methods, demonstrating the high accuracy, speed, and efficiency of the proposed method for solving both linear and nonlinear OCPs.

**Keywords:** Optimal control problem, Pontryagin's maximum principle, Finite difference method.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>1</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (A. Jajarmi) [a.jajarmi@ub.ac.ir](mailto:a.jajarmi@ub.ac.ir), (M. Hajipour) [hajipour@sut.ac.ir](mailto:hajipour@sut.ac.ir)  
(L. Torkzadeh) [torkzadeh@semnan.ac.ir](mailto:torkzadeh@semnan.ac.ir)