



ساختار ایده‌آل‌های بسته در برخی C^* -جبرها

محمدباقر اسدی^(۱)، محمدعلی اسدی وصفی^(۱) و زهرا حسن‌پور یخدانی^(۱)

^(۱) دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱/۲۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۸

چکیده: در این مقاله، به بررسی و تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته در C^* -جبر $C(X, A)$ ، یعنی فضای تمام توابع پیوسته از فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف X به C^* -جبر دلخواه A می‌پردازیم. در واقع، نشان می‌دهیم هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$ ، به صورت

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F, f(x) \in P\}$$

است، که در آن F یک زیرمجموعه بسته از فضای توپولوژیک $X \times Prim(A)$ است.

واژه‌های کلیدی: C^* -جبرها، جبرهای عملگری، ایده‌آل، حاصل ضرب تانسوری.

رده‌بندی ریاضی: 46L06; 46L05; 46J10

۱ مقدمه

یکی از موضوعات جالب توجه در مطالعه ساختار C^* -جبرها، تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته آنهاست. دسته مهمی از C^* -جبرها که ساختار ایده‌آل‌های بسته آنها کاملاً مشخص شده‌اند، C^* -جبرهای جابجایی هستند. بنابر قضیه گلفاند-نیمارک [۵]، می‌دانیم هر C^* -جبر جابجایی و یک‌دار با $C(X)$ ، یعنی فضای تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف X ، یکرخت است. در این حالت، هر ایده‌آل بسته I از $C(X)$ ، به صورت مجموعه

$$I = \{f \in C(X) : \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

است، که در آن F یک زیرمجموعه بسته از X است [۲]. در این مقاله، با دو روش متفاوت به تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته C^* -جبر $C(X, A)$ ، که در آن A یک C^* -جبر ساده و یک‌دار دلخواه و X یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده است، پرداخته‌ایم. در واقع، قضیه اصلی مقاله به صورت زیر است.

^۱نویسنده مسئول مقاله

قضیه ۱.۱. فرض کنید A یک C^* -جبر ساده و یک‌دار باشد. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$ ، زیرمجموعه بسته F از $X \times \text{prim}(A)$ وجود دارد به طوری که $I = I_F$ که در آن

$$I_F = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F, f(x) \in P\}.$$

۲ مفاهیم مقدماتی و اولیه

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی مربوط به C^* -جبرها را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به [۲]، [۵] و [۴] مراجعه نمایید. منظور از یک $*$ -جبر، جبر A به همراه نگاشت مزدوج خطی $A \rightarrow A : *$ است، که برای هر $a, b \in A$ ،

$$a^{**} = (a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*.$$

$*$ -جبر نرم‌دار A را یک C^* -جبر گوئیم، هرگاه در متر القاشده توسط نرم آن کامل باشد و برای هر $a, b \in A$ ، رابطه‌های زیر برقرار باشد.

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

زیرفضای برداری I از C^* -جبر A را یک ایده‌آل چپ (راست) گوئیم، هرگاه

$$a \in A, \quad b \in I \Rightarrow ab \in I \quad (ba \in I).$$

درواقع، هر ایده‌آل بسته C^* -جبرها، خود دارای ساختار یک C^* -جبر است. C^* -جبر A را ساده^۲ گوئیم هرگاه ایده‌آل بسته غیربدیهی نداشته باشد و آن را به طور جبری ساده گوئیم هرگاه ایده‌آل غیربدیهی نداشته باشد. لازم به ذکر است که C^* -جبر یک‌دار A ساده است اگر و تنها اگر به طور جبری ساده باشد.

عنصر a در C^* -جبر یک‌دار A را وارون‌پذیر گوئیم، هرگاه $b \in A$ وجود داشته باشد که $ab = ba = 1$. عنصر b یکتاست، آن را با a^{-1} و مجموعه عناصر وارون‌پذیر C^* -جبر یک‌دار A را با $\text{Inv}(A)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که برای هر C^* -جبر یک‌دار A ، $\text{Inv}(A)$ یک زیرمجموعه باز از A است.

طیف یک عنصر a در C^* -جبر یک‌دار A به صورت مجموعه

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \text{Inv}(A)\}$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین، هرگاه $a = a^*$ ، آن‌گاه a را یک عنصر خودالحاق می‌نامیم. مجموعه عناصر خودالحاق را با A_{sa} نمایش می‌دهیم. هرگاه برای عنصر خودالحاق a داشته باشیم $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ ، گوئیم a یک عنصر مثبت است و می‌نویسیم $a \geq 0$. مجموعه عناصر مثبت A را با A^+ نشان می‌دهیم. شایان ذکر است که برای هر $a \in A$ ، $a^*a \in A^+$ ، در واقع، برای هر عنصر $a \in A$ ، عنصر یکتا $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که $a^*a = b^2$. این عنصر یکتا b را با $|a|$ نشان می‌دهیم. علاوه براین، برای هر $a, b \in A_{sa}$ ،

$$\text{Max}(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

ملاحظه ۱.۲. C^* -جبر دلخواه A را در نظر گرفته و فضای تمام توابع پیوسته روی فضای فشرده و هاسدورف X با مقادیر در C^* -جبر A را با $C(X, A)$ نشان می‌دهیم. این فضا مجهز به عملگرهای ضرب اسکالر، جمع، ضرب نقطه به نقطه و نگاشت مزدوج خطی که برای هر $f \in C(X, A)$ ، عنصر $f^* \in C(X, A)$ ، به نحوی است که برای هر $x \in X$ ، $f^*(x) = (f(x))^*$ ، یک $*$ -جبر است. هم‌چنین، این فضا مجهز به نرم $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ ، یک C^* -جبر است. لازم به ذکر است که برای هر $f \in C(X, A)^+$ ، عنصر $|f| \in C(X, A)$ ، به نحوی است که برای هر $x \in X$ ، $|f|(x) = |f(x)|$. به بیان دیگر،

$$C(X, A)^+ = C(X, A^+).$$

به علاوه، $\text{Inv}(C(X, A)) = C(X, \text{Inv}(A))$. به‌ویژه، اگر I ایده‌آلی از $C(X, A)$ باشد، آن‌گاه

$$I^+ = I \cap C(X, A^+).$$

هم‌چنین، برای هر $f, g \in C(X, A)^+$ با تعریف

$$\text{Max}(f, g)(x) = \text{Max}(f(x), g(x)),$$

داریم، $\text{Max}(f, g) \in C(X, A)^+$.

منظور از یک π -همریختی $\pi : A \rightarrow B$ بین C^* -جبرهای A و B ، یک همریختی جبری است که برای هر $a \in A$ $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ هر $\pi : A \rightarrow B(H)$ π -همریختی C^* -جبر $B(H)$ فضای هیلبرت H است، را یک نمایش از A به روی فضای هیلبرت H می نامیم. بنابر قضیه گلفاند-نیمارک-سگال [۵]، همواره یک π -همریختی از C^* -جبر A به C^* -جبر $B(H)$ ، به ازای یک فضای هیلبرت H وجود دارد. نمایش π را یک نمایش تحویل ناپذیر گوئیم هرگاه H هیچ زیرفضای پایای بسته غیربدیهی (زیرفضای K از فضای هیلبرت H که $\pi(A)K \subseteq K$ برای $\pi(A)$ نداشته باشد). هسته π هر نمایش π ، یعنی مجموعه $\{a \in A : \pi(a) = 0\}$ ، یک ایده آل از دامنه است. به علاوه، از آنجا که هر π -همریختی بین C^* -جبرها، پیوسته است، هسته هر نمایش A یک ایده آل بسته از A است. هسته هر نمایش تحویل ناپذیر ناصفر روی C^* -جبر A را یک ایده آل اولیه در A می نامیم [۲]. مجموعه همه ایده آل های اولیه C^* -جبر A را با $Prim(A)$ نشان می دهیم. مجموعه $Prim(A)$ به یک توپولوژی مجهز می شود که با نام توپولوژی غلاف-هسته (یا توپولوژی جیکسون) شناخته شده است. در این توپولوژی بستر یک زیرمجموعه از $Prim(A)$ مانند E برابر است با

$$\bar{E} = \{Q \in Prim(A) : Q \supseteq \bigcap_{P \in E} P\}.$$

هرگاه I یک ایده آل بسته A باشد و

$$\Lambda = \{P : P \in Prim(A) \wedge I \subseteq P\},$$

آن گاه $I = \bigcap_{P \in \Lambda} P$. بنابراین، ساختار ایده آل های بسته یک C^* -جبر به وسیله ایده آل های اولیه آن کاملاً مشخص می شود. همچنین، از آنجا که، ایده آل های اولیه یک C^* -جبر در یک تناظر یک به یک با نمایش های تحویل ناپذیر ناصفر آن است، اگر رسته نمایش های تحویل ناپذیر دو C^* -جبر به مفهوم نظریه رسته ها، هم ارز باشند، آن گاه دو C^* -جبر دارای شبکه ایده آل های بسته یکسانی خواهند بود. هنگامی که رسته نمایش های دو C^* -جبر هم ارز باشند اصطلاحاً گوئیم آنها هم ارز موریتا^۴ هستند.

ملاحظه ۲.۲. بنابر قضیه گلفاند نیمارک [۲] برای هر C^* -جبر جابه جایی و یک دار A ، فضای فشرده و هاسدورف X وجود دارد، به طوری که A و $C(X)$ به عنوان دو C^* -جبر یکرخت هستند. به علاوه، فضای توپولوژیک X با $Prim(A)$ ، به عنوان دو فضای توپولوژیک یکرخت هستند.

۳ روش مستقیم تعیین ساختار ایده آل های بسته $C(X, A)$

در این بخش، به روش مستقیم به مطالعه و تعیین ساختار ایده آل های بسته C^* -جبر $C(X, A)$ می پردازیم. در اثبات قضیه اصلی از لم زیر استفاده می شود.

لم ۱.۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف و A یک C^* -جبر یک دار باشد. زیرمجموعه فشرده K از X و ایده آل I از $C(X, A)$ را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید $f \in C(X, A)$ و برای هر $x \in K$ $f(x) \in Inv(A) \cap A^+$. در این صورت،

$$0 < \inf \bigcup_{x \in K} \sigma(f(x)).$$

ب) اگر برای هر $x \in K$ عنصری مانند $f_x \in I$ وجود داشته باشد که $f_x(x) \in Inv(A)$ ، آن گاه $f \in I^+$ وجود دارد، به طوری که، $f(x) = \lambda_A$ ، $x \in K$ برای هر $\lambda \in I$. همچنین، برای هر $x \in K$ $f(x) = \lambda_A$ ، $x \in K$ برای هر $\lambda \in I$.

به ویژه، اگر $K = X$ در فرضیات قسمت (ب) صدق کند آن گاه، $I = C(X, A)$.

اثبات. برای اثبات (الف)، توجه می کنیم که تابع (مجموعه مقدار) طیف روی هر جبر باناخ نیم پیوسته بالایی است [۱]. از این رو، برای هر $x \in K$ و هر مجموعه باز شامل $\sigma(f(x))$ ، از جمله، بازه باز $(\frac{1}{\epsilon} \min \sigma(f(x)), \max \sigma(f(x)) + 1)$ ، همسایگی $V_x = (\frac{1}{\epsilon} \min \sigma(f(x)), \max \sigma(f(x)) + 1)$ ، باز W_x از $f(x)$ وجود دارد که برای هر $a \in W_x$ ، $\sigma(a) \subseteq V_x$ ، از طرف دیگر، با توجه به پیوستگی تابع f همسایگی بازی از x

³kernel

⁴Morita equivalent

مانند U_x وجود دارد که برای هر $y \in U_x, f(y) \in W_x$. از بحث فوق نتیجه می‌شود که

$$\forall x \in K \exists U_x \forall y \in U_x \sigma(f(y)) \subseteq V_x. \quad (۱.۳)$$

حال با توجه به فشردگی مجموعه K ، نقاط x_1, \dots, x_n در K و همسایگی‌های باز شامل آنها مانند U_{x_1}, \dots, U_{x_n} وجود دارند به طوری که K را می‌پوشانند و به علاوه، با انتخاب

$$m := \bigwedge \{ \text{Min} \sigma(f(x_i)) : 1 \leq i \leq n \},$$

و با توجه به ۱.۳، خواهیم داشت:

$$m > 0 \wedge \forall x \in K \forall \lambda \in \sigma(f(x)) \lambda > m.$$

از این رو،

$$0 < \inf \cup_{x \in K} \sigma(f(x)).$$

برای اثبات قسمت (ب)، فرض می‌کنیم برای هر $x \in K, f_x \in I$ وجود دارد که $f_x(x) \in \text{Inv}(A)$. با توجه به پیوستگی هر f_x و باز بودن مجموعه $\text{Inv}(A)$ ، داریم:

$$\forall x \in K \exists U_x \forall y \in U_x f_x(y) \in \text{Inv}(A), \quad (۲.۳)$$

که در آن U_x یک مجموعه باز در K و شامل x است. حال با توجه به فشردگی K ، نقاط $x_1, \dots, x_n \in K$ و همسایگی‌های باز شامل آنها مانند U_{x_1}, \dots, U_{x_n} وجود دارند به طوری که مجموعه K را می‌پوشانند. همچنین، با توجه به فرض، توابع $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} \in I$ وجود دارند به طوری که برای هر $y \in U_{x_i} f_{x_i}(y) \in \text{Inv}(A)$ حال با انتخاب

$$g := \sum_{i=1}^n f_{x_i}^* f_{x_i},$$

$g \in I^+$ همچنین،

$$\forall x \in K \exists 1 \leq i \leq n f_{x_i}(x) \in \text{Inv}(A).$$

در نتیجه، $f_{x_i}(x)^* f_{x_i}(x) \in \text{Inv}(A)$. از آنجا که، $f_{x_i}(x)^* f_{x_i}(x) \leq g(x)$ پس

$$g(x) \in \text{Inv}(A) \cap A^+.$$

اکنون با توجه به قسمت الف، عدد حقیقی ناصفر m وجود دارد به طوری که برای هر $x \in K$ و هر $\lambda \in \sigma(g(x))$ $m \leq \lambda$. تابع ثابت $m \cdot 1_A \in C(X, A)$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $h = \text{Max}(g, m \cdot 1_A)$. در این صورت، $h \in C(X, A)$ وارون‌پذیر است و

$$0 \leq h^{-1} g \leq 1_{C(X,A)}.$$

همچنین، برای هر $x \in K$ $h(x) = g(x)$ اینک کافی است قرار دهیم $f := h^{-1} g$.

□

قضیه ۲.۳. فرض کنید A یک C^* -جبر ساده یک‌دار است. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$ ، زیرمجموعه بسته F از X وجود دارد به طوری که $I = I_F$ ، که در آن

$$I_F = \{ f \in C(X, A) : \forall x \in F, f(x) = 0 \}.$$

اثبات. برای هر $x \in X$ ، قرار می‌دهیم $I(x) = \{f(x) : f \in I\}$. به‌وضوح، $I(x)$ یک ایده‌آل A است و چون C^* -جبر A ساده و یک‌دار است، پس $I(x) = \{0\}$ یا $I(x) = A$. قرار می‌دهیم

$$F = \{x \in X : I(x) = \{0\}\}.$$

توجه می‌کنیم که اگر F تهی باشد، آن‌گاه $I = C(X, A) = I_F$. زیرا، برای هر $x \in X$ ، داریم $I(x) = A$. پس، برای هر $x \in X$ ، عضوی از I مانند f_x وجود دارد، به طوری که $f_x(x) = \lambda_A$. از این‌رو، بنا به لم قبل $I = C(X, A)$. در ادامه، فرض می‌کنیم ایده‌آل I سره است (پس F ناتهی است) و نشان می‌دهیم $I = I_F$. برای اثبات این موضوع، فرض می‌کنیم $h \in I_F$ و $\varepsilon > 0$ و قرار می‌دهیم

$$K = \{x \in X : \|h(x)\| \geq \varepsilon\}.$$

به‌وضوح، K فشرده است و $K \cap F = \emptyset$. پس برای هر $x \in K$ ، عضوی از I مانند f_x وجود دارد، به طوری که،

$$f_x(x) = \lambda_A \in \text{Inv}(A).$$

بنابر قسمت (ب) لم قبل، $f \in I^+$ وجود دارد به طوری که $\lambda_{C(X,A)} \leq f \leq \lambda_A$ و برای هر $x \in K$ ، $f(x) = \lambda_A$. حال با انتخاب $h \in I$ داریم $k := fh$ و $\|k - h\| \leq \varepsilon$. چون I بسته و ε دلخواه است، نتیجه می‌شود که $h \in I$.

□

۴ روش غیرمستقیم تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته $C(X, A)$

روی حاصل ضرب تانسوری جبری (به عنوان فضاهای برداری) دو C^* -جبر A و B ، نرم‌های زیادی وجود دارند که کامل شده حاصل ضرب تانسوری جبری نسبت به این نرم‌ها، C^* -جبر می‌شوند. این فضاهای کامل را حاصل ضرب‌های تانسوری دو C^* -جبر می‌نامیم. کوچکترین و بزرگترین این نرم‌ها را به ترتیب با $\|\cdot\|_{\min}$ و $\|\cdot\|_{\max}$ نشان می‌دهیم. بعضی از C^* -جبرها مانند $C(X)$ و $K(H)$ دارای این خاصیت جالب هستند که روی حاصل ضرب تانسوری جبری آنها با هر C^* -جبر دیگر کوچکترین و بزرگترین نرم‌های اشاره شده با هم برابرند. در نتیجه، فقط یک C^* -نرم یکتا روی حاصل ضرب تانسوری جبری آنها وجود دارد. به این نوع از C^* -جبرها هسته‌ای^۵ گوییم [۵]. یکی از مسایل جالب، تعیین ایده‌آل‌های بسته حاصل ضرب تانسوری دو C^* -جبر است. بنابر توضیحات قسمت‌های قبلی، کافی است روی ایده‌آل‌های اولیه متمرکز شویم. یکی از نتایج شناخته شده بیان می‌کند که هرگاه یکی از C^* -جبرهای A یا B هسته‌ای باشد آن‌گاه

$$\text{Prim}(A) \times \text{Prim}(B) \cong \text{Prim}(A \otimes B)$$

که این یکرختی (توپولوژیک) توسط نگاشت

$$(I, J) \mapsto I \otimes B + A \otimes J$$

ایجاد می‌گردد [۳].

قضیه ۱.۴. فرض کنید I یک ایده‌آل بسته از $C(X, A)$ است. در این صورت، زیرمجموعه بسته F از فضای توپولوژیک $X \times \text{Prim}(A)$ وجود دارد، به طوری که

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F, f(x) \in P\}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{P \in \text{Prim}(C(X, A)) : I \subseteq P\}.$$

داریم $I = \bigcap_{P \in \Lambda} P$. از آنجا که $C(X)$ هسته‌ای است و $C(X, A) \cong C(X) \otimes A$ ، از ملاحظه ۲.۲، نتیجه می‌شود که

$$\text{Prim}(C(X, A)) \cong \text{Prim}(C(X)) \times \text{Prim}(A) \cong X \times \text{Prim}(A).$$

⁵nuclear

در واقع، هرگاه $P \in Prim(C(X, A))$ ، آن‌گاه $x_P \in X$ و $J_P \in Prim(A)$ وجود دارند، به طوری‌که،

$$P = I_{\{x_P\}} \otimes A + C(X) \otimes J_P = \{f \in C(X, A) : f(x_P) \in J_P\}.$$

بنابراین

$$I = \bigcap_{P \in \Lambda} P = \bigcap_{P \in \Lambda} \{f \in C(X, A) : f(x_P) \in J_P\}.$$

حال از آنجا که Λ در توپولوژی غلاف-هسته بسته است، با انتخاب

$$F = \{(x_P, J_P) : P \in \Lambda\},$$

نتیجه می‌شود که F در $X \times Prim(A)$ بسته است و

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F, f(x) \in P\}.$$

□

نتیجه ۲.۴. فرض کنید A یک C^* -جبر ساده یک‌دار است. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$ ، زیرمجموعه بسته F از X وجود دارد به طوری که $I = I_F$ ، که در آن

$$I_F = \{f \in C(X, A) : \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

اثبات. از آنجا که هر ایده‌آل بسته سره در هر C^* -جبر، زیرمجموعه حداقل یک ایده‌آل اولیه است، از این‌رو C^* -جبر A ساده است اگر و تنها اگر $\{0\}$ تنها ایده‌آل اولیه A باشد. بنابراین از قضیه قبل نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

□

فهرست منابع

- [1] Aupetit, B., 1991. A primer on spectral theory, *Springer-Verlag, New York*. doi:101007/978-1-4612-3048-9
- [2] Blackadar, B., 2006. Operator algebras. Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras, *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, vol. 122: Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III, *Springer-Verlag, Berlin*.
- [3] Blanchard, E. and Kircher, E., 2004. Non-simple purely infinite C^* -algebras: the Hausdorff case, *J. Funct. Anal.*, 207, pp.461-513. doi:10.1016/j.jfa.2003.06.008
- [4] Conway, J.B., 1999. A course in operator theory, *Amer. Math. Soci.* doi: 10.1090/gsm/021
- [5] Murphy, G. J., 1990. C^* -algebras and operator theory, *Academic Press Inc., Boston, MA*,



Ideal Structure of Some C^* -algebras

Mohammad Bagher Asadi⁽¹⁾, Mohammad Ali Asadi Vasafi⁽¹⁾
and Zahra Hassanpour-Yakhdani⁽¹⁾ ⁶

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, College of Sciences, University of Tehran, Tehran, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 18 June 2023

Accepted: 10 April 2024

Abstract: In this note, considering the main properties of closed ideals of C^* -algebras, we will determine the structure of closed ideals of the C^* -algebra $C(X, A)$, the space of all continuous functions from compact Hausdorff space X to C^* -algebra A . Indeed, we will show that for every closed ideal I of $C(X, A)$, there is some closed subset F of topological space $X \times \text{prim}(A)$, such that

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F, f(x) \in P\}.$$

Keywords: C^* -algebras, Operator Algebras, Ideal, Tensor Product.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

⁶Corresponding author.

E-mail addresses: (M.B. Asadi) mb.asadi@ut.ac.ir, (M.A. Asadi) asadi.ali@ut.ac.ir, (Z. Hassanpour-Yakhdani) zhasanpour91@gmail.com.