مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴ شماره ۱، ص ۶۰-۵۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2024.43861.2171

ساختار ایده‌آل‌های بسته در برخی C^*-جبرها

محمدباقر اسدی(۱)، محمدعلی اسدی وصفی(۱) و زهرا حسن‌پور یخدانی(۱)[۱]

(۱) دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱/۲۲

چکیده: در این مقاله، به بررسی و تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته در C^*-جبر $C(X, A)$، یعنی فضای تمام توابع پیوسته از فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف X به C^*-جبر دلخواه A می‌پردازیم. در واقع، نشان می‌دهیم هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$، به‌صورت

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F,\ f(x) \in P\}$$

است، که در آن F یک زیرمجموعه بسته از فضای توپولوژیک $X \times Prim(A)$ است.

واژه‌های کلیدی: C^*-جبرها ، جبرهای عملگری، ایده‌آل، حاصل‌ضرب تانسوری.

رده‌بندی ریاضی: 46L06; 46L05; 46J10

۱ مقدمه

یکی از موضوعات جالب توجه در مطالعه ساختار C^*-جبرها ، تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته آنهاست. دسته مهمی از C^*-جبرها که ساختار ایده‌آل‌های بسته آنها کاملاً مشخص شده‌اند، C^*-جبرهای جابجایی هستند. بنابر قضیه گلفاند نیمارک [۵]، می‌دانیم هر C^*-جبر جابجایی و یک‌دار با $C(X)$، یعنی فضای تمام توابع پیوسته مختلط‌مقدار روی فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف X، یکریخت است. در این حالت، هر ایده‌آل بسته I از $C(X)$، به‌صورت مجموعه

$$I = \{f \in C(X) : \forall x \in F,\ f(x) = \circ\}.$$

است، که در آن F یک زیرمجموعه بسته از X است [۲] . در این مقاله، با دو روش متفاوت به تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته C^*-جبر $C(X, A)$، که در آن A یک C^*-جبر ساده و یک‌دار دلخواه و X یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده است، پرداخته‌ایم. در واقع، قضیه اصلی مقاله به‌صورت زیر است.

---

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Z. Hassanpour-Yakhdani) zhasanpour91@gmail.com, (M.B. Asadi) mb.asadi@ut.ac.ir
(M.A. Asadi) asadi.ali@ut.ac.ir

قضیه ۱.۱. فرض کنید A یک C^*-جبر ساده و یک‌دار باشد. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X,A)$، زیرمجموعه بسته F از $X \times prim(A)$ وجود دارد به‌طوری که $I = I_F$، که در آن

$$I_F = \{f \in C(X,A) : \forall (x,P) \in F,\ f(x) \in P\}.$$

۲ مفاهیم مقدماتی و اولیه

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی مربوط به C^*-جبرها را یادآوری می‌کنیم. برای جزییات بیشتر به [۲]، [۵] و [۴] مراجعه نمایید. منظور از یک $*$-جبر، جبر A به همراه نگاشت مزدوج خطی $* : A \to A$ است، که برای هر $a, b \in A$،

$$a^{**} = (a^*)^* = a, \qquad (ab)^* = b^* a^*.$$

$*$-جبر نرمدار A را یک C^*-جبر گوییم، هرگاه در متر القاشده توسط نرم آن کامل باشد و برای هر $a, b \in A$، رابطه‌های زیر برقرار باشد.

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \qquad \|a^*a\| = \|a\|^۲.$$

زیرفضای برداری I از C^*-جبر A را یک ایده‌آل چپ (راست) گوییم، هرگاه

$$a \in A, \quad b \in I \Rightarrow ab \in I \quad (ba \in I).$$

درواقع، هر ایده‌آل بسته C^*-جبرها ، خود دارای ساختار یک C^*-جبر است.
C^*-جبر A را ساده [۲] گوییم هرگاه ایده‌آل بسته غیربدیهی نداشته باشد و آن را به‌طور جبری ساده گوییم هرگاه ایده‌آل غیربدیهی نداشته باشد. لازم به ذکر است که C^*-جبر یک‌دار A ساده است اگر و تنها اگر به‌طور جبری ساده باشد.
عنصر a در C^*-جبر یک‌دار A را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه $b \in A$ وجود داشته باشد که $ab = ba = ۱$. عنصر b یکتاست، آن را با $a^{-۱}$ و مجموعه عناصر وارونپذیر C^*-جبر یک‌دار A را با $Inv(A)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که برای هر C^*-جبر یک‌دار A، $Inv(A)$ یک زیرمجموعه باز از A است.
طیف یک عنصر a در C^*-جبر یک‌دار A به‌صورت مجموعه

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda ۱ - a \notin Inv(A)\}$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین، هرگاه $a = a^*$، آن‌گاه a را یک عنصر خودالحاق می‌نامیم. مجموعه عناصر خودالحاق را با A_{sa} نمایش می‌دهیم.
هرگاه برای عنصر خودالحاق a داشته‌باشیم $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$، گوییم a یک عنصر مثبت است و می‌نویسیم $a \geq ۰$. مجموعه عناصر مثبت A را با A^+ نشان می‌دهیم. شایان ذکر است که برای هر $a \in A$، $a^*a \in A^+$. در واقع، برای هر عنصر $a \in A$، عنصر یکتا $b \in A^+$ وجود دارد به طوری‌که $a^*a = b^۲$. این عنصر یکتا b را با $|a|$ نشان می‌دهیم. علاوه براین، برای هر $a, b \in A_{sa}$،

$$Max(a,b) = \frac{۱}{۲}(a + b + |a - b|).$$

ملاحظه ۱.۲. C^*-جبر دلخواه A را در نظر گرفته و فضای تمام توابع پیوسته روی فضای فشرده و هاسدورف X با مقادیر در C^*-جبر A را با $C(X,A)$ نشان می‌دهیم. این فضا مجهز به عملگرهای ضرب اسکالر، جمع، ضرب نقطه به نقطه و نگاشت مزدوج خطی که برای هر $f \in C(X,A)$، عنصر $f^* \in C(X,A)$، به نحوی است که برای هر $x \in X$، $f^*(x) = (f(x))^*$ ، یک $*$-جبر است. هم‌چنین، این فضا مجهز به نرم $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$، یک C^*-جبر است. لازم به ذکر است که برای هر $f \in C(X,A)^+$ عنصر $|f| \in C(X,A)$، به نحوی است که برای هر $x \in X$، $|f|(x) = |f(x)|$. به‌بیان دیگر،

$$C(X,A)^+ = C(X,A^+).$$

به‌علاوه، $Inv(C(X,A)) = C(X, Inv(A))$. به‌ویژه، اگر I ایده‌آلی از $C(X,A)$ باشد، آن‌گاه

$$I^+ = I \cap C(X,A^+).$$

هم‌چنین، برای هر $f, g \in C(X,A)^+$ با تعریف

$$Max(f,g)(x) = Max(f(x), g(x)),$$

داریم، $Max(f,g) \in C(X,A)^+$.

[2] simple

منظور از یک $*$-همریختی $\pi : A \to B$ بین C^*-جبرهای A و B، یک همریختی جبری است که برای هر $a \in A$، $\pi(a^*) = \pi(a)^*$. هر $*$-همریختی $\pi : A \to B(H)$، که در آن $B(H)$ C^*-جبر فضای تمام عملگرهای خطی و پیوسته روی فضای هیلبرت H است، را یک نمایش از A به روی فضای هیلبرت H می‌نامیم. بنابر قضیه گلفاند-نیمارک-سگال [۵]، همواره یک $*$-همریختی از C^*-جبر A به C^*-جبر $B(H)$، به ازای یک فضای هیلبرت H وجود دارد. نمایش π را یک نمایش تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه H هیچ زیرفضای پایای بسته غیربدیهی (زیرفضای K از فضای هیلبرت H که $\pi(A)K \subseteq K$) برای $\pi(A)$ نداشته باشد. هسته [3] هر نمایش π، یعنی مجموعه $\{a \in A : \pi(a) = 0\}$، یک ایده‌آل از دامنه است. به‌علاوه، از آنجا که هر $*$-همریختی بین C^*-جبرها، پیوسته است، هسته هر نمایش A یک ایده‌آل بسته از A است. هسته هر نمایش تحویل‌ناپذیر ناصفر روی C^*-جبر A را یک ایده‌آل اولیه در A می‌نامیم [۲]. مجموعه همه ایده‌آل‌های اولیه C^*-جبر A را با $Prim(A)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $Prim(A)$ به یک توپولوژی مجهز می‌شود که با نام توپولوژی غلاف-هسته (یا توپولوژی جیکبسون) شناخته شده است. در این توپولوژی بستار یک زیرمجموعه از $Prim(A)$ مانند E برابر است با

$$\overline{E} = \{Q \in Prim(A) : Q \supseteq \cap_{P \in E} P\}.$$

هرگاه I یک ایده‌آل بسته A باشد و

$$\Lambda = \{P : P \in Prim(A) \wedge I \subseteq P\},$$

آن‌گاه $I = \cap_{P \in \Lambda} P$. بنابراین، ساختار ایده‌آل‌های بسته یک C^*-جبر به‌وسیله ایده‌آل‌های اولیه آن کاملاً مشخص می‌شود . همچنین، از آن‌جا که، ایده‌آل‌های اولیه یک C^*-جبر در یک تناظر یک‌به‌یک با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ناصفر آن است، اگر رسته نمایش‌های تحویل‌ناپذیر دو C^*-جبر به مفهوم نظریه رسته‌ها، همارز باشند، آن‌گاه دو C^*-جبر دارای شبکه ایده‌آل‌های بسته یکسانی خواهند بود. هنگامی که رسته نمایش‌های دو C^*-جبر همارز باشند اصطلاحاً گوییم آنها همارز موریتا [4] هستند.

ملاحظه ۲.۲. بنابر قضیه گلفاند نیمارک [۲] برای هر C^*-جبر جابه‌جایی و یک‌دار A، فضای فشرده و هاسدورف X وجود دارد، به‌طوریکه A و $C(X)$ به عنوان دو C^*-جبر یکریخت هستند. به‌علاوه، فضای توپولوژیک X با $Prim(A)$، به عنوان دو فضای توپولوژیک یکریخت هستند.

۳ روش مستقیم تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته $C(X, A)$

در این بخش، به روش مستقیم به مطالعه و تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته C^*-جبر $C(X, A)$ می‌پردازیم. در اثبات قضیه اصلی از لم زیر استفاده می‌شود.

لم ۱.۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف و A یک C^*-جبر یک‌دار باشد. زیرمجموعه فشرده K از X و ایده‌آل I از $C(X, A)$ را در نظر بگیرید.

(الف) فرض کنید $f \in C(X, A)$ و برای هر $x \in K$، $f(x) \in Inv(A) \cap A^+$. در این صورت،

$$0 < inf \cup_{x \in K} \sigma(f(x)).$$

(ب) اگر برای هر $x \in K$، عنصری مانند $f_x \in I$ وجود داشته باشد که $f_x(x) \in Inv(A)$، آن‌گاه $f \in I^+$ وجود دارد، به طوری‌که، $0 \leq f \leq 1_{C(X,A)}$. همچنین، برای هر $x \in K$، $f(x) = 1_A$.

به‌ویژه، اگر $K = X$ در فرضیات قسمت (ب) صدق کند آن‌گاه، $I = C(X, A)$.

اثبات. برای اثبات (الف)، توجه می‌کنیم که تابع (مجموعه مقدار) طیف روی هر جبر باناخ نیم‌پیوسته بالایی است [۱]. از این‌رو، برای هر $x \in K$ و هر مجموعه باز شامل $\sigma(f(x))$، از جمله، بازه باز $V_x = (\frac{1}{2} Min\, \sigma(f(x)), Max\, \sigma(f(x)) + 1)$، همسایگی باز W_x از $f(x)$ وجود دارد که برای هر $a \in W_x$، $\sigma(a) \subseteq V_x$. از طرف دیگر، با توجه به پیوستگی تابع f همسایگی بازی از x

[3] kernel
[4] Morita equivalent

مانند U_x وجود دارد که برای هر $y \in U_x$، $f(y) \in W_x$. از بحث فوق نتیجه می‌شود که

$$\forall x \in K\ \exists U_x\ \forall y\ \in\ U_x\ \sigma(f(y))\ \subseteq\ V_x. \tag{۱.۳}$$

حال باتوجه به فشردگی مجموعه K، نقاط $x_۱, \ldots, x_n$ در K و همسایگی‌های باز شامل آنها مانند $U_{x_۱}, \ldots, U_{x_n}$، وجود دارند به‌طوریکه K را می‌پوشانند و به‌علاوه، با انتخاب

$$m := \frac{۱}{۲}\{Min\,\sigma(f(x_i))\ :\ ۱ \leq i \leq n\},$$

و با توجه به ۱.۳ ، خواهیم داشت:

$$m\ >\ \circ\ \wedge\ \forall x\ \in\ K\ \forall\lambda\ \in\ \sigma(f(x))\ \lambda\ >\ m.$$

از این‌رو،

$$\circ < inf\ \cup_{x \in K}\ \sigma(f(x)).$$

برای اثبات قسمت (ب)، فرض می‌کنیم برای هر $x \in K$، $f_x \in I$ وجود دارد که $f_x(x) \in Inv(A)$. با توجه به پیوستگی هر f_x و باز بودن مجموعه $Inv(A)$، داریم:

$$\forall x\ \in K\,\exists U_x\ \forall y\ \in U_x\ \ f_x(y)\ \in\ Inv(A), \tag{۲.۳}$$

که در آن U_x یک مجموعه باز در K و شامل x است.
حال با توجه به فشردگی K، نقاط $x_۱, \ldots, x_n \in K$ و همسایگی های باز شامل آنها مانند $U_{x_۱}, \ldots, U_{x_n}$، وجود دارند به طوری‌که مجموعه K را می‌پوشانند. همچنین، با توجه به فرض، توابع $f_{x_۱}, \ldots, f_{x_n}\ \in\ I$ وجود دارند به طوری‌که برای هر $y\ \in\ U_{x_i}$، $f_{x_i}(y) \in Inv(A)$. حال با انتخاب

$$g := \sum_{i=۱}^{n} f^*_{x_i} f_{x_i},$$

$g \in I^+$. همچنین،

$$\forall x\ \in\ K\ \exists\ ۱ \leq i \leq n\ f_{x_i}(x) \in Inv(A).$$

در نتیجه، $f_{x_i}(x)^* f_{x_i}(x) \in Inv(A)$. از آن‌جا که، $f_{x_i}(x)^* f_{x_i}(x) \leq g(x)$، پس

$$g(x) \in Inv(A) \cap A^+.$$

اکنون با توجه به قسمت الف، عدد حقیقی ناصفر m وجود دارد به‌طوریکه برای هر $x \in K$ و هر $\lambda \in \sigma(g(x))$، $m \leq \lambda$. تابع ثابت $m۱_A \in C(X, A)$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $h = Max(g, m۱_A)$. در این صورت، $h \in C(X, A)$ وارون‌پذیر است و

$$\circ \leq h^{-۱}g \leq ۱_{C(x,A)}.$$

همچنین، برای هر $x \in K$، $h(x) = g(x)$. اینک کافی است قرار دهیم $f := h^{-۱}g$.

□

قضیه ۲.۳. فرض کنید A یک C^*-جبر ساده یک‌دار است. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X, A)$، زیرمجموعه بسته F از X وجود دارد به‌طوری که $I = I_F$، که در آن

$$I_F = \{f \in C(X, A) : \forall x \in F,\ f(x) = \circ\}.$$

اثبات. برای هر $x \in X$، قرار می‌دهیم $I(x) = \{f(x) : f \in I\}$. به‌وضوح، $I(x)$ یک ایده‌آل A است و چون A C^*-جبر ساده و یک‌دار است، پس $I(x) = \{\circ\}$ یا $I(x) = A$. قرار می‌دهیم

$$F = \{x \in X : I(x) = \{\circ\}\}.$$

توجه می‌کنیم که اگر F تهی باشد، آن‌گاه $I = C(X, A) = I_F$. زیرا، برای هر $x \in X$، داریم $I(x) = A$. پس، برای هر $x \in X$، عضوی از I مانند f_x وجود دارد، به طوری‌که $f_x(x) = ۱_A$. از این‌رو، بنا به لم قبل $I = C(X, A)$. در ادامه، فرض می‌کنیم ایده‌آل I سره است (پس F ناتهی است) و نشان می‌دهیم $I = I_F$. برای اثبات این موضوع، فرض می‌کنیم $h \in I_F$ و $\varepsilon > \circ$ و قرار می‌دهیم

$$K = \{x \in X : \|h(x)\| \geq \varepsilon\}.$$

به‌وضوح، K فشرده است و $K \cap F = \emptyset$. پس برای هر $x \in K$، عضوی از I مانند f_x وجود دارد، به طوری‌که،

$$f_x(x) = ۱_A \in Inv(A).$$

بنابر قسمت (ب) لم قبل، $f \in I^+$ وجود دارد به‌طوری که $\circ \leq f \leq ۱_{C(X,A)}$ و برای هر $x \in K$، $f(x) = ۱_A$. حال با انتخاب $k := fh$، داریم $k \in I$ و $\|k - h\| \leq \varepsilon$. چون I بسته و ε دلخواه است، نتیجه می‌شود که $h \in I$.

□

۴ روش غیرمستقیم تعیین ساختار ایده‌آل‌های بسته $C(X, A)$

روی حاصل‌ضرب تانسوری جبری (به عنوان فضاهای برداری) دو C^*-جبر A و B، نرم‌های زیادی وجود دارند که کامل شده حاصل‌ضرب تانسوری جبری نسبت به این نرم‌ها، C^*-جبر می‌شوند. این فضاهای کامل را حاصل‌ضرب‌های تانسوری دو C^*-جبر می‌نامیم. کوچکترین و بزرگترین این نرم‌ها را به ترتیب با $\|\cdot\|_{min}$ و $\|\cdot\|_{max}$ نشان می‌دهیم. بعضی از C^*-جبرها مانند $C(X)$ و $K(H)$ دارای این خاصیت جالب هستند که روی حاصل‌ضرب تانسوری جبری آنها با هر C^*-جبر دیگر کوچکترین و بزرگترین نرم‌های اشاره شده با هم برابرند. در نتیجه، فقط یک C^*-نرم یکتا روی حاصل‌ضرب تانسوری جبری آنها وجود دارد. به این نوع از C^*-جبرها هسته‌ای [5] گوییم [۵]. یکی از مسایل جالب، تعیین ایده‌آل‌های بسته حاصل‌ضرب تانسوری دو C^*-جبر است. بنابر توضیحات قسمت‌های قبلی، کافی است روی ایده‌آل‌های اولیه متمرکز شویم. یکی از نتایج شناخته شده بیان می‌کند که هرگاه یکی از C^*-جبرهای A یا B هسته‌ای باشد آن‌گاه

$$Prim(A) \times Prim(B) \cong Prim(A \otimes B)$$

که این یکریختی (توپولوژیک) توسط نگاشت

$$(I, J) \longmapsto I \otimes B + A \otimes J$$

ایجاد می‌گردد [۳].

قضیه ۱.۴. فرض کنید I یک ایده‌آل بسته از $C(X, A)$ است. در این صورت، زیرمجموعه بسته F از فضای توپولوژیک $X \times Prim(A)$ وجود دارد، به طوری‌که

$$I = \{f \in C(X, A) : \forall (x, P) \in F,\ f(x) \in P\}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{P \in Prim(C(X, A)) : I \subseteq P\}.$$

داریم $I = \cap_{P \in \Lambda} P$. از آنجا که $C(X)$ هسته‌ای است و $C(X, A) \cong C(X) \otimes A$، از ملاحظه ۲.۲، نتیجه می‌شود که

$$Prim(C(X, A)) \cong Prim(C(X)) \times Prim(A) \cong X \times Prim(A).$$

---

[5] nuclear

در واقع، هرگاه $P \in Prim(C(X,A))$، آن‌گاه $x_P \in X$ و $J_P \in Prim(A)$ وجود دارند، به طوری‌که،

$$P = I_{\{x_P\}} \otimes A + C(X) \otimes J_P = \{f \in C(X,A) : \ f(x_P) \in J_P\}.$$

بنابراین

$$I = \cap_{P\in\Lambda} P = \cap_{P\in\Lambda}\{f \in C(X,A) : \ f(x_P) \in J_P\}.$$

حال از آنجا که Λ در توپولوژی غلاف-هسته بسته است، با انتخاب

$$F = \{(x_p, J_P) : \ P \in \Lambda\},$$

نتیجه می‌شود که F در $X \times Prim(A)$ بسته است و

$$I = \{f \in C(X,A) : \forall (x,P) \in F, \ f(x) \in P\}.$$

□

نتیجه **۲.۴**. فرض کنید A یک C^*-جبر ساده یک‌دار است. در این صورت، برای هر ایده‌آل بسته I از $C(X,A)$، زیرمجموعه بسته F از X وجود دارد به‌طوری که $I = I_F$، که در آن

$$I_F = \{f \in C(X,A) : \forall x \in F, \ f(x) = \circ\}.$$

اثبات. از آنجا که هر ایده‌آل بسته سره در هر C^*-جبر، زیرمجموعه حداقل یک ایده‌آل اولیه است، از این‌رو C^*-جبر A ساده است اگر و تنها اگر $\{\circ\}$ تنها ایده‌آل اولیه A باشد. بنابراین از قضیه قبل نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

□

فهرست منابع

[1] Aupetit, B., 1991. A primer on spectral theory, *Springer-Verlag, New York*. doi:101007/978-1-4612-3048-9

[2] Blackadar, B., 2006. Operator algebras. Theory of C*-algebras and von Neumann algebras, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122: Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III, *Springer-Verlag, Berlin.*

[3] Blanchard, E. and Kircher, E., 2004. Non-simple purely infinite C*-algebras: the Hausdorff case, *J. Funct. Anal.*, 207, pp.461-513. doi:10.1016/j.jfa.2003.06.008

[4] Conway, J.B., 1999. A course in operator theory, *Amer. Math. Soci.* doi: 10.1090/gsm/021

[5] Murphy, G. J., 1990. C*-algebras and operator theory, *Academic Press Inc., Boston, MA,*

Ideal Structure of Some C*-algebras

Mohammad Bagher Asadi[(1)], Mohammad Ali Asadi Vasafi[(1)]
and Zahra Hassanpour-Yakhdani[(1)] [6]

[(1)] Department of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, College of Sciences, University of Tehran, Tehran, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 18 June 2023 Accepted: 10 April 2024

Abstract: In this note, considering the main properties of closed ideals of C^*-algebras, we will determine the structure of closed ideals of the C^*-algrbra $C(X, A)$, the space of all continuous functions from compact Hausdorff space X to C^*-algebra A. Indeed, we will show that for every closed ideal I of $C(X, A)$, there is some closed subset F of topological space $X \times prim(A)$, such that

$$I = \{f \in C(X, A) : \quad \forall\, (x, P) \in F,\ f(x) \in P\}.$$

Keywords: C^*-algebras, Operator Algebras, Ideal, Tensor Product.

[6]Corresponding author.
E-mail addresses: (M.B. Asadi) mb.asadi@ut.ac.ir, (M.A. Asadi) asadi.ali@ut.ac.ir, (Z. Hassanpour-Yakhdani) zhasanpour91@gmail.com.