مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۱، ص ۶۱-۷۱

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2024.44505.2194

معکوس‌های تعمیم‌یافته و تبدیلات دوگال عملگرهای شرطی

مرتضی سهرابی(۱) [1] مصطفی حسنلو(۲)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران
(۲) دانشکده فنی و مهندسی خوی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

دبیر مسئول: محمداسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۸/۵/۱۴۰۲ تاریخ پذیرش: ۲۷/۱/۱۴۰۳

چکیده: در این مقاله ابتدا از دیدگاه نظریه اندازه، تبدیل دوگال عملگرهای شرطی از نوع لامبرت را محاسبه می‌کنیم . پس از آن با استفاده از تجزیه قطبی عملگرها، معکوس مور-پنروس $(\widehat{T}^p)$ و معکوس درازین$(\widehat{T}^d)$ این نوع عملگرها را به‌دست می‌آوریم و سپس روابط بین این نوع معکوس‌ها را برای تبدیل دوگال بررسی خواهیم کرد. در انتها با استفاده از مثال‌های متنوع از جمله نمایش ماتریسی درستی نتایج به‌دست آمده را نشان خواهیم داد.
واژه‌های کلیدی: عمگرهای شرطی، معکوس مور-پنروس، معکوس درازین، تبدیل دوگال، تجزیه قطبی، عملگر لامبرت.

رده‌بندی ریاضی: 47B20; 47B38.

۱ مقدمه

در نظریه عملگرها، بررسی عملگرها از سه دیدگاه عمده قابل بررسی است. دیدگاه اول مربوط به فضاهای زمینه‌ای است که این عملگرها روی آنها تعریف می‌شوند. دیدگاه دوم خواص این عملگرها است از جمله کران‌داری، فشردگی، فردهلم بودن، داشتن برد بسته، نرمال بودن، ابرنرمال بودن و غیره. سرانجام بررسی طیف این عملگرها می باشد. با توجه به اهمیتی که عملگرها در تجزیه و تحلیل ساختارهای جبری و توپولوژیکی فضاهای زمینه دارند و علاوه بر آن چون کارکردن با عملگرها به‌طور مستقیم کار چندان ساده‌ای نیست، از اینرو ریاضیدانان بر آن شدند تا به‌دنبال پیدا کردن پلی ارتباطی بین عملگرهای کلی و ترکیبی از عملگرهای خاص برآیند. در نتیجه طی چندین ابتکار عمل توسط ریاضیدانان ثابت شده است که رده وسیعی از عملگرها به‌صورت ترکیبی از عملگرهای ضربی و تصویرها می‌باشند. شاید یکی ازعوامل مهمی که این نوع عملگرها مهم جلوه می‌کند، در برداشتن رده وسیعی از عملگرهای کران‌دار روی فضاهای باناخ باشد .معمولاً این نوع

[1] نویسنده مسئول مقاله

(M. Hassanlou) m.hassanlou@uut.ac.ir, (M. Sohrabi) sohrabi.mo@lu.ac.ir

از عملگرها از دو دیدگاه مورد توجه بوده اند: اولاً فضایی که این نوع از عملگرها روی آن تعریف می‌شوند، مانند $A(D)$، $C(X)$، H^P، فضاهای L^Pو... ثانیاً برخی از خواص این نوع عملگرها مانند کران‌داری، فشردگی، طیف عملگر، فردهلم بودن، داشتن برد بسته، نرمال بودن و غیره. یکی دیگر از ابزارهای مهم که در بررسی رده وسیعی از عملگرها کاربرد دارد، عملگر امید شرطی E می‌باشد. باید خاطر نشان کنیم که مفهوم امید شرطی در اصل در نظریه احتمال مطالعه می‌شود و در این مقاله هدف ما توجه به مفهوم امید شرطی به عنوان یک عملگر بین فضاهای L^P می باشد. این عملگر یکی از ابزارهای اصلی در کار ما خواهد بود.
در سال ۱۹۳۵ درمرجع [۱۷] مور [2] معکوس تعمیم‌یافته یک ماتریس را به‌صورت منحصر به‌فردی روی فضای همه ماتریس‌های مختلط $m \times n$ تعریف کرد و در سال ۱۹۵۵ پنروس [3] فرم جبری تعریف مور را ارائه داد[۱۸]، و بعدها ثابت شد که تعاریف مور و پنروس در مورد معکوس های تعمیم یافته معادلند.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنید (X, Σ, μ) فضای اندازهٔ σ -متناهی و $\mathcal{A}$ یک زیر σ -جبر دلخواهی از Σ باشد به طوری که $(X, \mathcal{A}, \mu_{|\mathcal{A}})$ نیز یک فضای اندازهٔ σ -متناهی باشد. فضای متشکل از همهٔ توابع Σ -اندازه‌پذیر مختلط‌مقدار روی X را با $L^\circ(\Sigma)$ نشان می‌دهیم (به طور مشابه $L^\circ(\mathcal{A})$ نشان‌دهندهٔ فضای تمام توابع $\mathcal{A}$ -اندازه پذیر مختلط‌مقدار روی X می‌باشد). به ازای $1 \leq p \leq \infty$، برای سهولت فضای $L^p(X, \mathcal{A}, \mu_{|\mathcal{A}})$ را با نماد $L^p(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم که در آن $\mu_{|\mathcal{A}}$ تحدید اندازهٔ μ روی $\mathcal{A}$ می‌باشد. همچنین نرم آن با نماد $||.||_p$ نشان داده می‌شود به‌طوری که $L^p(\mathcal{A})$ یک زیر فضای باناخ $L^p(\Sigma)$ می‌باشد. برای هر تابع $f \in L^\circ(\Sigma)$ محمل آن را به‌صورت $\sigma(f) = \{x \in X; f(x) \neq \circ\}$ تعریف می‌کنیم. تمامی مقایسه ها بین مجموعه‌ها و توابع، به‌صورت تقریباً همه جا در نظر گرفته می‌شوند و از اینرو از نوشتن عبارات تقریبا همه جا صرف نظر می‌شود. در سراسر این مقاله فضای هیلبرت مختلط و با بعد نامتناهی با نماد $\mathcal{H}$، و جبر شامل تمام عملگرهای خطی و کران‌دار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با نماد $\mathcal{L}(\mathcal{H})$، همچنین هسته و برد عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ به ترتیب با نمادهای $\mathcal{N}(T)$ و $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ نشان داده می‌شوند.

برای هر تابع نامنفی و Σ- اندازه‌پذیر f اندازهٔ ν_f روی $\mathcal{A}$ را با ضابطهٔ $A \in \mathcal{A}$,$\nu_f(A) := \int_A f d\mu_{|\mathcal{A}}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\mu_{|\mathcal{A}}$ تحدید اندازهٔ μ روی $\mathcal{A}$ می‌باشد. اندازهٔ ν_f نسبت به اندازهٔ $\mu|_{\mathcal{A}}$ به‌طور مطلق پیوسته است و بنا بر قضیهٔ رادون-نیکودیم تابع نامنفی و $\mathcal{A}$-اندازه پذیر، $E^{\mathcal{A}}f$ موجود است به طوری که

$$\nu_f(A) = \int_A E^{\mathcal{A}} f d\mu_{\mathcal{A}}, \quad A \in \mathcal{A}$$

$E^{\mathcal{A}}f$، امید شرطی f نسبت به $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود. برای سادگی $E^{\mathcal{A}}$ را با نماد E نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید f یک تابع حقیقی‌مقدار Σ- اندازه‌پذیر باشد. گوییم f امیدپذیر شرطی نسبت به $\mathcal{A}$ است هرگاه $\mu(B_f) = \circ$ که در آن

$$B_f = \{x \in X : E(f^+)(x) = E(f^-)(x) = \infty\}.$$

تابع مختلط مقدار f امیدپذیر شرطی است هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن امیدپذیر شرطی باشند و امیدهای آنها روی مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت هم‌زمان بینهایت نباشد. در این حالت

$$Ef = E(Ref) + iE(Imf).$$

عملگر امید شرطی ابزار اصلی در کار ما خواهد بود. از اینرو برخی از خواص مهم آن را در زیر می‌آوریم. برای این منظور تعریف می‌کنیم $\mathcal{D}(E) = \{f \in L^\circ(\Sigma) :$ شرط‌پذیر باشد $f\}$ و فرض می‌کنیم $f, g \in \mathcal{D}(E)$، در این‌صورت

[2] Moor
[3] Penrose

۱) اگر f و g حقیقی‌مقدار با شرط $f \leq g$ باشد، آنگاه $E(f) \leq E(g)$.
۲) اگر g تابع مختلط‌مقدار و $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر باشد آنگاه $E(gf) = gE(f)$.
۳) اگر $f \in L^p(\Sigma)$، $g \in L^q(\Sigma)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آنگاه $E|fg| \leq (E|f|^p)^{\frac{1}{p}}(E|g|^q)^{\frac{1}{q}}$.
۴) $(E|f|)^p \leq E|f|^p$.
۵) $E(1) = 1$.
۶) $|E(f)|^p \leq E|f|^p$.
۷) $E|f - E(f)|^2 = E|f|^2 - |E(f)|^2$.
۸) $E|f|^2 = |E(f)|^2$ اگر و تنها اگر f، $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر باشد.
۹) اگر $f > 0$، آنگاه $E(f) > 0$.
۱۰) اگر $f \geq 0$، آنگاه $E(f) \geq 0$ و $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$.
۱۱) E یک عملگر خودالحاق و خودتوان است .

جهت مطالعات عمیق خواص مربوط به E، به عنوان یک ابزار قوی در نظریه آمار و احتمال، خصوصاً نظریه مارتینگل‌ها می‌توان منابع [۸، ۹، ۱۵، ۱۹، ۲۰] را نگریست.

حال اگر $u, w \in \mathcal{D}(E)$ آنگاه زوج (u, w) یک عملگر خطی مانند $T = M_wEM_u$، از $L^2(\Sigma)$ به توی $L^2(\Sigma)$ تعریف می‌کند، که در آن M_u و M_w عملگرهای ضربی هستند. توجه داشته باشید که به ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$، $uf \in \mathcal{D}(E)$. اگر $T = M_wEM_u$ کران‌دار باشد آنگاه عملگر $T = M_wEM_u$، را یک عملگر وزن‌دار از نوع عملگر لامبرت می‌نامیم. برای مطالعه بیشتر در مورد خواص این نوع عملگر، منابع [۱۲، ۲۱، ۲۲] را بنگرید.

در آنالیز تابعی کلاسیک ثابت می‌شود که عملگر کران‌دار T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تجزیهٔ یکتا موسوم به تجزیه قطبی به‌صورت $T = U|T|$ دارد که در آن $|T| := (T^*T)^{1/2}$ و U عملگر طول‌پای جزئی بوده به‌طوری که $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(T)$.

تعریف ۲.۲. اگر $T = U|T|$، تبدیل دوگال عملگر T به‌صورت $\widehat{T} := |T|U$ تعریف می‌شود[۷].

در این مقاله، هدف ما به‌دست آوردن تبدیل دوگال عملگرهای شرطی از نوع لامبرت، روی فضای $L^2(\Sigma)$ می‌باشد. سپس در ادامه با معرفیِ معکوس‌های تعمیم‌یافته، برخی از خصوصیات تبدیل دوگال را با استفاده از این معکوس‌ها به‌دست می‌آوریم و در انتها با مقایسه روابط به‌دست آمده و آوردن مثال‌های متنوع، درستی روابط به‌دست آمده را نشان خواهیم داد.

۳ معکوس‌های تعمیم‌یافته و تبدیلات دوگال

فرض کنید $B_C(\mathcal{H})$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کران‌دار با برد بسته روی $\mathcal{H}$ باشد. در این‌صورت برای هر $T \in B_C(\mathcal{H})$ معکوس مور-پنروس T که با نماد T^p نشان داده می‌شود، عملگر منحصر به فرد $T^p \in B_C(\mathcal{H})$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$TT^pT = T, \;\; T^pTT^p = T^p, \;\; (TT^p)^* = TT^p, \;\; (T^pT)^* = T^pT. \tag{۱.۳}$$

به علاوه T^p وجود دارد اگر و تنها اگر $T \in B_C(\mathcal{H})$. اگر $T = U|T|$ معکوس‌پذیر باشد در این صورت $T^{-1} = T^p$ و U یکانی است و $|T| = (T^*T)^{1/2}$ معکوس‌پذیر است. همچنین به ازای $T \in B_C(\mathcal{H})$ معکوس درازین عملگر T که با نماد T^d نشان داده می‌شود، عملگر منحصر به فرد $T^d \in B_C(\mathcal{H})$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$T^dTT^d = T^d, \;\; TT^d = T^dT, \;\; T^{k+1}T^d = T^k. \tag{۲.۳}$$

که در آن کمترین مقدار k که در رابطه فوق صدق کند را اندیس T نامیده و با نماد $ind(T)$ نشان می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر بعضی خواص مهم دیگر عملگرهای T^p, T^d می‌توان مراجع [۱–۶، ۱۰] را نگاه کرد.

در این بخش ما ابتدا معکوس مور-پنروس عملگر شرطی وزن‌دار از نوع لامبرت را به‌دست آورده و سپس بعضی از خواص و نتایج معکوس مور-پنروس را برای این نوع از عملگرها روی فضای $L^2(\Sigma)$ بیان می‌کنیم. به عنوان مثال

ابتدا $\widetilde{T^p}$ و $(\widetilde{T})^p$ را برای حالتی که $T = M_wEM_u$ می‌باشد به‌دست آورده و نشان می‌دهیم که در حالت کلی با هم برابر نیستند. همچنین در ادامه جداسازی برخی از کلاس‌های نرمال توسط عملگر $(M_wEM_u)^p$ را بررسی خواهیم کرد.
خاطر نشان کنیم که از آنجایی که برای هر $u \geq ۰$، $\sigma(u) \subseteq \sigma(E(u^۲))$، از اینرو قرارداد می‌کنیم که به‌جای عبارت $\frac{u}{E(u)}\chi_{\sigma(u)}$، از عبارت $\frac{u}{E(u)}$ استفاده شود.
در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم که $u, w \in L^۰_+(\Sigma)$، $Q = \sigma(E(uw))$ و $K = S \cap G$ که $G = \sigma(E(w))$ و $S = \sigma(E(u))$.

لم ۱.۳. فرض کنید $T = M_wEM_u \in B_C(L^۲(\Sigma))$ یک عملگر امید شرطی باشد. در این صورت روابط زیر را داریم:

$$T^p = M_{\frac{\chi_K}{E(u^۲)E(w^۲)}}T^*,\ T^d = M_{\frac{\chi_Q}{(E(uw))^۲}}T.$$

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که عملگر $T^p = M_{\frac{\chi_K}{E(u^۲)E(w^۲)}}T^*$ در شرایط (۳.۱) صدق می‌کند. به عنوان نمونه ما دو تا از این شرایط را نشان خواهیم داد و اثبات بقیه موارد مشابه خواهد بود. فرض کنید $f \in L^۲(\Sigma)$. در این‌صورت

$$T^pT(f) = \frac{\chi_K}{E(u^۲)E(w^۲)}T^*T(f) = \frac{uE(uf)}{E(u^۲)}$$

بنابراین $TT^pT(f) = T(f)$ و آشکارا T^pT خودالحاق هم هست. به‌طور مشابه نیز ثابت می‌شود که عملگر $T^d = M_{\frac{\chi_Q}{(E(uw))^۲}}T$ در شرایط (۳.۲) صدق می‌کند. □

لم ۲.۳. فرض کنید $T = M_wEM_u$ یک عملگر امید شرطی روی $L^۲(\Sigma)$ باشد. در این صورت احکام زیر برقرار هستند.
(الف) فرض کنید $T \in B(L^۲(\Sigma))$ و $۰ \leq u \in L^۰(\Sigma)$ و $\upsilon = u(E(|w|^۲))^{\frac{۱}{۲}}$. در این‌صورت اگر روی $\sigma(\upsilon)$، داشته باشیم $E(\upsilon) \geq \delta$، آنگاه عملگر T برد بسته دارد.
(ب) فرض کنید $U|T|$ تجزیه قطبی عملگر T باشد و $f \in L^۲(\Sigma)$، در این‌صورت

$$|T|(f) = (\frac{\chi_S E(w^۲)}{E(u^۲)})^{\frac{۱}{۲}}uE(uf),$$
$$U(f) = (\frac{\chi_K}{E(w^۲)E(u^۲)})^{\frac{۱}{۲}}wE(uf).$$

(پ) فرض کنید $U_p|T^p|$ تجزیه قطبی عملگر T^p باشد و $f \in L^۲(\Sigma)$، در این‌صورت

$$|T^p|(f) = (\frac{\chi_K}{E(u^۲)(E(w^۲))^۳})^{\frac{۱}{۲}}wE(wf),$$
$$U_p(f) = (\frac{\chi_K}{E(u^۲)E(w^۲)})^{\frac{۱}{۲}}uE(wf).$$

اثبات. منابع [۱۳، ۱۴] را بنگرید. □

قضیه ۳.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^۲(\Sigma))$. در این‌صورت داریم:
(الف) $\widehat{T} = M_{\frac{uE(uw)\chi_S}{E(u^۲)}}EM_u$.
(ب) $(\widehat{T})^p = M_{\frac{u\chi_{\sigma(E(uw))\cap S}}{E(u^۲)E(uw)}}EM_u$.
(پ) $\widehat{T^p} = M_{\frac{\chi_S wE(uw)}{E(u^۲)(E(w^۲))^۲}}EM_w$.
(ت) $(\widehat{T})^p$ و $\widehat{T^p}$ خودالحاق هستند.

اثبات. (الف) به آسانی با استفاده از قسمت (ب) در لم قبل به‌دست می‌آید.
(ب) قرار می‌دهیم $\lambda=\frac{uE(uw)}{E(u^۲)}$. در این‌صورت خواهیم داشت $\widehat{T}=M_\lambda EM_u$. از آنجایی که $\widehat{T}\geq ۰$، از اینرو بنابه رابطه (۳.۱) به‌دست می‌آوریم

$$(\widehat{T})^p=M_{\frac{\chi_{\sigma(\lambda)}}{E(u^۲)E(\lambda^۲)}}M_\lambda EM_u,$$

که در آن $\sigma(\lambda)=\sigma(u)\cap\sigma(E(uw))$. در نتیجه

$$(\widehat{T})^p(f)=\frac{u\chi_{\sigma(E(uw))}}{E(u^۲)E(uw)}E(uf),\qquad f\in L^۲(\Sigma).$$

(پ) برای اثبات این قسمت ابتدا قرار می‌دهیم $\mu=\frac{u\chi_G}{E(u^۲)E(w^۲)}$. در این‌صورت خواهیم داشت $T^p=M_\mu EM_w$. حال با استفاده از قسمت (الف) و قسمت (پ) از لم ۲.۳، خواهیم داشت

$$\widehat{T^p}(f)=\frac{\chi_S wE(uw)}{E(u^۲)(E(w^۲))^۲}E(wf),\qquad f\in L^۲(\Sigma).$$

اثبات قسمت (ت) به راحتی از قسمتهای (ب) و (پ) به‌دست می‌آید. □

در مرجع [۱۶] مورل [4] و موهلی [5] عملگرهای متمرکز [6] را معرفی نمودند. فرض کنید $T=U|T|$ تجزیه قطبی عملگر T روی فضای هیلبرت H باشد، در این صورت عملگر T را متمرکز گویند هرگاه خانواده‌ای از عملگرهای به فرم $\{T^nT^{*n},T^{*m}T^m:n,m\geq ۰\}$ جابجاپذیر باشند. حال فرض کنید برای $n\in\mathbb{N}$، عبارت $U_n|T^n|$ تجزیه قطبی عملگر T^n باشد. در این صورت در قضیه ۱ از [۱۶] ثابت شده است که عملگر T متمرکز است اگر و تنها اگر داشته باشیم $U_n=U^n$.

گزاره ۴.۳. فرض کنید $\widehat{T}\in B_C(L^۲(\Sigma))$، در این‌صورت عملگر $\widehat{T}$ متمرکز است.

اثبات. فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $f\in L^۲(\Sigma)$ باشد، در این‌صورت با استفاده از استقرای ریاضی و قضیه ۳.۳ خواهیم داشت

$$(\widehat{T})^n(f)=\frac{\chi_S(E(uw))^n}{E(u^۲)}uE(uf).$$

همچنین با محاسبه تجزیه قطبی عملگرهای $\widehat{T}$ و $(\widehat{T})^n$ خواهیم داشت

$$\widehat{U}(f)=\frac{\chi_S uE(uf)}{E(u^۲)},$$
$$\widehat{U_n}(f)=\frac{\chi_S uE(uf)}{E(u^۲)}.$$

اکنون بنا به روابط بالا چون همواره $\widehat{U_n}=\widehat{U}^n$ عملگر $\widehat{T}$ متمرکز خواهد شد. □

گزاره ۵.۳. فرض کنید $\widehat{T},T\in B_C(L^۲(\Sigma))$. در این‌صورت گزاره های زیر را داریم :
(الف) $(\widehat{T})^n=\widehat{T}$ اگر و تنها اگر $E(uw)=۱$.
(ب) $\widehat{T}$ کوازی پوچ توان است اگر و تنها اگر روی $\sigma(E(u^۲))$ داشته باشیم $E(uw)=۰$.
(ج) $\widehat{T}$ ایزومتری جزیی است اگر و تنها اگر روی $\sigma(E(u^۲))$ داشته باشیم $E(uw)=۱$.

---
[4] Morrel
[5] Muhly
[6] Centered

اثبات. الف) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f \in L^{2}(\Sigma)$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت

$$(\widehat{T})^n(f) = \frac{\chi_S(E(uw))^n}{E(u^2)} uE(uf),$$
$$\widehat{T}(f) = \frac{\chi_S E(uw)}{E(u^2)} uE(uf).$$

از روابط بالا به راحتی نتیجه می‌شود که روی $\sigma(E(u^2))$، حکم برقرار می‌باشد.
ب) می‌دانیم که

$$\|(\widehat{T})^n\| = \|\frac{(E(uw))^n}{(E(u^2))^n} E(u^2)\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که روی $\sigma(E(u^2))$ اگر $E(uw) = 0$ آنگاه

$$r(\widehat{T}) = \lim_{n\to\infty} \|(\widehat{T})^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\frac{E(uw)}{E(u^2)}\|_\infty = 0.$$

عکس رابطه فوق را به سادگی می‌توان اثبات نمود.
ج) با استفاده از محاسبات مستقیم خواهیم داشت $\widehat{T}(\widehat{T})^*\widehat{T} M_\Theta \widehat{T}$ که در آن $\Theta = E(uw)^{n-1}$. بنابراین نتیجه می‌شود که $\widehat{T}$ ایزومتری جزیی است اگرو تنها اگر $M_{\Theta-1}\widehat{T} = 0$. اما این رابطه برقرار است اگرو تنها اگر

$$\||\Theta - 1|\widehat{T}\| = 0.$$

به طور معادل از رابطه فوق روی Q نتیجه می‌شود که $E(uw) = 1$. □

قضیه ۶.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این‌صورت داریم:
(الف) $\widehat{T^d} = M_{\frac{u\chi_Q}{E(u^2)E(uw)}} EM_u$.
(ب) $\widehat{T}^d = M_{\frac{u\chi_Q}{E(u^2)E(uw)}} EM_u$.
(پ) $(\widehat{T^d})^p = M_{\frac{uE(uw)\chi_S}{E(u^2)}} EM_u$.
(ت) $(\widehat{T^p})^d = M_{\frac{wE(u^2)\chi_Q}{E(uw)}} EM_w$.

اثبات. قسمت‌های (الف) تا (ت) با استفاده از لم ۳.۱ و قضیه ۳.۳ اثبات می‌شوند. □

نتیجه ۷.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این‌صورت $\widehat{T^d} = (\widehat{T})^d$.

لم ۸.۳. [11] فرض کنید $u, w \in \mathcal{D}(E)$. در این‌صورت $E(uw) = \sqrt{E(u^2)E(w^2)}$ اگر و تنها اگر $w = g\bar{u}$ که در آن $g \in L^0(\mathcal{A})$.

نتیجه ۹.۳. فرض کنید $T \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این‌صورت
(الف) اگر $(\widehat{T^d})^p = (\widehat{T^p})^d$، آنگاه

$$E(uw) = \sqrt{E(u^2)E(w^2)}.$$

(ب) اگر $w = gu$ به ازای $g \in L^0(\mathcal{A})$، آنگاه $(\widehat{T^d})^p = (\widehat{T^p})^d$.

اثبات. الف) فرض کنید $f \in L^2(\Sigma)$ باشد، در این‌صورت بنا به قضیه قبل $(\widehat{T^d})^p = (\widehat{T^p})^d$ اگر و تنها اگر

$$\frac{uE(uw)\chi_S}{E(u^2)} E(uf) = \frac{wE(u^2)\chi_Q}{E(uw)} E(wf).$$

از آن‌جایی که $\mathcal{A}$ سیگما متناهی است از اینرو با جایگذاری $f_n = w\sqrt{E(u^۲)}\chi_{A_n}$ در رابطه فوق و گرفتن حد وقتی $n \longrightarrow \infty$ روی Q خواهیم داشت

$$\frac{uE(uw)}{E(u^۲)}E(uw)\sqrt{E(u^۲)} = \frac{wE(u^۲)}{E(uw)}E(w^۲)\sqrt{E(u^۲)}.$$

به طور معادل داریم

$$uE(uw)^۳ = wE(u^۲)^۲E(w^۲).$$

حال با ضرب کردن طرفین رابطه بالا در w و گرفتن E از طرفین خواهیم داشت

$$E(uw) = \sqrt{E(u^۲)E(w^۲)}.$$

قسمت (ب) با استفاده از لم ۸.۳ اثبات می‌شود. $\square$

مثال ۱۰.۳. فرض کنید $X = [۰,۱]\times[۰,۱]$ و $d\mu = dxdy$ و Σ مجموعه‌های لبگ روی X و $\mathcal{A} = \{[۰,۱]\times A\}$ به طوری که A یک مجموعه لبگ در $[۰,۱]$ باشد. در این‌صورت برای هر $f \in L^۲(\Sigma)$،

$$(Ef)(x,y) = \int_۰^۱ f(t,y)dt.$$

قرار می‌دهیم $u(x,y) = xe^y$ و $w(x,y) = x\cos(y)$. در این‌صورت خواهیم داشت

$$E(u^۲)(x,y) = \frac{e^{۲y}}{۳}, E(w^۲)(x,y) = \frac{\cos^۲(y)}{۳}.$$

و

$$(E(uw))^۲(x,y) = \frac{e^{۲y}\cos^۲(y)}{۹}.$$

از اینرو مشاهده می‌گردد که

$$(E(uw))^۲(x,y) = \frac{e^{۲y}\cos^۲(y)}{۲۵} = E(u^۲)(x,y)E(w^۲)(x,y).$$

همچنین با محاسبات مستقیم داریم:

$$(\widehat{T^d})^p = (\widehat{T^p})^d = \frac{x\cos(y)e^y}{۲}.$$

بنابراین از روابط فوق درستی نتیجه ۹.۳ حاصل می‌شود.

مثال ۱۱.۳. فرض کنید $\mu\{n\} = \frac{۱}{۳}$, $X = \{۱,۲,۳\}, \Sigma = ۲^X$. همچنین فرض کنید که $\mathcal{A}$ زیر سیگما جبر تولید شده توسط بخش‌های $\{\{۱,۲\},\{۳\}\}$ باشد. در این‌صورت $L^۲(\Sigma) \cong \mathbb{C}^۳$ و

$$E(f) = (\frac{۱}{\mu(A_۱)}\int_{A_۱} fd\mu)\chi_{A_۱} + (\frac{۱}{\mu(A_۲)}\int_{A_۲} fd\mu)\chi_{A_۲}$$

$$= \frac{f_۱+f_۲}{۲}\chi_{A_۱} + f_۳\chi_{A_۲}.$$

که در آن $A_1=\{1,2\}$ و $A_2=\{3\}$. آنگاه ماتریس نمایش $E=E^{\mathcal{A}}$ نسبت به پایه های متعامد استاندارد به‌صورت زیر است

$$E=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

اکنون فرض کنید $w=(w_1,w_2,w_3)$ و $u=(u_1,u_2,u_3)$ اعضایی ناصفر از $\mathbb{C}^3$ باشند در این‌صورت

$$\begin{aligned}T=M_wEM_u&=\begin{bmatrix}w_1&0&0\\0&w_2&0\\0&0&w_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1&0&0\\0&u_2&0\\0&0&u_3\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{w_1u_1}{2}&\frac{w_1u_2}{2}&0\\\frac{w_2u_1}{2}&\frac{w_2u_2}{2}&0\\0&0&w_3u_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}u^2&=(u_1^2,u_2^2,u_3^2),\\w^2&=(w_1^2,w_2^2,w_3^2),\\uw&=(u_1w_1,u_2w_2,u_3w_3),\\E(u^2)&=(\frac{u_1^2+u_2^2}{2},\frac{u_1^2+u_2^2}{2},u_3^2),\\E(w^2)&=(\frac{w_1^2+w_2^2}{2},\frac{w_1^2+w_2^2}{2},w_3^2),\\E(uw)&=(\frac{u_1w_1+u_2w_2}{2},\frac{u_1w_1+u_2w_2}{2},u_3w_3).\end{aligned}$$

فرض کنیم $u_i\neq 0, w_i\neq 0$. قرار می‌دهیم $a=\frac{u_1^2+u_2^2}{2}$ و $t=\frac{w_1^2+w_2^2}{2}$ و $b=\frac{u_1w_1+u_2w_2}{2}$ و $c=u_3w_3$. بنابراین به‌دست خواهیم آورد $uE(uw)=(u_1b,u_2b,u_3c)$ و $E(u^2)E(w^2)^2=(at^2,at^2,c^2w_3^2)$. از اینرو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\widehat{T}=M_{(\frac{1}{a},\frac{1}{a},\frac{1}{u_3^2})}uE(uw)EM_u&=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{a}&0\\0&0&\frac{1}{u_3^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{u_1^2b}{2}&\frac{u_1u_2b}{2}&0\\\frac{u_1u_2b}{2}&\frac{u_2^2b}{2}&0\\0&0&u_3^2b\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{u_1^2b}{2a}&\frac{u_1u_2b}{2a}&0\\\frac{u_1u_2b}{2a}&\frac{u_2^2b}{2a}&0\\0&0&b\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

و

$$\widehat{T^p}=M_{(\frac{1}{at^2},\frac{1}{at^2},\frac{1}{c^2w_3^2})}wE(uw)EM_w=\begin{bmatrix}\frac{w_1^2b}{2at^2}&\frac{w_1w_2b}{2at^2}&0\\\frac{w_1w_2b}{2at^2}&\frac{w_2^2b}{2at^2}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{bmatrix}.$$

همچنین از آن‌جایی که $E(u^2)E(uw)=(d,d,e)$ که در آن $d=\frac{(u_1^2+u_2^2)(u_1w_1+u_2w_2)}{4}$ و $e=u_3^2(u_3w_3)$. از اینرو

$$(\widehat{T})^p=M_{(\frac{1}{d},\frac{1}{d},\frac{1}{e})}M_uEM_u=\begin{bmatrix}\frac{1}{d}&0&0\\0&\frac{1}{d}&0\\0&0&\frac{1}{e}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{u_1^2}{2}&\frac{u_1u_2}{2}&0\\\frac{u_1u_2}{2}&\frac{u_2^2}{2}&0\\0&0&u_3^2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u_1^2}{2d} & \frac{u_1u_2}{2d} & 0 \\ \frac{u_1u_2}{2d} & \frac{u_2^2}{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_3^2}{e} \end{bmatrix}.$$

حال قرار می‌دهیم $u = (-1, 1, -1)$ و $w = (1, -1, 1)$. در این‌صورت به‌دست می‌آوریم $E(u^2) = (1, 1, -1)$ و $E(w^2) = (1, 1, 1)$ و $E(uw) = (-1, -1, -1)$. همچنین با محاسبات ساده خواهیم داشت $a = t = 1$ و $b = c = d = e = -1$. بعلاوه داریم

$$T = \widehat{T} = \widehat{T^p} = (\widehat{T})^p = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

همچنین در این حالت $\widehat{T}$ نه کوازی پوچ‌توان است نه ایزومتری جزیی. به طور مشابه اگر در روابط فوق قرار دهیم $u = (1, 1, -3)$ و $w = (0, 1, -1)$. در این حالت $E(w^2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$، $E(u^2) = (1, 1, 9)$ و $E(uw) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$. با محاسبات مستقیم خواهیم داشت

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{T^p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (\widehat{T})^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

۴ نتیجه گیری

هدف از این پژوهش معرفی عملگرهای امید شرطی و تبدیلات دوگال و مفهوم معکوس‌های تعمیم‌یافته می‌باشد. ابتدا با استفاده از تجزیه قطبی عملگرها، تبدیلات دوگال عملگرهای شرطی را محاسبه می‌کنیم و پس از آن معکوس مور- پنروس و معکوس درازین آنها را هم یافته و برخی از روابط و خواص مهم این تبدیلات را بررسی می‌کنیم و سپس با استفاده از مثال‌های متنوع درستی روابط به‌دست آمده را نشان می‌دهیم.

فهرست منابع

[1] Aiena, P. and Triolo, S., 2016. Fredholm spectra and Weyl type theorems for Drazin invertible operators. *Mediterranean journal of mathematics*, 13(6), pp. 4385-4400. doi: 10.1007/s00009-016-0751-3

[2] Amiri, P. and Samei, M.E., 2022. Existence of Urysohn and Atangana–Baleanu fractional integral inclusion systems solutions via common fixed point of multi-valued operators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 165, pp. 112822. doi: 10.1016/j.chaos.2022.112822

[3] Aponte, E., Macias, J., Sanabria, J. and Soto, J., 2021. B-Fredholm spectra of Drazin Invertible operators and applications. *Axioms* 10(2), pp. 111. doi: 10.3390/axioms10020111

[4] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E., 2003. *Generalized inverses: theory and applications*. Second Ed., Springer.

[5] Cvetković Ilić, D.S. and Wei, Y., 2017. *Algebraic properties of generalized inverses*. Developments in Mathematics 52, Springer.

[6] Djordjević D.S. and Dinčić, N.C., 2010. Reverse order law for the Moore–Penrose inverse. *J. Math. Anal. Appl.*, 361, pp. 252-261. doi: 10.1016/j.jmaa.2009.08.056

[7] Foias, C., Jung I., Ko, E. and Pearcy, C., 2003. Complete contractivity of maps associated with the Aluthge and Duggal transforms. *Pacific J. Math.*, 209, pp. 249-259. doi: 10.2140/pjm.2003.209.249

[8] Harrington, D. and Whitley, R., 1984. Seminormal composition operators. *J. Operator Theory*, 11, pp. 125-135.

[9] Hoover, T., Lambert, A. and Quinn J., 1982. The Markov process determined by a weighted composition operator. *Studia Math. (Poland)*, LXXII, pp. 225-235.

[10] Houas, M., Samei, M.E., Santra, S. and Alzabut J., 2024. On a Duffing-type oscillator differential equation on the transition to chaos with fractional q-derivatives, *Journal of Inequalities and Applications*, 2024(1), pp. 12. doi: 10.1186/s13660-024-03093-6

[11] Jabbarzadeh, M.R. and Sohrabi, M., Moore-Penrose-Dragomir Quasi-Mean For Conditional Operators. (In press).

[12] abbarzade, M.R., 2010. A conditional expectation type operator on L^p spaces. *Oper. Matrices*, 4(3), pp. 445-453. doi: 10.7153/oam-04-24

[13] Jabbarzadeh, M.R., Emamalipour, H. and Sohrabi, M., 2018. Parallelism between Moore-Penrose inverse and Aluthge transformation of operators. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 12, pp. 318-335. doi: 10.2298/AADM161026005J

[14] Jabbarzadeh, M.R. and Sohrabi, M., 2017. Moore-Penrose inverse of conditional type operators. *Oper. Matrices*, 11, pp. 289-299. doi: 10.7153/oam-11-19

[15] Lambert, A., 1986. Hyponormal composition operators. *Bull. London Math. Soc.*, 18, pp. 395-400.

[16] Morrell, B.B. and Muhly, P.S., 1974. Centered operators. *Studia Math.*, 51, pp. 251-263.

[17] Moor, E.H., 1920. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Amer. math. Soc.*, pp. 394-395.

[18] Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices. *Proc. camb. Philh. Soc.*, pp. 406-413. doi: 10.1017/S0305004100030401

[19] Rao, M.M., Conditional measure and applications, Marcel Dekker, New York. 1993.

[20] Singh, R.K. and Manhas, J.S., 1993. *Composition operators on function spaces*, North- Holland.

[21] Sohrabi, M., 2023. Drazin inverse of Lambert conditional type operators. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2.*, 72(1), pp. 605-619. doi: 10.1007/s12215-021-00693-9

[22] Sohrabi, M., 2022. Relationship between Cauchy dual and Drazin inverse of conditional type operators. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 176, pp. 103-119. doi: 10.1016/j.bulsci.2022.103119

Generalized inverses and Duggal transformations of conditional operators

Morteza Sohrabi[(1)] [7] Mostafa Hassanlou[(2)]
[(1)] Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran
[(2)] Engineering Faculty of Khoy, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Communicated by: Mohammad Esmaeil Sameei

Received:9 August 2023 Accepted: 15 April 2024

Abstract: In this paper, we first calculate the measure theoretic Duggal transform of Lambert conditional operators. Next, by using the polar decomposition of operators, we obtain Moore-Penrose inverse $(\widehat{T}^p)$ and Drazin inverse $(\widehat{T}^d)$ of these types of operators, and then we will check the relationships between these types of inverses for the Duggal transformation. Finally, by using various examples including matrix representation, we will show the correctness of the obtained results.

Keywords: Conditional expectation, Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, Duggall transform, Lambert operator.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[7]Corresponding author.
E-mail addresses: (M. Sohrabi) sohrabi.mo@lu.ac.ir, (M. Hassanlou) m.hassanlou@uut.ac.ir.