



معکوس‌های تعمیم‌یافته و تبدیلات دوگال عملگرهای شرطی

مرتضی سهرابی^(۱)، مصطفی حسنلو^(۲)

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران
^(۲) دانشکده فنی و مهندسی خوی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

دبیر مسئول: محمداسماعیل سامعی

تاریخ پذیرش: ۲۷/۱/۱۴۰۳

تاریخ دریافت: ۱۸/۵/۱۴۰۲

چکیده: در این مقاله ابتدا از دیدگاه نظریه اندازه، تبدیل دوگال عملگرهای شرطی از نوع لامبرت را محاسبه می‌کنیم. پس از آن با استفاده از تجزیه قطبی عملگرها، معکوس مور-پنروس (\hat{T}^p) و معکوس درازین (\hat{T}^d) این نوع عملگرها را به دست می‌آوریم و سپس روابط بین این نوع معکوس‌ها را برای تبدیل دوگال بررسی خواهیم کرد. در انتها با استفاده از مثال‌های متنوع از جمله نمایش ماتریسی درستی نتایج به دست آمده را نشان خواهیم داد. **واژه‌های کلیدی:** عملگرهای شرطی، معکوس مور-پنروس، معکوس درازین، تبدیل دوگال، تجزیه قطبی، عملگر لامبرت.

رده‌بندی ریاضی: 47B20; 47B38

۱ مقدمه

در نظریه عملگرها، بررسی عملگرها از سه دیدگاه عمده قابل بررسی است. دیدگاه اول مربوط به فضاهای زمینه‌ای است که این عملگرها روی آنها تعریف می‌شوند. دیدگاه دوم خواص این عملگرها است از جمله کران‌داری، فشردگی، فردهم بودن، داشتن برد بسته، نرمال بودن، ابرنرمال بودن و غیره. سرانجام بررسی طیف این عملگرها می‌باشد. با توجه به اهمیتی که عملگرها در تجزیه و تحلیل ساختارهای جبری و توپولوژیکی فضاهای زمینه دارند و علاوه بر آن چون کار کردن با عملگرها به‌طور مستقیم کار چندان ساده‌ای نیست، از اینرو ریاضیدانان بر آن شدند تا به دنبال پیدا کردن پلی ارتباطی بین عملگرهای کلی و ترکیبی از عملگرهای خاص برآیند. در نتیجه طی چندین ابتکار عمل توسط ریاضیدانان ثابت شده است که رده وسیعی از عملگرها به صورت ترکیبی از عملگرهای ضربی و تصویرها می‌باشند. شاید یکی از عوامل مهمی که این نوع عملگرها مهم جلوه می‌کند، در برداشتن رده وسیعی از عملگرهای کران‌دار روی فضاهای باناخ باشد. معمولاً این نوع

^۱ نویسنده مسئول مقاله

از عملگرها از دو دیدگاه مورد توجه بوده اند: اولاً فضایی که این نوع از عملگرها روی آن تعریف می‌شوند، مانند $A(D)$ ، $C(X)$ ، H^p ، فضاهای L^p و... ثانیاً برخی از خواص این نوع عملگرها مانند کران‌داری، فشردگی، طیف عملگر، فردهلم بودن، داشتن برد بسته، نرمال بودن و غیره. یکی دیگر از ابزارهای مهم که در بررسی رده وسیعی از عملگرها کاربرد دارد، عملگر امید شرطی E می‌باشد. باید خاطر نشان کنیم که مفهوم امید شرطی در اصل در نظریه احتمال مطالعه می‌شود و در این مقاله هدف ما توجه به مفهوم امید شرطی به عنوان یک عملگر بین فضاهای L^p می‌باشد. این عملگر یکی از ابزارهای اصلی در کار ما خواهد بود.

در سال ۱۹۳۵ در مرجع [۱۷] مور^۲ معکوس تعمیم‌یافته یک ماتریس را به صورت منحصر به فردی روی فضای همه ماتریس‌های مختلط $m \times n$ تعریف کرد و در سال ۱۹۵۵ پنروس^۳ فرم جبری تعریف مور را ارائه داد [۱۸]، و بعدها ثابت شد که تعاریف مور و پنروس در مورد معکوس‌های تعمیم یافته معادلند.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنید (X, Σ, μ) فضای اندازه σ -متناهی و \mathcal{A} یک زیر σ -جبر دلخواهی از Σ باشد به طوری که $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ نیز یک فضای اندازه σ -متناهی باشد. فضای متشکل از همه توابع Σ -اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X را با $L^0(\Sigma)$ نشان می‌دهیم (به طور مشابه $L^0(\mathcal{A})$ نشان‌دهنده فضای تمام توابع \mathcal{A} -اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X می‌باشد). به ازای $1 \leq p \leq \infty$ ، برای سهولت فضای $L^p(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ را با نماد $L^p(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم که در آن $\mu|_{\mathcal{A}}$ تحدید اندازه μ روی \mathcal{A} می‌باشد. همچنین نرم آن با نماد $\|\cdot\|_p$ نشان داده می‌شود به طوری که $L^p(\mathcal{A})$ یک زیر فضای باناخ $L^p(\Sigma)$ می‌باشد. برای هر تابع $f \in L^0(\Sigma)$ محمل آن را به صورت $\sigma(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ تعریف می‌کنیم. تمامی مقایسه‌ها بین مجموعه‌ها و توابع، به صورت تقریباً همه جا در نظر گرفته می‌شوند و از اینرو از نوشتن عبارات تقریباً همه جا صرف نظر می‌شود. در سراسر این مقاله فضای هیلبرت مختلط و با بعد نامتناهی با نماد \mathcal{H} ، و جبر شامل تمام عملگرهای خطی و کران‌دار روی فضای هیلبرت \mathcal{H} با نماد $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ، همچنین هسته و برد عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ به ترتیب با نمادهای $\mathcal{N}(T)$ و $\mathcal{R}(T)$ نشان داده می‌شوند.

برای هر تابع نامنفی و Σ -اندازه‌پذیر f اندازه ν_f روی \mathcal{A} را با ضابطه $\nu_f(A) := \int_A f d\mu|_{\mathcal{A}}$ ، $A \in \mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\mu|_{\mathcal{A}}$ تحدید اندازه μ روی \mathcal{A} می‌باشد. اندازه ν_f نسبت به اندازه $\mu|_{\mathcal{A}}$ به طور مطلق پیوسته است و بنا بر قضیه رادون-نیکودیم تابع نامنفی و \mathcal{A} -اندازه‌پذیر، $E^{\mathcal{A}}f$ موجود است به طوری که

$$\nu_f(A) = \int_A E^{\mathcal{A}}f d\mu|_{\mathcal{A}}, \quad A \in \mathcal{A}$$

$E^{\mathcal{A}}f$ ، امید شرطی f نسبت به \mathcal{A} نامیده می‌شود. برای سادگی $E^{\mathcal{A}}$ را با نماد E نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار Σ -اندازه‌پذیر باشد. گوئیم f امیدپذیر شرطی نسبت به \mathcal{A} است هرگاه $\mu(B_f) = 0$ که در آن

$$B_f = \{x \in X : E(f^+)(x) = E(f^-)(x) = \infty\}.$$

تابع مختلط مقدار f امیدپذیر شرطی است هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن امیدپذیر شرطی باشند و امیدهای آنها روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت هم‌زمان بینهایت نباشد. در این حالت

$$Ef = E(\operatorname{Re}f) + iE(\operatorname{Im}f).$$

عملگر امید شرطی ابزار اصلی در کار ما خواهد بود. از اینرو برخی از خواص مهم آن را در زیر می‌آوریم. برای این منظور تعریف می‌کنیم $\{f \text{ شرط‌پذیر باشد} : f \in L^0(\Sigma)\} = \mathcal{D}(E)$ و فرض می‌کنیم $f, g \in \mathcal{D}(E)$ ، در این صورت

²Moor

³Penrose

- (۱) اگر f و g حقیقی مقدار با شرط $f \leq g$ باشد، آنگاه $E(f) \leq E(g)$.
- (۲) اگر g تابع مختلط مقدار و \mathcal{A} -اندازه پذیر باشد آنگاه $E(gf) = gE(f)$.
- (۳) اگر $f \in L^p(\Sigma)$ ، $g \in L^q(\Sigma)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آنگاه $E|fg| \leq (E|f|^p)^{\frac{1}{p}}(E|g|^q)^{\frac{1}{q}}$.
- (۴) $(E|f|)^p \leq E|f|^p$.
- (۵) $E(1) = 1$.
- (۶) $|E(f)|^p \leq E|f|^p$.
- (۷) $E|f - E(f)|^2 = E|f|^2 - |E(f)|^2$.
- (۸) $E|f|^2 = |E(f)|^2$ اگر و تنها اگر f ، \mathcal{A} -اندازه پذیر باشد.
- (۹) اگر $f > 0$ ، آنگاه $E(f) > 0$.
- (۱۰) اگر $f \geq 0$ ، آنگاه $E(f) \geq 0$ و $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$.
- (۱۱) E یک عملگر خودالحاق و خودتوان است.

جهت مطالعات عمیق خواص مربوط به E ، به عنوان یک ابزار قوی در نظریه آمار و احتمال، خصوصاً نظریه مارتینگل‌ها می‌توان منابع [۸، ۹، ۱۵، ۱۹، ۲۰] را نگرست.

حال اگر $u, w \in \mathcal{D}(E)$ آنگاه زوج (u, w) یک عملگر خطی مانند $T = M_w E M_u$ ، از $L^2(\Sigma)$ به توی $L^2(\Sigma)$ تعریف می‌کند، که در آن M_u و M_w عملگرهای ضربی هستند. توجه داشته باشید که به ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$ ، $uf \in \mathcal{D}(E)$ اگر $T = M_w E M_u$ کران دار باشد آنگاه عملگر $T = M_w E M_u$ ، را یک عملگر وزن دار از نوع عملگر لامبرت می‌نامیم. برای مطالعه بیشتر در مورد خواص این نوع عملگر، منابع [۱۲، ۲۱، ۲۲] را بنگرید.

در آنالیز تابعی کلاسیک ثابت می‌شود که عملگر کران دار T روی فضای هیلبرت \mathcal{H} تجزیه یکتا موسوم به تجزیه قطبی به صورت $T = U|T|$ دارد که در آن $|T| := (T^*T)^{1/2}$ و U عملگر طول پای جزئی بوده به طوری که $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(T)$.

تعریف ۲.۲. اگر $T = U|T|$ ، تبدیل دوگال عملگر T به صورت $\widehat{T} := |T|U$ تعریف می‌شود [۷].

در این مقاله، هدف ما به دست آوردن تبدیل دوگال عملگرهای شرطی از نوع لامبرت، روی فضای $L^2(\Sigma)$ می‌باشد. سپس در ادامه با معرفی معکوس‌های تعمیم یافته، برخی از خصوصیات تبدیل دوگال را با استفاده از این معکوس‌ها به دست می‌آوریم و در انتها با مقایسه روابط به دست آمده و آوردن مثال‌های متنوع، درستی روابط به دست آمده را نشان خواهیم داد.

۳ معکوس‌های تعمیم یافته و تبدیلات دوگال

فرض کنید $B_C(\mathcal{H})$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کران دار با برد بسته روی \mathcal{H} باشد. در این صورت برای هر $T \in B_C(\mathcal{H})$ معکوس مور-پنروس T که با نماد T^p نشان داده می‌شود، عملگر منحصر به فرد $T^p \in B_C(\mathcal{H})$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$TT^pT = T, \quad T^pTT^p = T^p, \quad (TT^p)^* = TT^p, \quad (T^pT)^* = T^pT. \quad (1.3)$$

به علاوه T^p وجود دارد اگر و تنها اگر $T \in B_C(\mathcal{H})$ اگر $T = U|T|$ معکوس پذیر باشد در این صورت $T^{-1} = T^p$ و U یکانی است و $|T| = (T^*T)^{1/2}$ معکوس پذیر است. همچنین به ازای $T \in B_C(\mathcal{H})$ معکوس درازین عملگر T که با نماد T^d نشان داده می‌شود، عملگر منحصر به فرد $T^d \in B_C(\mathcal{H})$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$T^dTT^d = T^d, \quad TT^d = T^dT, \quad T^{k+1}T^d = T^k. \quad (2.3)$$

که در آن کمترین مقدار k که در رابطه فوق صدق کند را اندیس T نامیده و با نماد $ind(T)$ نشان می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر بعضی خواص مهم دیگر عملگرهای T^p, T^d می‌توان مراجع [۱-۶، ۱۰] را نگاه کرد.

در این بخش ما ابتدا معکوس مور-پنروس عملگر شرطی وزن دار از نوع لامبرت را به دست آورده و سپس بعضی از خواص و نتایج معکوس مور-پنروس را برای این نوع از عملگرها روی فضای $L^2(\Sigma)$ بیان می‌کنیم. به عنوان مثال

ابتدا \widetilde{T}^p و $(\widetilde{T})^p$ را برای حالتی که $T = M_w E M_u$ می‌باشد به دست آورده و نشان می‌دهیم که در حالت کلی با هم برابر نیستند. همچنین در ادامه جداسازی برخی از کلاس‌های نرمال توسط عملگر $(M_w E M_u)^p$ را بررسی خواهیم کرد. خاطر نشان کنیم که از آنجایی که برای هر $u \geq 0$ ، $\sigma(u) \subseteq \sigma(E(u^\vee))$ ، از اینرو قرارداد می‌کنیم که به جای عبارت $\frac{u}{E(u)} \chi_{\sigma(u)}$ ، از عبارت $\frac{u}{E(u)}$ استفاده شود. در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم که $Q = \sigma(E(uw))$ ، $u, w \in L_+^0(\Sigma)$ و $K = S \cap G$ که $G = \sigma(E(w))$ و $S = \sigma(E(u))$.

لم ۱.۳. فرض کنید $T = M_w E M_u \in B_C(L^\vee(\Sigma))$ یک عملگر امید شرطی باشد. در این صورت روابط زیر را داریم:

$$T^p = M \frac{\chi_K}{E(u^\vee)E(w^\vee)} T^*, \quad T^d = M \frac{\chi_Q}{(E(uw))^\vee} T.$$

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که عملگر $T^p = M \frac{\chi_K}{E(u^\vee)E(w^\vee)} T^*$ در شرایط (۳.۱) صدق می‌کند. به عنوان نمونه ما دو تا از این شرایط را نشان خواهیم داد و اثبات بقیه موارد مشابه خواهد بود. فرض کنید $f \in L^\vee(\Sigma)$ در این صورت

$$T^p T(f) = \frac{\chi_K}{E(u^\vee)E(w^\vee)} T^* T(f) = \frac{u E(u f)}{E(u^\vee)}$$

بنابراین $TT^p T(f) = T(f)$ و آشکارا $T^p T$ خودالحاق هم هست. به طور مشابه نیز ثابت می‌شود که عملگر $T^d = M \frac{\chi_Q}{(E(uw))^\vee} T$ در شرایط (۳.۲) صدق می‌کند. □

لم ۲.۳. فرض کنید $T = M_w E M_u$ یک عملگر امید شرطی روی $L^\vee(\Sigma)$ باشد. در این صورت احکام زیر برقرار هستند.

(الف) فرض کنید $T \in B(L^\vee(\Sigma))$ و $0 \leq u \in L^0(\Sigma)$ و $v = u(E(|w|^\vee))^\frac{1}{\vee}$ در این صورت اگر روی $\sigma(v)$ داشته باشیم $\delta \geq E(v)$ ، آنگاه عملگر T برد بسته دارد.
(ب) فرض کنید $U|T|$ تجزیه قطبی عملگر T باشد و $f \in L^\vee(\Sigma)$ در این صورت

$$|T|(f) = \left(\frac{\chi_S E(w^\vee)}{E(u^\vee)} \right)^\frac{1}{\vee} u E(u f),$$

$$U(f) = \left(\frac{\chi_K}{E(w^\vee)E(u^\vee)} \right)^\frac{1}{\vee} w E(u f).$$

(پ) فرض کنید $U_p|T^p|$ تجزیه قطبی عملگر T^p باشد و $f \in L^\vee(\Sigma)$ در این صورت

$$|T^p|(f) = \left(\frac{\chi_K}{E(u^\vee)(E(w^\vee))^\vee} \right)^\frac{1}{\vee} w E(w f),$$

$$U_p(f) = \left(\frac{\chi_K}{E(u^\vee)E(w^\vee)} \right)^\frac{1}{\vee} u E(w f).$$

□

اثبات. منابع [۱۳، ۱۴] را بنگرید.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^\vee(\Sigma))$ در این صورت داریم:

$$\widehat{T} = M \frac{u E(uw) \chi_S}{E(u^\vee)} E M_u \quad (\text{الف})$$

$$(\widehat{T})^p = M \frac{u \chi_{\sigma(E(uw)) \cap S}}{E(u^\vee)E(uw)} E M_u \quad (\text{ب})$$

$$\widehat{T}^p = M \frac{\chi_S w E(uw)}{E(u^\vee)(E(w^\vee))^\vee} E M_w \quad (\text{پ})$$

$$(\widehat{T})^p \text{ و } \widehat{T}^p \text{ خودالحاق هستند.} \quad (\text{ت})$$

اثبات. (الف) به آسانی با استفاده از قسمت (ب) در لم قبل به دست می آید.
 (ب) قرار می دهیم $\lambda = \frac{uE(uw)}{E(u^2)}$. در این صورت خواهیم داشت $\widehat{T} = M_\lambda EM_u$. از آنجایی که $\widehat{T} \geq 0$ ، از اینرو بنابه رابطه (۳.۱) به دست می آوریم

$$(\widehat{T})^p = M \frac{\chi_{\sigma(\lambda)}}{E(u^2)E(\lambda^2)} M_\lambda EM_u,$$

که در آن $\sigma(\lambda) = \sigma(u) \cap \sigma(E(uw))$ در نتیجه

$$(\widehat{T})^p(f) = \frac{u\chi_{\sigma(E(uw))}}{E(u^2)E(uw)} E(uf), \quad f \in L^2(\Sigma).$$

(پ) برای اثبات این قسمت ابتدا قرار می دهیم $\mu = \frac{u\chi_G}{E(u^2)E(w^2)}$. در این صورت خواهیم داشت $T^p = M_\mu EM_w$ حال با استفاده از قسمت (الف) و قسمت (پ) از لم ۲.۳، خواهیم داشت

$$\widehat{T^p}(f) = \frac{\chi_S w E(uw)}{E(u^2)(E(w^2))^2} E(wf), \quad f \in L^2(\Sigma).$$

□ اثبات قسمت (ت) به راحتی از قسمتهای (ب) و (پ) به دست می آید.

در مرجع [۱۶] مورل^۴ و موهلی^۵ عملگرهای متمرکز^۶ را معرفی نمودند. فرض کنید $T = U|T|$ تجزیه قطبی عملگر T روی فضای هیلبرت H باشد، در این صورت عملگر T را متمرکز گویند هرگاه خانواده ای از عملگرهای به فرم $\{T^n T^{*n}, T^{*m} T^m : n, m \geq 0\}$ جابجاپذیر باشند. حال فرض کنید برای $n \in \mathbb{N}$ ، عبارت $U_n |T^n|$ تجزیه قطبی عملگر T^n باشد. در این صورت در قضیه ۱ از [۱۶] ثابت شده است که عملگر T متمرکز است اگر و تنها اگر داشته باشیم $U_n = U^n$.

گزاره ۴.۳. فرض کنید $\widehat{T} \in B_C(L^2(\Sigma))$ ، در این صورت عملگر \widehat{T} متمرکز است.

اثبات. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f \in L^2(\Sigma)$ باشد، در این صورت با استفاده از استقرای ریاضی و قضیه ۳.۳ خواهیم داشت

$$(\widehat{T})^n(f) = \frac{\chi_S (E(uw))^n}{E(u^2)} u E(uf).$$

همچنین با محاسبه تجزیه قطبی عملگرهای \widehat{T} و $(\widehat{T})^n$ خواهیم داشت

$$\widehat{U}(f) = \frac{\chi_S u E(uf)}{E(u^2)},$$

$$\widehat{U}_n(f) = \frac{\chi_S u E(uf)}{E(u^2)}.$$

□ اکنون بنا به روابط بالا چون همواره $\widehat{U}_n = \widehat{U}^n$ عملگر \widehat{T} متمرکز خواهد شد.

گزاره ۵.۳. فرض کنید $\widehat{T}, T \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این صورت گزاره های زیر را داریم :

(الف) $(\widehat{T})^n = \widehat{T}^n$ اگر و تنها اگر $E(uw) = 1$.

(ب) \widehat{T} کوازی پوچ توان است اگر و تنها اگر روی $\sigma(E(u^2))$ داشته باشیم $E(uw) = 0$.

(ج) \widehat{T} ایزومتری جزیی است اگر و تنها اگر روی $\sigma(E(u^2))$ داشته باشیم $E(uw) = 1$.

⁴Morrel

⁵Muhly

⁶Centered

اثبات. الف) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f \in L^2(\Sigma)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$(\widehat{T})^n(f) = \frac{\chi_S(E(uw))^n}{E(u^2)} u E(uf),$$

$$\widehat{T}(f) = \frac{\chi_S E(uw)}{E(u^2)} u E(uf).$$

از روابط بالا به راحتی نتیجه می‌شود که روی $\sigma(E(u^2))$ حکم برقرار می‌باشد.
ب) می‌دانیم که

$$\|(\widehat{T})^n\| = \left\| \frac{(E(uw))^n}{(E(u^2))^n} E(u^2) \right\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که روی $\sigma(E(u^2))$ اگر $E(uw) = 0$ آنگاه

$$r(\widehat{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\widehat{T})^n\|^{\frac{1}{n}} = \left\| \frac{E(uw)}{E(u^2)} \right\|_\infty = 0.$$

عکس رابطه فوق را به سادگی می‌توان اثبات نمود.

ج) با استفاده از محاسبات مستقیم خواهیم داشت $\widehat{T}(\widehat{T})^* \widehat{T} M_\Theta \widehat{T}$ که در آن $\Theta = E(uw)^{n-1}$. بنابراین نتیجه می‌شود که \widehat{T} ایزومتری جزیی است اگر $M_\Theta \widehat{T} = 0$ اما این رابطه برقرار است اگر تنها اگر

$$\|\Theta - 1\| = 0.$$

□

به طور معادل از رابطه فوق روی Q نتیجه می‌شود که $E(uw) = 1$.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این صورت داریم:

$$\widehat{T}^d = M \frac{u \chi_Q}{E(u^2) E(uw)} E M_u \quad (\text{الف})$$

$$\widehat{T}^d = M \frac{u \chi_Q}{E(u^2) E(uw)} E M_u \quad (\text{ب})$$

$$(\widehat{T}^d)^p = M \frac{u E(uw) \chi_S}{E(u^2)} E M_u \quad (\text{پ})$$

$$(\widehat{T}^p)^d = M \frac{w E(u^2) \chi_Q}{E(uw)} E M_w \quad (\text{ت})$$

□

اثبات. قسمت‌های الف) تا ت) با استفاده از لم ۳.۱ و قضیه ۳.۳ اثبات می‌شوند.

نتیجه ۷.۳. فرض کنید $T, \widehat{T} \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این صورت $\widehat{T}^d = (\widehat{T})^d$.

لم ۸.۳. [۱۱] فرض کنید $u, w \in \mathcal{D}(E)$. در این صورت $E(uw) = \sqrt{E(u^2) E(w^2)}$ اگر و تنها اگر $w = g\bar{u}$ که در آن $g \in L^\circ(\mathcal{A})$.

نتیجه ۹.۳. فرض کنید $T \in B_C(L^2(\Sigma))$. در این صورت

الف) اگر $(\widehat{T}^d)^p = (\widehat{T}^p)^d$ ، آنگاه

$$E(uw) = \sqrt{E(u^2) E(w^2)}.$$

ب) اگر $w = gu$ به ازای $g \in L^\circ(\mathcal{A})$ ، آنگاه $(\widehat{T}^d)^p = (\widehat{T}^p)^d$.

اثبات. الف) فرض کنید $f \in L^2(\Sigma)$ باشد، در این صورت بنا به قضیه قبل $(\widehat{T}^d)^p = (\widehat{T}^p)^d$ اگر و تنها اگر

$$\frac{u E(uw) \chi_S}{E(u^2)} E(uf) = \frac{w E(u^2) \chi_Q}{E(uw)} E(wf).$$

از آن جایی که A سیگما متناهی است از اینرو با جایگذاری $f_n = w\sqrt{E(u^2)}\chi_{A_n}$ در رابطه فوق و گرفتن حد وقتی $n \rightarrow \infty$ روی Q خواهیم داشت

$$\frac{uE(uw)}{E(u^2)}E(uw)\sqrt{E(u^2)} = \frac{wE(u^2)}{E(uw)}E(w^2)\sqrt{E(u^2)}.$$

به طور معادل داریم

$$uE(uw)^2 = wE(u^2)^2E(w^2).$$

حال با ضرب کردن طرفین رابطه بالا در w و گرفتن E از طرفین خواهیم داشت

$$E(uw) = \sqrt{E(u^2)E(w^2)}.$$

□ قسمت (ب) با استفاده از لم ۸.۳ اثبات می‌شود.

مثال ۱۰.۳. فرض کنید $X = [0, 1] \times [0, 1]$ و $d\mu = dx dy$ و Σ مجموعه‌های لبگ روی X و $A = \{[0, 1] \times A\}$ به طوری که A یک مجموعه لبگ در $[0, 1]$ باشد. در این صورت برای هر $f \in L^2(\Sigma)$

$$(Ef)(x, y) = \int_0^1 f(t, y) dt.$$

قرار می‌دهیم $u(x, y) = xe^y$ و $w(x, y) = x \cos(y)$. در این صورت خواهیم داشت

$$E(u^2)(x, y) = \frac{e^{2y}}{3}, E(w^2)(x, y) = \frac{\cos^2(y)}{3}.$$

و

$$(E(uw))^2(x, y) = \frac{e^{2y} \cos^2(y)}{9}.$$

از اینرو مشاهده می‌گردد که

$$(E(uw))^2(x, y) = \frac{e^{2y} \cos^2(y)}{25} = E(u^2)(x, y)E(w^2)(x, y).$$

همچنین با محاسبات مستقیم داریم:

$$(\widehat{T^d})^p = (\widehat{T^p})^d = \frac{x \cos(y) e^y}{2}.$$

بنابراین از روابط فوق درستی نتیجه ۹.۳ حاصل می‌شود.

مثال ۱۱.۳. فرض کنید $\frac{1}{p}$ $X = \{1, 2, 3\}$, $\Sigma = 2^X$, $\mu\{n\} = \frac{1}{3}$ همچنین فرض کنید که A زیر سیگما جبر تولید شده توسط بخش‌های $\{1, 2\}$, $\{3\}$ باشد. در این صورت $L^2(\Sigma) \cong \mathbb{C}^3$ و

$$\begin{aligned} E(f) &= \left(\frac{1}{\mu(A_1)} \int_{A_1} f d\mu\right) \chi_{A_1} + \left(\frac{1}{\mu(A_2)} \int_{A_2} f d\mu\right) \chi_{A_2} \\ &= \frac{f_1 + f_2}{2} \chi_{A_1} + f_3 \chi_{A_2}. \end{aligned}$$

که در آن $A_1 = \{1, 2\}$ و $A_2 = \{3\}$. آنگاه ماتریس نمایش $E = E^A$ نسبت به پایه های متعامد استاندارد به صورت زیر است

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون فرض کنید $w = (w_1, w_2, w_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ اعضای ناصفر از \mathbb{C}^3 باشند در این صورت

$$\begin{aligned} T = M_w E M_u &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{w_1 u_1}{2} & \frac{w_1 u_2}{2} & 0 \\ \frac{w_2 u_1}{2} & \frac{w_2 u_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & w_3 u_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} u^\vee &= (u_1^\vee, u_2^\vee, u_3^\vee), \\ w^\vee &= (w_1^\vee, w_2^\vee, w_3^\vee), \\ uw &= (u_1 w_1, u_2 w_2, u_3 w_3), \\ E(u^\vee) &= \left(\frac{u_1^\vee + u_2^\vee}{2}, \frac{u_1^\vee + u_2^\vee}{2}, u_3^\vee \right), \\ E(w^\vee) &= \left(\frac{w_1^\vee + w_2^\vee}{2}, \frac{w_1^\vee + w_2^\vee}{2}, w_3^\vee \right), \\ E(uw) &= \left(\frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{2}, \frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{2}, u_3 w_3 \right). \end{aligned}$$

فرض کنیم $u_i \neq 0, w_i \neq 0$. قرار می‌دهیم $a = \frac{u_1^\vee + u_2^\vee}{2}$ و $t = \frac{w_1^\vee + w_2^\vee}{2}$ و $b = \frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{2}$ و $c = u_3 w_3$. بنابراین به دست خواهیم آورد $E(u^\vee)E(w^\vee) = (at^\vee, at^\vee, c^\vee w_3^\vee)$ و $E(uw) = (u_1 b, u_2 b, u_3 c)$ از اینرو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= M_{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{u_3^\vee}\right)} u E(uw) E M_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u_3^\vee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_1^\vee b}{2} & \frac{u_1 u_2 b}{2} & 0 \\ \frac{u_1 u_2 b}{2} & \frac{u_2^\vee b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & u_3^\vee b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{u_1^\vee b}{2a} & \frac{u_1 u_2 b}{2a} & 0 \\ \frac{u_1 u_2 b}{2a} & \frac{u_2^\vee b}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

و

$$\widehat{T}^p = M_{\left(\frac{1}{at^\vee}, \frac{1}{at^\vee}, \frac{1}{c^\vee w_3^\vee}\right)} w E(uw) E M_w = \begin{bmatrix} \frac{w_1^\vee b}{\sqrt{at^\vee}} & \frac{w_1 w_2 b}{\sqrt{at^\vee}} & 0 \\ \frac{w_1 w_2 b}{\sqrt{at^\vee}} & \frac{w_2^\vee b}{\sqrt{at^\vee}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

همچنین از آن جایی که $E(u^\vee)E(uw) = (d, d, e)$ که در آن $d = \frac{(u_1^\vee + u_2^\vee)(u_1 w_1 + u_2 w_2)}{2}$ و $e = u_3^\vee (u_3 w_3)$ از اینرو

$$(\widehat{T})^p = M_{\left(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}\right)} M_u E M_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_1^\vee}{2} & \frac{u_1 u_2}{2} & 0 \\ \frac{u_1 u_2}{2} & \frac{u_2^\vee}{2} & 0 \\ 0 & 0 & u_3^\vee \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u_1^2}{2d} & \frac{u_1 u_2}{2d} & 0 \\ \frac{u_1 u_2}{2d} & \frac{u_2^2}{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_2^2}{e} \end{bmatrix}.$$

حال قرار می‌دهیم $u = (-1, 1, -1)$ و $w = (1, -1, 1)$. در این صورت به دست می‌آوریم $E(u^2) = (1, 1, -1)$ و $E(w^2) = (1, 1, 1)$ و $E(uw) = (-1, -1, -1)$. همچنین با محاسبات ساده خواهیم داشت $a = t = 1$ و $b = c = d = e = -1$ بعلاوه داریم

$$T = \widehat{T} = \widehat{T}^p = (\widehat{T})^p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

همچنین در این حالت \widehat{T} نه کوازی پوچ توان است نه ایزومتري جزیی. به طور مشابه اگر در روابط فوق قرار دهیم $u = (1, 1, -3)$ و $w = (0, 1, -1)$. در این حالت $E(u^2) = (1, 1, 9)$, $E(w^2) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ و $E(uw) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3)$ با محاسبات مستقیم خواهیم داشت

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{T}^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (\widehat{T})^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

۴ نتیجه گیری

هدف از این پژوهش معرفی عملگرهای امید شرطی و تبدیلات دوگال و مفهوم معکوس‌های تعمیم‌یافته می‌باشد. ابتدا با استفاده از تجزیه قطبی عملگرها، تبدیلات دوگال عملگرهای شرطی را محاسبه می‌کنیم و پس از آن معکوس مور-پنروس و معکوس درازین آنها را هم یافته و برخی از روابط و خواص مهم این تبدیلات را بررسی می‌کنیم و سپس با استفاده از مثال‌های متنوع درستی روابط به دست آمده را نشان می‌دهیم.

فهرست منابع

- [1] Aiena, P. and Triolo, S., 2016. Fredholm spectra and Weyl type theorems for Drazin invertible operators. *Mediterranean journal of mathematics*, 13(6), pp. 4385-4400. doi: 10.1007/s00009-016-0751-3
- [2] Amiri, P. and Samei, M.E., 2022. Existence of Urysohn and Atangana–Baleanu fractional integral inclusion systems solutions via common fixed point of multi-valued operators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 165, pp. 112822. doi: 10.1016/j.chaos.2022.112822
- [3] Aponte, E., Macias, J., Sanabria, J. and Soto, J., 2021. B-Fredholm spectra of Drazin Invertible operators and applications. *Axioms* 10(2), pp. 111. doi: 10.3390/axioms10020111
- [4] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E., 2003. *Generalized inverses: theory and applications*. Second Ed., Springer.

- [5] Cvetković Ilić, D.S. and Wei, Y., 2017. *Algebraic properties of generalized inverses*. Developments in Mathematics 52, Springer.
- [6] Djordjević D.S. and Dinčić, N.C., 2010. Reverse order law for the Moore–Penrose inverse. *J. Math. Anal. Appl.*, 361, pp. 252-261. doi: 10.1016/j.jmaa.2009.08.056
- [7] Foias, C., Jung I., Ko, E. and Pearcy, C., 2003. Complete contractivity of maps associated with the Aluthge and Duggal transforms. *Pacific J. Math.*, 209, pp. 249-259. doi: 10.2140/pjm.2003.209.249
- [8] Harrington, D. and Whitley, R., 1984. Seminormal composition operators. *J. Operator Theory*, 11, pp. 125-135.
- [9] Hoover, T., Lambert, A. and Quinn J., 1982. The Markov process determined by a weighted composition operator. *Studia Math. (Poland)*, LXXII, pp. 225-235.
- [10] Houas, M., Samei, M.E., Santra, S. and Alzabut J., 2024. On a Duffing-type oscillator differential equation on the transition to chaos with fractional q-derivatives, *Journal of Inequalities and Applications*, 2024(1), pp. 12. doi: 10.1186/s13660-024-03093-6
- [11] Jabbarzadeh, M.R. and Sohrabi, M., Moore-Penrose-Dragomir Quasi-Mean For Conditional Operators. (In press).
- [12] abbarzade, M.R., 2010. A conditional expectation type operator on L^p spaces. *Oper. Matrices*, 4(3), pp. 445-453. doi: 10.7153/oam-04-24
- [13] Jabbarzadeh, M.R., Emamalipour, H. and Sohrabi, M., 2018. Parallelism between Moore-Penrose inverse and Aluthge transformation of operators. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 12, pp. 318-335. doi: 10.2298/AADM161026005J
- [14] Jabbarzadeh, M.R. and Sohrabi, M., 2017. Moore-Penrose inverse of conditional type operators. *Oper. Matrices*, 11, pp. 289-299. doi: 10.7153/oam-11-19
- [15] Lambert, A., 1986. Hyponormal composition operators. *Bull. London Math. Soc.*, 18, pp. 395-400.
- [16] Morrell, B.B. and Muhly, P.S., 1974. Centered operators. *Studia Math.*, 51, pp. 251-263.
- [17] Moor, E.H., 1920. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Amer. math. Soc.*, pp. 394-395.
- [18] Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices. *Proc. camb. Philh. Soc.*, pp. 406-413. doi: 10.1017/S0305004100030401
- [19] Rao, M.M., Conditional measure and applications, Marcel Dekker, New York. 1993.
- [20] Singh, R.K. and Manhas, J.S., 1993. *Composition operators on function spaces*, North- Holland.
- [21] Sohrabi, M., 2023. Drazin inverse of Lambert conditional type operators. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2.*, 72(1), pp. 605-619. doi: 10.1007/s12215-021-00693-9
- [22] Sohrabi, M., 2022. Relationship between Cauchy dual and Drazin inverse of conditional type operators. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 176, pp. 103-119. doi: 10.1016/j.bulsci.2022.103119



Generalized inverses and Duggal transformations of conditional operators

Morteza Sohrabi⁽¹⁾ ⁷ Mostafa Hassanlou⁽²⁾

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran

⁽²⁾ Engineering Faculty of Khoy, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Communicated by: Mohammad Esmaeil Sameei

Received: 9 August 2023

Accepted: 15 April 2024

Abstract: In this paper, we first calculate the measure theoretic Duggal transform of Lambert conditional operators. Next, by using the polar decomposition of operators, we obtain Moore-Penrose inverse (\widehat{T}^p) and Drazin inverse (\widehat{T}^d) of these types of operators, and then we will check the relationships between these types of inverses for the Duggal transformation. Finally, by using various examples including matrix representation, we will show the correctness of the obtained results.

Keywords: Conditional expectation, Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, Duggall transform, Lambert operator.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

⁷Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Sohrabi) sohrabi.mo@lu.ac.ir, (M. Hassanlou) m.hassanlou@uut.ac.ir.