



## یک طرح تفاضل متناهی برای معادلات انتشار مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی با جواب‌های منفرد ضعیف

مجتبی فردی<sup>(۱)</sup>، ابراهیم امینی<sup>(۲)</sup>، سهیلا محمدی<sup>(۱)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ۳۴۱۴۱-۸۸۱۸۶، ایران  
<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

دبیر مسئول: مرتضی گنج‌بزان

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۲۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲

چکیده: در این مقاله، معادلات انتشار مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی با جواب‌های منفردی ضعیف در زمان اولیه در نظر گرفته شده است. طرح تفاضلی جدید با استفاده از یک شبکه غیریکنواخت برای حل این معادلات ارائه می‌شود. پایداری و همگرایی طرح تفاضلی پیشنهادی مورد بحث قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که طرح تفاضلی بدون قید و شرط پایدار است و ثابت می‌کنیم که طرح تفاضلی همگرا است. همچنین، نشان می‌دهیم که مرتبه همگرایی زمانی روی شبکه غیریکنواخت بیش از شبکه یکنواخت است. در پایان، چندین مثال عددی برای تایید نتایج تئوری ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مرتبه‌ی توزیعی، مکانی-زمانی، شبکه غیریکنواخت، جواب‌های ناهموار، پایداری، تخمین خطا.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 65M70; 35R11

### ۱ مقدمه

حسابان کسری مجموعه‌ای از محاسبات ریاضی است که در آن‌ها مشتقات کسری و انتگرال‌های کسری وجود دارند. از حسابان کسری برای تجزیه و تحلیل حمل و نقل دینامیکی و برخی دستگاه‌های پیچیده استفاده می‌شود. بسیاری از محققان با استفاده از حسابان کسری مدل‌های پیشرفته ریاضی و دستگاه‌های غیرعادی پیچیده را بررسی می‌کنند. حسابان کسری در بررسی پدیده‌های طبیعی مختلف نقش اساسی دارد که می‌توانیم به مواردی مانند ویسکوالاستیک، مدل‌سازی زیستی، مدل‌سازی مالی، فناوری نانو، حمل و نقل غیرعادی و انتشار غیرعادی، و گام‌های تصادفی اشاره کنیم. [۹، ۱۵، ۱۹]

در دهه‌های اخیر دانشمندان و ریاضی‌دانان کشف کرده‌اند که معادلات مشتقات جزئی کسری بهتر می‌توانند توصیف‌کننده پدیده‌های طبیعی یا پیچیده در مسائل زندگی واقعی باشند. بنابراین معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است و روش‌های عددی متنوعی برای حل این نوع معادلات پیشنهاد شده است [۲، ۷، ۱۰، ۱۴، ۱۸].  
 در سال‌های اخیر، برخی مطالعات مربوط به حل تحلیلی معادلات انتشار کسری مرتبه توزیعی انجام شده است [۳، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۷].

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

این حال یافتن جواب دقیق این نوع معادلات در حالت کلی امکان پذیر نیست. از این رو توسعه روش‌های عددی کارآمد برای حل این نوع معادلات ضروری به نظر می‌رسد. در [۱، ۴، ۲۲، ۲۳] برخی روش‌های عددی برای حل معادلات مشتقات جری کسری مرتبه توزیعی پیشنهاد شده است. بایستی توجه داشت که تحلیل اکثر روش‌های عددی توسعه یافته برای معادلات مذکور که مبتنی بر این فرض است که جواب‌های دقیق در مسیر زمان هموارند. با این حال، این فرضیات اغلب درست نیستند. به عنوان مثال، نویسنده [۱۶] معادلات انتشار کسری را مورد بررسی قرار داده و وجود یک منفردی ضعیف در زمان اولیه  $t = 0$  را نشان داده است.

## ۱.۱ هدف و دستاوردهای این مقاله

بر اساس [۱۶، ۲۰، ۲۱]، استفاده از شبکه غیر یکنواخت زمانی برای معادلات کسری مناسب‌تر است. بنابراین در این مقاله با فرض ناهمواری جواب یک طرح تفاضلی کارآمد برای معادلات انتشار کسری مرتبه توزیعی زمانی-مکانی پیشنهاد می‌شود. هدف اصلی این مقاله، ارائه روش تفاضلی جدید بر روی نقاط گرهی غیر یکنواخت برای حل معادلات انتشار کسری مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی همراه با داده‌های غیر هموار است. ما همچنین، پایداری و همگرایی طرح پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. دستاوردهای اصلی این مقاله به شرح زیر هستند:

(الف) طرح تفاضلی کارآمد برای حل معادلات انتشار کسری مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی با جواب‌های ناهموار پیشنهاد شده است.  
 (ب) پایداری و همگرایی طرح تفاضلی بررسی شده است که نشان می‌دهد طرح تفاضلی پیشنهادی بدون قید و شرط پایدار است.

## ۲.۱ ساختار کلی مقاله

این مقاله به شکل زیر سازمان دهی شده است. در قسمت ۲، یک تقریب تفاضلی ضمنی برای معادلات انتشار کسری مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی ارائه می‌دهیم. در ادامه این بخش، پایداری و همگرایی طرح تفاضلی ارائه شده را ارائه می‌کنیم. در قسمت ۳، چندین مثال عددی برای بررسی روش پیشنهادی می‌آوریم که این مثال‌ها درستی و دقت بالای روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهند.

## ۲ تحلیل معادلات انتشار کسری مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی

### ۱.۲ طرح تفاضلی ضمنی

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$D_t^{[\omega]} u(x, t) - \int_1^2 P(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha = f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.2)$$

که دارای شرایط اولیه و مرزی زیر است:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.2)$$

که در آن  $t$  متغیر زمان و  $x$  متغیر زمان هستند. مشتق کسری از مرتبه‌ی توزیعی به صورت زیر است:

$$D_t^{[\omega]} u(x, t) = \int_c^d \omega(\theta) {}_C^{\theta} D_t^\theta u(x, t) d\theta,$$

که در آن تابع وزن  $\omega(\theta)$  در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\omega(\theta) \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$\int_c^d \omega(\theta) d\theta = C, \quad C > 0 \quad (\text{ب})$$

ج) ثابت  $1 < \bar{\theta} \leq \theta$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $\theta \in (\bar{\theta}, d]$  داشته باشیم  $\omega(\theta) \equiv \circ$  و به ازای هر  $\theta \in [c, \bar{\theta}]$  داشته باشیم  $\omega(\theta) \neq \circ$

در این جا به ازای  $1 < \alpha \leq 2$ ، نمایش مشتق کسری ریس از مرتبه  $\alpha$  است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = -\psi_\alpha \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} \right) u(x, t), \quad \psi_\alpha = \circ \Delta \sec(\circ \Delta \pi \alpha)$$

که در آن عملگرهای ریمان-لیوویل راست و چپ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \partial_{x^+}^\alpha \int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha} u(\xi, t) d\xi, \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \partial_{x^-}^\alpha \int_x^L (\xi-x)^{1-\alpha} u(\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

و تابع وزن  $P(\alpha)$  در شرایط زیر صدق می کند:

$$P(\alpha) \geq \circ \quad \text{الف)}$$

$$\circ < \int_1^2 P(\alpha) d\alpha < \infty \quad \text{ب)}$$

ج) ثابت  $1 < \bar{\alpha} \leq 2$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $\alpha \in (\bar{\alpha}, 2]$  داشته باشیم  $P(\alpha) \equiv \circ$  و به ازای هر  $\alpha \in [1, \bar{\alpha}]$  داشته باشیم  $P(\alpha) \neq \circ$

فرض مسئله: فرض کنید که ثابت  $C$  وجود دارد به طوری که برای هر  $(x, t) \in (\circ, L) \times (\circ, T]$  داشته باشیم:

$$\frac{\partial^s u(\cdot, t)}{\partial t^s} \leq C(1 + t^{\delta-s}), \quad s = \circ, 1, 2, \quad \delta \in [d, 1).$$

برای تقریب مشتق کسری از مرتبه  $\alpha$  توزیعی زمانی در معادله (۱.۲) ابتدا بازه  $[c, d] \subset [0, 1]$  را به تعداد  $J$  زیربازه تبدیل می کنیم و قرار می دهیم:

$$c = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_J = d.$$

تعریف می کنیم:

$$\Delta \lambda_s = \lambda_s - \lambda_{s-1} = \frac{d-c}{J} = \sigma, \quad J \in \mathbb{N},$$

$$\theta_s = \frac{\lambda_s + \lambda_{s-1}}{2} = c + \frac{(2s-1)(d-c)}{2J}, \quad s = 1, 2, \dots, J.$$

فرمول ذوزنقهای مرکب اصلاح شده برای تقریب  $\int_c^d \omega(\theta) {}^C D_t^\alpha u(x, t) d\theta$  به کار می بریم، بنابراین لم زیر را داریم.

لم ۱.۲. [۲۰] (فرمول ذوزنقهای مرکب اصلاح شده) فرض کنید  $g(\theta) \in C^2[c, d]$ ، آن گاه داریم:

$$\int_c^d g(\theta) d\theta = \sum_{s=1}^J \frac{d-c}{J} g\left(c + \frac{(2s-1)(d-c)}{2J}\right) + R_1 = \sum_{s=1}^J \Delta \eta_s g(\theta_s) + R_1,$$

که در آن  $R_1 = O(\sigma^2)$  است.

فرض کنید  $g(\theta, x, t) = \omega(\theta) {}^C D_t^\theta u(x, t)$  و  $\omega(\theta) \in C^r[c, d]$  و  $g(\theta, x, t) \in C^r[c, d]$ ، آن‌گاه با به کار بردن لم ۱.۲ داریم:

$$D_t^{[\omega]} u(x, t) = \int_c^d g(\theta, x, t) d\theta = \sum_{s=1}^J \frac{d-c}{J} g(\theta_s, x, t) + R_1 = \sum_{s=1}^J c_s {}^C D_t^{\theta_s} u(x, t) + R_1,$$

که در آن

$$c_s = \frac{(d-c)\omega(\theta_s)}{J}, s = 1, 2, \dots, J.$$

برای گسسته‌سازی متغیرهای مکانی و زمانی در دامنه‌ی  $[0, L] \times [0, T]$ ، فرض کنید برای  $m = 0, 1, \dots, M$  داشته باشیم  $x_m = m\Delta x$  که در آن  $\Delta x = \frac{L}{M}$  و همچنین برای  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  داشته باشیم  $t_n = T(n/N)^r$  که در آن  $r \geq 1$  است. برای گسسته‌سازی مشتق کسری زمانی لم زیر را داریم:

لم ۲.۲. [۲۴] فرض کنید  $0 < \theta < 1$  و به ازای  $n = 1, 2, \dots, N$ ، تعریف می‌کنیم  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ . اگر

$$\frac{\partial^l u(\cdot, t)}{\partial t^l} \leq C(1 + t^{\theta-l}), l = 0, 1, 2,$$

آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$${}^C D_t^\theta u(x, t_n) = D_N^\theta u(x, t_n) + (R_2)^n,$$

که در آن

$$(R_2)^n = O(n^{-\min\{r-\theta, r\}}),$$

و

$$D_N^\theta u(x, t_n) = d_{1,n}^\theta u(x, t_n) - d_{n,n}^\theta u(x, t_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1,n}^\theta - d_{i,n}^\theta) u(x, t_{n-i}),$$

$$d_{i+1,n}^\theta = \frac{1}{\Gamma(r-\theta)\tau_{i+1}} [(t_n - t_i)^{1-\theta} - (t_n - t_{i+1})^{1-\theta}].$$

لم ۳.۲. [۲۱] ضرایب  $d_{i,n}^\theta$  در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$d_{i+1,n}^\theta \leq d_{i,n}^\theta \quad (\text{الف})$$

$$d_{1,n}^\theta = \frac{\tau_n^{-\theta}}{\Gamma(r-\theta)} \quad (\text{ب})$$

(ج) به ازای  $n = 2, 3, \dots, N$  داریم:

$$\frac{(1-\theta)}{\Gamma(r-\theta)} (t_n - t_{n-i})^{-\theta} \leq d_{i,n}^\theta \leq \frac{(1-\theta)}{\Gamma(r-\theta)} (t_n - t_{n-i+1})^{-\theta}.$$

اکنون با به کار بردن لم ۲.۲ به دست می‌آوریم:

$$\sum_{s=1}^J c_s {}^C D_t^{\theta_s} u(x, t_n) = \Pi_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} u(x, t_n) + (R_2)^n,$$

که در آن

$$\prod_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} u(x, t_n) = \sum_{s=1}^J c_s D_N^{\theta_s} u(x, t_n), \tag{۴.۲}$$

و

$$(R_{\Psi})^n = O(n^{-\min\{2-\theta_J, r\theta_J\}}) = O(n^{-\min\{1+\frac{\sigma}{\tau}, r(1-\frac{\sigma}{\tau})\}}).$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\prod_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} u(x, t_n) = d_{1,n} u(x, t_n) - d_{n,n} u(x, t_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1,n} - d_{i,n}) u(x, t_{n-i}), \tag{۵.۲}$$

که در آن

$$d_{i,n} = \sum_{s=1}^J c_s d_{i,n}^{\theta_s}. \tag{۶.۲}$$

اکنون برای تقریب مشتق کسری از مرتبه توزیعی مکانی، ابتدا بازه  $[1, 2]$  را به تعداد  $S$  زیربازه تقسیم می کنیم. قرار می دهیم:

$$1 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_S = 2,$$

و تعریف می کنیم:

$$\Delta \eta_s = \eta_s - \eta_{s-1} = \frac{1}{S} = \rho, \quad S \in \mathbb{N},$$

$$\alpha_s = \frac{\eta_s + \eta_{s-1}}{2} = 1 + \frac{2s-1}{2S}, \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

در لم زیر نشان می دهیم که برای تقریب می توان از فرمول دوزنقه ای مرکب اصلاح شده  $\int_1^2 P(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha$  استفاده کرد.

لم ۴.۲. [۲۰] (فرمول دوزنقه مرکب اصلاح شده) فرض کنید  $g(\alpha) \in C^2[1, 2]$ ، آن گاه داریم:

$$\int_1^2 g(\alpha) d\alpha = \sum_{s=1}^S \frac{1}{J} g\left(1 + \frac{2s-1}{2S}\right) + E_1 = \sum_{s=1}^J \Delta \eta_s g(\alpha_s) + E_1,$$

که در آن  $E_1 = O(\rho^2)$  است.

فرض کنید:

$$g(\alpha, x, t) = P(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha}.$$

اگر  $P(\alpha) \in C^2[1, 2]$  و  $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} \in C^2[1, 2]$ ، آنگاه با به کار بردن لم ۴.۲، خواهیم داشت:

$$\int_1^2 P(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha = \int_1^2 g(\alpha, x, t) d\alpha = \sum_{s=1}^S \frac{1}{S} g(\alpha_s, x, t) + R_1 = \sum_{s=1}^S b_s \frac{\partial^{\alpha_s} u(x, t)}{\partial |x|^{\alpha_s}} + E_{1, (۷.۲)}$$

که در آن

$$b_s = \frac{P(\alpha_s)}{S}, s = 1, 2, \dots, S.$$

بنابراین، با استفاده از (۴.۲) و (۷.۲)، مسئله‌ی (۳.۲)-(۱.۲) را می‌توان به مسئله‌ی گسسته زیر تبدیل کرد:

$$\sum_{s=1}^J c_s {}^C D_t^{\theta_s} u(x, t) - \sum_{s=1}^S b_s \frac{\partial^{\alpha_s} u(x, t)}{\partial |x|^{\alpha_s}} + O(\rho^\nu + \sigma^\nu) = f(x, t), \quad \circ < x < L, \quad \circ < t \leq T,$$

$$\begin{aligned} u(x, \circ) &= u_\circ(x), \quad \circ \leq x \leq L, \\ u(\circ, t) &= u(L, t) = \circ, \quad \circ < t \leq T, \end{aligned}$$

برای تقریب مشتق مکانی لم زیر را داریم:

لم ۵.۲. [۱۱] فرض کنید  $1 < \alpha < 2$  آن‌گاه داریم:

$$\frac{\partial^\alpha u(x_m, t)}{\partial |x|^\alpha} = \delta_x^\alpha u(x_m, t) + O(\Delta x^\nu),$$

که در آن

$$\delta_x^\alpha u(x_m, t) = \frac{-\Psi_\alpha}{\Gamma(\nu - \alpha)\Delta x^\alpha} \sum_{k=\circ}^M z_{m,k}^{(\alpha)} u(x_k, t)$$

$$z_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \bar{z}_{m,k}^{(\alpha)}, & k < m - 1, \\ \bar{z}_{m,m-1}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m-1}^{(\alpha)}, & k = m - 1, \\ \bar{z}_{m,m}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m}^{(\alpha)}, & k = m, \\ \bar{z}_{m,m+1}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m+1}^{(\alpha)}, & k = m + 1, \\ \tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}, & k > m + 1, \end{cases} \quad (۸.۲)$$

$$\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \bar{c}_{m-1,k} - \nu \bar{c}_{m,k} + \bar{c}_{m+1,k}, & k \leq m - 1, \\ -\nu \bar{c}_{m,m} + \bar{c}_{m+1,m}, & k = m, \\ \bar{c}_{m+1,m+1}, & k = m + 1, \\ \circ, & k > m + 1, \end{cases}$$

$$\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \circ, & k < m - 1, \\ \tilde{c}_{m-1,m-1}, & k = m - 1, \\ -\nu \tilde{c}_{m,m} + \tilde{c}_{m-1,m}, & k = m, \\ \tilde{c}_{m-1,k} - \nu \tilde{c}_{m,k} + \tilde{c}_{m+1,k}, & m + 1 \leq k \leq M, \end{cases}$$

$$\bar{c}_{j,k} = \begin{cases} (j-1)^{\nu-\alpha} - j^{\nu-\alpha}(j-\nu+\alpha), & k = \circ, \\ (j-k+1)^{\nu-\alpha} - \nu(j-k)^{\nu-\alpha} + (j-k-1)^{\nu-\alpha}, & 1 \leq k \leq j-1, \\ 1, & k = j, \end{cases}$$

$$\tilde{c}_{j,k} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ (k-j+1)^{\nu-\alpha} - \nu(k-j)^{\nu-\alpha} + (k-j-1)^{\nu-\alpha}, & j+1 \leq k \leq M-1, \\ (\nu-\alpha-M+j)(M-j)^{\nu-\alpha} + (M-j-1)^{(\nu-\alpha)}, & k = M. \end{cases}$$

لم ۶.۲. [۵] ضرایب  $\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}$  و  $\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)}$  در شرایط زیر صدق می کنند:

الف)  $\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)} > 0, (k < m - 1)$

ب)  $\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)} > 0, (k > m + 1)$

ج)  $\bar{z}_{m,m+1}^{(\alpha)} = \tilde{z}_{m,m-1}^{(\alpha)} = 1$

د)  $\bar{z}_{m,m}^{(\alpha)} = \tilde{z}_{m,m}^{(\alpha)} = -\alpha + \alpha(3-\alpha)$

توجه کنید که برای ضرایب  $z_{m,k}^{(\alpha)}$  که در (۸.۲) تعریف شده اند لم زیر را داریم:

لم ۷.۲. [۶] شرایط زیر برای ضرایب  $z_{m,k}^{(\alpha)}$  برقرار هستند:

الف)  $z_{m,k}^{(\alpha)} > 0, (k \neq m)$

ب)  $z_{m,k}^{(\alpha)} < 0, (m = k)$

ج)  $\sum_{k=0}^M z_{m,k}^{(\alpha)} < 0$

با استفاده از رابطه ی (۴.۲) و لم ۵.۲ می توان نوشت:

$$\Pi_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} \mathcal{U}_m^n - \sum_{s=1}^S b_s \delta_x^{\alpha_s} \mathcal{U}_m^n = f_m^n + (R)_m^n, \quad 1 \leq m \leq M - 1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (9.2)$$

$$\mathcal{U}_m^0 = u_0(x_m), \quad 0 \leq m \leq M, \quad (10.2)$$

$$\mathcal{U}_0^n = \mathcal{U}_M^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (11.2)$$

که در آن

$$(R)_m^n = O(\Delta x^\alpha + n^{-\min\{\alpha, r(1-\frac{\alpha}{r})\}} + \sigma^\alpha + \rho^\alpha),$$

$$\delta_x^{\alpha_s} \mathcal{U}_m^n = \frac{-\Psi_\alpha}{\Gamma(\alpha_s - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0}^M z_{m,k}^{(\alpha_s)} \mathcal{U}_m^n,$$

$$\Pi_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} \mathcal{U}_m^n = d_{1,n} \mathcal{U}_m^n - d_{n,n} \mathcal{U}_m^0 + \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1,n} - d_{i,n}) \mathcal{U}_m^{n-i},$$

و

$$d_{i,n} = \sum_{s=1}^J c_s d_{i,n}^{\theta_s}.$$

و با حذف خطای برشی موضعی  $(R)_m^n$  در (۹.۲)-(۱۱.۲) و جایگزینی  $\mathcal{U}_m^n$  با جواب تقریبی  $u_m^n$ ، مسئله ی گسسته سازی زیر را خواهیم داشت:

$$\Pi_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} u_m^n - \sum_{s=1}^S b_s \delta_x^{\alpha_s} u_m^n = f_m^n, \quad 1 \leq m \leq M - 1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (12.2)$$

$$u_m^0 = u_0(x_m), \quad 0 \leq m \leq M, \quad (13.2)$$

$$u_0^n = u_M^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (14.2)$$

لم ۸.۲. جواب مسئله‌ی گسسته‌سازی (۱۴.۲)-(۱۲.۲) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^\circ\|_\infty + C \max_{i=1, \dots, n} \{t_i^{\theta_j} \|f^i\|_\infty\}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

که در آن

$$u^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n]^T, \quad f^n = [f_0^n, f_1^n, \dots, f_M^n]^T,$$

9

$$\|u^n\|_\infty = \max_{0 \leq m \leq M} |u_m^n|.$$

اثبات.  $n \in \{1, \dots, N\}$  را ثابت در نظر بگیرید و قرار دهید:

$$u^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n]^T.$$

اکنون  $\hat{n} \in \{1, 2, \dots, n\}$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم به طوری که  $\|u^{\hat{n}}\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \|u^j\|_\infty$  . همچنین،  $\hat{m} \in \{1, \dots, M\}$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم به طوری که  $|u_{\hat{m}}^{\hat{n}}| = \|u^{\hat{n}}\|_\infty$  . اگر در (۴.۲) قرار دهیم  $(x, t) = (x_{\hat{m}}, t_{\hat{n}})$ ، آن‌گاه به دست می‌آوریم:

$$d_{\hat{n}, \hat{n}} u_{\hat{m}}^{\hat{n}} + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0}^M z_{\hat{m}, k}^{(\alpha_s)} u_k^{\hat{n}} = d_{\hat{n}, \hat{n}} u_{\hat{m}}^\circ + \sum_{i=1}^{\hat{n}-1} u_{\hat{m}}^{\hat{n}-i} [d_{i, \hat{n}} - d_{i+1, \hat{n}}] + f_{\hat{m}}^{\hat{n}},$$

که در آن  $f_{\hat{m}}^{\hat{n}} = f(x_{\hat{m}}, t_{\hat{n}})$  است.  
با استفاده از لم ۷.۲ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} d_{\hat{n}, \hat{n}} |u_{\hat{m}}^{\hat{n}}| &\leq d_{\hat{n}, \hat{n}} |u_{\hat{m}}^{\hat{n}}| + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0}^M z_{\hat{m}, k}^{(\alpha_s)} |u_k^{\hat{n}}| \\ &\leq d_{\hat{n}, \hat{n}} + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} z_{\hat{m}, \hat{m}}^{(\alpha_s)} |u_{\hat{m}}^{\hat{n}}| + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0, k \neq \hat{m}}^M z_{\hat{m}, k}^{(\alpha_s)} |u_k^{\hat{n}}| \\ &\leq d_{\hat{n}, \hat{m}} + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} z_{\hat{m}, \hat{m}}^{(\alpha_s)} |u_{\hat{m}}^{\hat{n}}| + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0, k \neq \hat{m}}^M z_{\hat{m}, k}^{(\alpha_s)} |u_k^{\hat{n}}| \\ &\leq |d_{\hat{n}, \hat{n}}| + \sum_{s=1}^S \frac{b_s \Psi_{\alpha_s}}{\Gamma(\Psi - \alpha_s) \Delta x^{\alpha_s}} \sum_{k=0}^M z_{\hat{m}, k}^{(\alpha_s)} |u_k^{\hat{n}}|, \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$d_{\hat{n}, \hat{n}} \|u^{\hat{n}}\|_\infty \leq |d_{\hat{n}, \hat{n}}| u_{\hat{m}}^\circ + \sum_{i=1}^{\hat{n}-1} u_{\hat{m}}^{\hat{n}-i} [d_{i, \hat{n}} - d_{i+1, \hat{n}}] + f_{\hat{m}}^{\hat{n}}.$$

آن‌گاه، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} d_{\hat{n}, \hat{n}} \|u^{\hat{n}}\|_\infty &\leq [d_{\hat{n}, \hat{n}} \|u^\circ\|_\infty + \sum_{i=1}^{\hat{n}-1} [d_{i, \hat{n}} - d_{i+1, \hat{n}}] \|u^{\hat{n}-i}\|_\infty + \|f^{\hat{n}}\|_\infty] \\ &\leq [d_{\hat{n}, \hat{n}} \|u^\circ\|_\infty + \sum_{i=1}^{\hat{n}-1} [d_{i, \hat{n}} - d_{i+1, \hat{n}}] \|u^{\hat{n}}\|_\infty + \|f^{\hat{n}}\|_\infty], \end{aligned}$$



و در نتیجه داریم:

$$d_{\hat{n}, \hat{n}} (\|u^{\hat{n}}\|_{\infty} - \|u^{\circ}\|_{\infty}) \leq \|f^{\hat{n}}\|_{\infty}.$$

اگر  $\|u^{\hat{n}}\|_{\infty} - \|u^{\circ}\|_{\infty} \geq 0$ ، آنگاه

$$(\|u^{\hat{n}}\|_{\infty} - \|u^{\circ}\|_{\infty}) \leq (d_{\hat{n}, \hat{n}})^{-1} \|f^{\hat{n}}\|_{\infty}.$$

از این که  $d_{\hat{n}, \hat{n}} \geq c_J d_{\hat{n}, \hat{n}}^{\theta_J}$  خواهیم داشت:

$$\|u^{\hat{n}}\|_{\infty} \leq \|u^{\circ}\|_{\infty} + \frac{1}{c_J} (d_{\hat{n}, \hat{n}}^{\theta_J})^{-1} \|f^{\hat{n}}\|_{\infty},$$

می دانیم که  $(d_{\hat{n}, \hat{n}}^{\theta_J})^{-1} \leq \frac{\Gamma(2-\theta)}{(1-\theta)} t_{\hat{n}}^{\theta_J}$ ، از این رو خواهیم داشت:

$$\|u^n\|_{\infty} \leq \|u^{\circ}\|_{\infty} + C \max_{i=1,2,\dots,n} \{t_i^{\theta_J} \|f^i\|_{\infty}\}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

که اثبات قضیه را کامل می کند. همچنین، اگر  $\|u^{\hat{n}}\|_{\infty} - \|u^{\circ}\|_{\infty} < 0$ ، آن گاه داریم:

$$\|u^n\|_{\infty} \leq \|u^{\circ}\|_{\infty} + C \max_{i=1,2,\dots,n} \{t_i^{\theta_J} \|f^i\|_{\infty}\}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

□

که اثبات قضیه را کامل می کند.

قضیه ۹.۲. (پایداری طرح تفاضل) مسئله ی گسسته سازی (۱۴.۲)-(۱۲.۲) بدون قید و شرط پایدار است.

اثبات. فرض کنید  $u^n$  جواب دقیق مسئله ی گسسته سازی (۱۴.۲)-(۱۲.۲) با شرط اولیه  $u^{\circ} = [u_0^{\circ}, u_1^{\circ}, \dots, u_M^{\circ}]^T$  باشد. همچنین، فرض کنید  $\tilde{u}^n$  جواب تقریبی مسئله ی گسسته سازی (۱۴.۲)-(۱۲.۲) با شرط اولیه  $\tilde{u}^{\circ} = [\tilde{u}_0^{\circ}, \tilde{u}_1^{\circ}, \dots, \tilde{u}_M^{\circ}]^T$  باشد. با استفاده از لم ۸.۲ به دست می آوریم:

$$\|u^n - \tilde{u}^n\|_{\infty} \leq \|u^{\circ} - \tilde{u}^{\circ}\|_{\infty}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

□

و در اینجا اثبات قضیه کامل می شود.

قضیه ۱۰.۲. (تخمین خطا) فرض کنید  $e_m^n = U_m^n - u_m^n$  آنگاه برای  $n = 1, 2, \dots, N$  نامساوی زیر برقرار است:

$$\|e^n\|_{\infty} \leq C(\Delta x^2 + N^{-\min\{1+\frac{\sigma}{\tau}, r(1-\frac{\sigma}{\tau})\}}) + \sigma^2 + \rho^2, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

که در آن  $C$  ثابت حقیقی است.

اثبات. با به کار بردن (۱۱.۲)-(۹.۲) و (۱۴.۲)-(۱۲.۲)، خواهیم داشت:

$$\Pi_N^{\theta_1, \dots, \theta_J} e_m^n - \sum_{s=1}^S b_s \delta_x^{\alpha_s} e_m^n = (R)_m^n, \quad 1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N, \quad (15.2)$$

$$e_m^{\circ} = 0, \quad 0 \leq m \leq M, \quad (16.2)$$

$$e^{\circ} = e_M^{\circ} = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (17.2)$$

که در آن

$$(R)_m^n = C_1(\Delta x^\nu + n^{-\min\{1+\frac{\sigma}{\nu}, r(1-\frac{\sigma}{\nu})\}} + \sigma^\nu + \rho^\nu).$$

با به کار بردن لم ۸.۲ برای (۱۷.۲)-(۱۵.۲)، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \|e^n\|_\infty &\leq C_\nu \max_{i=1, \dots, n} \{t_i^{\theta J} (\Delta x^\nu + i^{-\min\{1+\frac{\sigma}{\nu}, r(1-\frac{\sigma}{\nu})\}} + \sigma^\nu + \rho^\nu)\} \\ &\leq C_\nu(\Delta x^\nu + \rho^\nu + \sigma^\nu) + C_\nu \max_{i=1, \dots, n} \{t_i^{\theta J} i^{-\min\{1+\frac{\sigma}{\nu}, r(1-\frac{\sigma}{\nu})\}}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (18.2)$$

از آن جایی که  $\frac{i}{N} \leq 1$ ، آن گاه داریم:

$$t_i^{\theta J} \leq C_\delta \left(\frac{i}{N}\right)^{\min\{1+\frac{\sigma}{\nu}, r(1-\frac{\sigma}{\nu})\}}, \quad (19.2)$$

□

با به کار بردن (۱۹.۲) در (۱۸.۲) اثبات این قضیه کامل می شود.

### ۳ مثال عددی

در این قسمت یک مثال عددی داده می شود تا همگرایی و دقت روش پیشنهادی را نشان دهد. برنامه ها روی یک کامپیوتر با مشخصات  $Cori\gamma - 970 \text{ @ } 3GH - 3GH$  و حافظه اجرا می شود. به منظور کارایی روش پیشنهادی، خطای گرهی ماکسیمم را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$e_{max} = \max_{0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N} |u(x_m, t_m) - u_m^n|.$$

مثال ۱.۳. معادله ی انتشار مرتبه ی توزیعی زمانی-مکانی (۱.۲) را در نظر بگیرید که در آن  $d = 0.6, T = 1, L = 1$  و

$$w(\theta) = \Gamma\left(\frac{3}{4} - \theta\right),$$

هستند. تابع وزن  $P(\alpha)$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$P(\alpha) = -2\Gamma(0.6 - \alpha) \cos(0.5\pi\alpha).$$

هم چنین شرایط اولیه و مرزی این معادله را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

اکنون تابع  $f$  را طوری انتخاب می کنیم به طوری که جواب دقیق آن به صورت زیر باشد:

$$u(x, t) = (t^3 + t^{\frac{5}{4}})(x^2 - x)^2.$$

در شکل ۲ خطاهای گرهی ماکسیمم با داده های زیر گزارش شده است:

$$\begin{aligned} N &= 2^i, \quad i = 6, 7, 8, 9, \\ J(N) &= \frac{N}{4^3}, \quad S(N) = \frac{N}{4^3}, \end{aligned}$$

$$M(N) = \left\lceil N^{\left\{\frac{\min\{2-d, rd\}}{4}\right\}} \right\rceil.$$

بنابراین، برای مقادیر  $(N, J(N), S(N), M(N))$  نتیجه می شود:

$$\|e^n\|_\infty = C_{T,d} N^{-\min\{2-d, rd\}}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

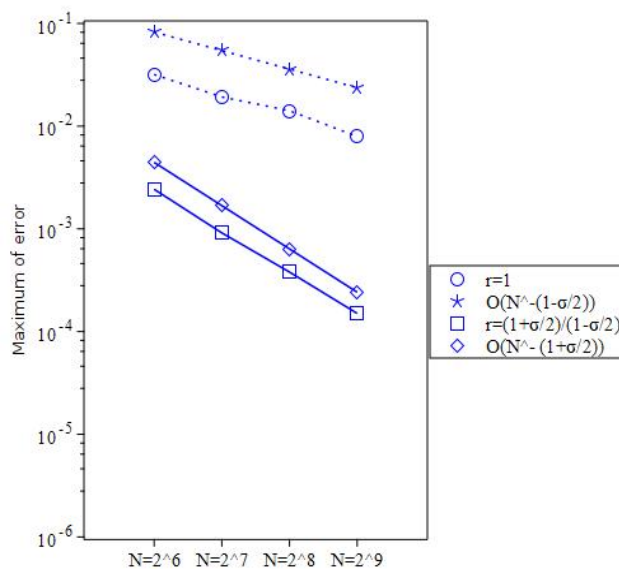
اگر  $r \geq \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  آن گاه داریم:

$$\|e^n\|_\infty = CN^{-(1+\frac{\sigma}{r})}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

هم چنین، برای  $r < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  داریم:

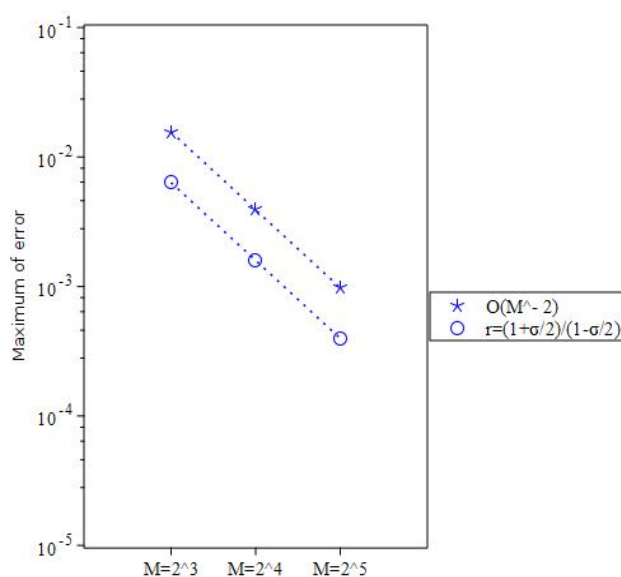
$$\|e^n\|_\infty = CN^{-(1-\frac{\sigma}{r})}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

یعنی ما انتظار داریم مرتبه همگرایی برای  $r \geq \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  بیشتر از مرتبه همگرایی  $r < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  است. اکنون نشان می دهیم نتایج عددی، نتایج تئوری را تایید می کند.



شکل ۱: خطای ماکسیمم برای  $N$  های مختلف

در شکل ۱ مرتبه همگرایی زمانی برای  $r = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  بزرگتر از مرتبه همگرایی  $r = 1$  است. نتایج به دست آمده تایید می کند مرتبه همگرایی برای  $r = 1$  نزدیک به  $1 - \frac{\sigma}{r}$  است. هم چنین برای  $r = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$ ، مرتبه های همگرایی زمانی نزدیک به  $1 + \frac{\sigma}{r}$  است و تقریب های به دست آمده در این مورد بهتر است.



شکل ۲: خطای ماکسیمم برای M های مختلف

در شکل ۲ خطای گرهی ماکسیمم برای داده‌های زیر گزارش شده است:

$$M = 2^i, \quad i = 3, 4, 5,$$

$$J(M) = M, \quad S(M) = M,$$

9

$$N(M) = \left[ M^{\frac{2}{\min\{1+\frac{\sigma}{r}, r(1-\frac{\sigma}{r})\}}} \right].$$

بنابراین برای مقادیر  $(M, J(M), S(M), N(M))$  نتیجه می‌شود:

$$\|e^n\|_\infty \leq CM^{-2}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

نتایج عددی تایید می‌کنند مرتبه همگرایی مکانی نزدیک عدد ۲ هستند.

مثال ۲.۳. معادله‌ی انتشار مرتبه‌ی توزیعی زمانی-مکانی (۱.۲) را در نظر بگیرید که در آن  $d = 0, T = 1, L = 1$  و

$$w(\theta) = \Gamma\left(\frac{5}{4} - \theta\right),$$

هستند. تابع وزن  $P(\alpha)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P(\alpha) = -3\Gamma(7 - \alpha) \cos(0.5\pi\alpha).$$

همچنین شرایط اولیه و مرزی این معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

اکنون تابع  $f$  را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که جواب دقیق آن به صورت زیر باشد:

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{4}} \sin \pi x.$$

در جدول ۱ خطاهای گرهی ماکسیمم با داده های زیر گزارش شده است:

$$N = 2^i, \quad i = 6, 7, 8, 9,$$

$$J(N) = \frac{N}{3^3}, \quad S(N) = \frac{N}{3^3},$$

9

$$M(N) = \left[ N^{\left\{ \frac{\min\{r-d, rd\}}{r} \right\}} \right].$$

در جدول ۱ مرتبه همگرایی زمانی برای  $r = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$  بزرگتر از مرتبه همگرایی  $r = 1$  است.

	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$
$r = 1$	$7.834 \times 10^{-2}$	$4.2218 \times 10^{-2}$	$2.4103 \times 10^{-2}$	$1.2567 \times 10^{-2}$
مرتبه همگرایی	—	۰.۸۸۸۱	۰.۸۰۸۶	۰.۹۳۹۶
$r = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$	$5.9803 \times 10^{-2}$	$2.7812 \times 10^{-2}$	$1.2531 \times 10^{-2}$	$5.7540 \times 10^{-2}$
مرتبه همگرایی	—	۱/۱۰۴۵	۱/۱۵۰۲	۱/۱۲۲۹

جدول ۱: خطای ماکسیمم برای  $N$  های مختلف

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله، معادلات انتشار مرتبه ی توزیعی زمانی-مکانی همراه با یک شرط نامنفردی ضعیف در زمان اولیه را در نظر گرفتیم و با استفاده از روش تفاضل متناهی یک جواب عددی برای این معادلات ارائه دادیم. نشان دادیم که طرح تفاضلی پیشنهادی بدون قید و شرط پایدار است و ثابت کردیم که طرح تفاضلی همگرا است. در پایان، چندین مثال عددی آوردیم که نتایج تئوری را تایید می کنند.

## ۵ تشکر و قدردانی

نویسندگان از دبیر مسئول و داوران محترم که با صرف وقت فراوان ارزیابی علمی این مقاله را به عهده داشتند، صمیمانه قدردانی می کنند. این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره قرارداد GRD34M1713 ° از محل اعتبارات معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهرکرد می باشد.

## فهرست منابع

- [1] Abbaszadeh, M., & Dehghan, M. 2017. An improved meshless method for solving two-dimensional distributed order time-fractional diffusion-wave equation with error estimate, Numer. Algor., 75, 173-211. doi:10.1007/s11075-016-0201-0
- [2] Aghdam, Y. E., Mesgarani, H., Asadi, Z., & Nguyen, V. T. 2023. Investigation and analysis of the numerical approach to solve the multi-term time-fractional advection-diffusion model. AIMS Mathematics, 8(12), 29474-29489. doi:10.3934/math.20231509
- [3] Ansari, A., & Moradi, M. 2013. Exact solutions to some models of distributed-order time fractional diffusion equations via the Fox H functions, ScienceAsia 39S, 57-66. doi: 10.2306/scienceasia1513-1874.2013.39S.057

- [4] Chen, H., Lü, S., & Chen, W. 2016. Finite difference/spectral approximations for the distributed order time fractional reaction-diffusion equation on an unbounded domain, *J. Comput. Phys.*, 315, 84-97. doi:10.1016/j.jcp.2016.03.044
- [5] Chen, M., & Deng, W. 2014. A second-order numerical method for two-dimensional two-sided space fractional convection diffusion equation. *Applied Mathematical Modelling*, 38(13), 3244-3259. doi:10.1016/j.apm.2013.11.043
- [6] Chen, M., Deng, W., & Wu, Y. 2013. Superlinearly convergent algorithms for the two-dimensional space-time Caputo-Riesz fractional diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics*, 70, 22-41. doi:10.1016/j.apnum.2013.03.006
- [7] Esmaeelzade Aghdam, Y., Mesgarani, H., & Asadi, Z. 2023. Estimate of the fractional advection-diffusion equation with a time-fractional term based on the shifted Legendre polynomials, "J. Math. Model.", 11(4), 731-744. doi: 10.22124/jmm.2023.24479.2191
- [8] Gorenflo, R., Luchko, Yu., Stojanović, M. 2013. Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16, 297-316. doi:10.2478/s13540-013-0019-6
- [9] Hilfer, R. 2000. "Applications of fractional calculus in physics". Singapore: World Scientific.
- [10] Jafari, H., Aghdam, Y. E., Farnam, B., Nguyen, V. T., & Masetshaba, M. T. 2023. A convergence analysis of the mobile-immobile advection-dispersion model of temporal fractional order arising in watershed catchments and rivers, *Fractals*, 31(04), 2340068. doi:10.1142/S0218348X23400686
- [11] Li, C., & Zeng, F. 2015. Numerical methods for fractional calculus. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [12] Li, Z., Luchko, Yu., & Yamamoto, M. 2014. Asymptotic estimates of solutions to initial-boundary-value problems for distributed order time-fractional diffusion equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17, 1114-1136. doi:10.2478/s13540-014-0217-x
- [13] Luchko, Yu. 2011. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 12, 409-422. doi: 10.1016/j.jmaa.2010.08.048
- [14] Mesgarani, H., Aghdam, Y. E., Khoshkhahtinat, M., & Farnam, B. 2023. Analysis of the numerical scheme of the one-dimensional fractional Rayleigh–Stokes model arising in a heated generalized problem. *AIP Advances*, 13(8), 085024. doi: 10.1063/5.0156586
- [15] Magin, R. L. 2021. "Fractional calculus in bioengineering". New York: Begell.
- [16] McLean, W., 2010. Regularity of solutions to a time-fractional diffusion equation, *ANZIAM J.* 52. 123–138. doi:10.1017/S1446181111000617
- [17] Meerschaert, M. M., Nane, E., Vellaisamy, P. 2011. Distributed-order fractional diffusions on bounded domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 379, 216-228. doi:10.1016/j.jmaa.2010.12.056
- [18] Mesgarani, H., Aghdam, Y. E., & Vafapisheh, M. 2023. A numerical procedure for approximating time fractional nonlinear Burgers–Fisher models and its error analysis. *AIP Advances*, 13(5), 055313. doi: 10.1063/5.0143690
- [19] Miller, K. S., & Ross, B. 1993. "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations". New York, NY: Wiley.

- [20] Ren, J., & Chen, H. 2019. A numerical method for distributed order time fractional diffusion equation with weakly singular solutions, *Appl. Math. Lett.*, 96, 159–165. doi:10.1016/j.aml.2019.04.030
- [21] Stynes, M. ÓRiordan, E. & Gracia, J. L. 2017. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 55, 1057–1079. doi:10.1137/16M1082329
- [22] Wei, L., Liu, L., & Sun, H. 2018. Stability and convergence of a local discontinuous Galerkin method for the fractional diffusion equation with distributed order, *J. Appl. Math. Comput.*, 59, 323-341. doi:10.1007/s12190-018-1182-z
- [23] Ye, H. Liu, F., & Anh, V. 2015. Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains, *J. Comput. Phys.*, 98, 652–660. doi:10.1016/j.jcp.2015.06.025
- [24] Zhang, Y., Sun, Z., & Liao, H. 2014. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes. *Journal of Computational Physics*, 265, 195-210. doi:10.1016/j.jcp.2014.02.008



## A finite difference scheme for time-space fractional distributed-order diffusion equations with weakly singular solutions

M. Fardi<sup>(1)</sup>, <sup>2</sup> E. Amini<sup>(2)</sup> and S. Mohammadi<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, Shahrekord University, Shahrekord, 88186-34141, Iran.

<sup>(2)</sup> Department of Mathematics, Payme Noor University, P. O. Box 19395-4697 Tehran, IRAN.

Communicated by: Morteza Gachpazan

Received: 24 July 2023

Accepted: 9 May 2024

**Abstract:** In this paper, the time-space distributed-order fractional diffusion equations with weakly singular solutions are considered. We provide the difference scheme using a nonuniform mesh to solve equations. The stability and convergence of the difference scheme are discussed, We prove that the difference scheme is unconditionally stable. We find that the difference scheme is convergent. We also show that the temporal convergence order on the nonuniform mesh is higher than on the uniform mesh. Finally, some numerical examples are given to verify the theoretical analysis.

**Keywords:** Distributed-order; Time-space; Nonuniform mesh; Nonsmooth solutions; Stability; Error estimate.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>2</sup>Corresponding author

*E-mail addresses:* (M. Fardi) [m.fardi@sku.ac.ir](mailto:m.fardi@sku.ac.ir), (E. Amini) [s.mohamadikamal@gmail.com](mailto:s.mohamadikamal@gmail.com)  
(S. Mohammadi) [s.mohamadikamal@gmail.com](mailto:s.mohamadikamal@gmail.com)