مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۱، ص ۱۱۰-۱۲۲

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI:10.22055/JAMM.2024.45077.2210

وجود جواب برای معادلات انتگرالی کسری تناسبی هادامارد با استفاده از قضیه نقطه‌ثابت

منوچهر کاظمی [۱]

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آشتیان، آشتیان، ایران

دبیر مسئول: محمد اسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۲۳

چکیده: در این مقاله، با استفاده از اندازه نافشردگی و قضیه نقطه ثابت پترشن در فضای باناخ، یک قضیه وجودی برای برخی معادلات انتگرالی کسری تناسبی هادامارد، ارائه شده است. مطالعه این معادلات انتگرالی بسیار حائز اهمیت هستند چرا که در برگیرنده موارد خاص زیادی از معادلات انتگرالی می‌باشند که در شاخه‌های زیادی از آنالیز غیر خطی و کاربردهای آن ظاهر می‌شوند. تفاوت قضیه نقطه ثابت پترشن با قضایای نقطه ثابت شاودر و نقطه ثابت داربو، دراین است که ما را قادر می‌سازد تا از نشان دادن خواص بسته، محدب و فشردگی عملگرهای مورد بررسی صرف‌نظر کنیم. در پایان، برای صحت و کارایی نتایج به‌دست آمده، چند مثال ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرالی کسری هادامارد، وجود جواب، اندازه نافشردگی، قضایای نقطه ثابت، حساب کسری.

رده‌بندی ریاضی: 47H09; 47H10

۱ مقدمه

اندازه نافشردگی، یکی از قدرتمندترین ابزارهای آنالیز ریاضی مدرن است که توسط کاراتفسکی در سال ۱۹۳۰ معرفی شد [۲۳]. در سال ۱۹۵۵، قضیه نقطه ثابت شاودر و اصل انقباض باناخ، با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی، توسط داربو [۸] تعمیم داده شد. سپس فوری و ویگنولی [۱۳]، ناسبام [۲۵]، پترشین [۲۷] و دیگران نیز در کارهایشان از تئوری اندازه نافشردگی استفاده کردند. برای جزئیات بیشتر در مورد تئوری اندازه نافشردگی به [۵، ۱۴] مراجعه کنید. تئوری اندازه نافشردگی و عملگرهای چگال در توپولوژی عمومی، هندسه فضاهای باناخ، نظریه معادلات انتگرال، معادلات دیفرانسیل و نظریه کنترل بهینه کاربرد دارد. اخیراً تلاش‌های موفقیت‌آمیزی برای به‌کارگیری مفهوم اندازه نافشردگی همراه با قضایای نقطه ثابت در مطالعه وجود جواب معادلات انتگرال غیرخطی و معادلات انتگرو – دیفرانسیل صورت گرفته است. [۳، ۱۲، ۲۶، ۲۸، ۳۰].

حساب کسری، مطالعه مشتقات و همچنین انتگرال‌ها با مرتبه دلخواه عملگرها، با استفاده از تابع گاما است. در قرن شانزدهم مفاهیم حساب کسری ارائه شد. در قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰، نظریه و کاربردهای حساب کسری توسعه زیادی یافت و پژوهش‌گران زیادی، تفسیرهایی

[۱] نویسنده مسئول مقاله (M. Kazemi) univer_ka@yahoo.com

را برای مشتقات کسری و انتگرال ارائه کردند. برای تحقیقات اخیر در مورد حساب کسری، خواننده می‌تواند منابع [۲، ۴، ۱۵، ۱۶، ۳۴] را بنگرد.

معادلات انتگرالی کسری و معادلات دیفرانسیل، نقش بسیار مهم و اساسی در بیان و تشریح بسیاری از مسائل جهان واقعی دارند و همچنین بسیاری از مسائل در زمینه‌های مختلف علوم ، مهندسی، ریاضیات کاربردی، مسایل فیزیک، الکترومغناطیس، بیولوژی، نجوم و سایر حوزه‌ها را می‌توان با انواع معادلات انتگرال و دیفرانسیل کسری توصیف نمود [۱، ۲۴، ۳۲، ۳۳].

از سوی دیگر، اشکال مختلف شناخته شده‌ای از انتگرال‌های کسری و کاربردهای آن‌ها وجود دارد به‌طوری که نویسندگان متعددی، انواع مختلف معادلات انتگرالی کسری را با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی مورد بررسی قرار داده‌اند [۶، ۷، ۹، ۲۲، ۳۱، ۳۵].

تعریف ۱.۱. [۱۷، ۲۹] فرض کنیم $0 \leq a < b < \infty$ و $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی باشد. برای هر تابع انتگرال پذیر u، انتگرال کسری تناسبی هادامارد چپ و راست از مرتبه α برای شاخص تناسبی $\mu \in (0, 1]$، به ترتیب عبارتند از:

$$\left({}_aH^{\alpha,\mu}u\right)(s) = \frac{1}{\mu^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_a^s e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s}{\zeta})}\left(\ln\frac{s}{\zeta}\right)^{\alpha-1}\frac{u(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \quad a < s \tag{1.1}$$

$$\left(H_b^{\alpha,\mu}u\right)(s) = \frac{1}{\mu^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_s^b e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{\zeta}{s})}\left(\ln\frac{\zeta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \quad s < b \tag{2.1}$$

که در آن Γ، تابع گاما است.

ملاحظه ۲.۱. اگر $\mu = 1$ آنگاه معادلات (۱/۱) و (۱/۲) به فرم انتگرال های شناخته شده هادامارد تبدیل می شوند [۱۵].

$$\begin{aligned}\left({}_aH^{\alpha}u\right)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s\left(\ln\frac{s}{\zeta}\right)^{\alpha-1}\frac{u(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \quad a < s\\ \left(H_b^{\alpha}u\right)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_s^b\left(\ln\frac{\zeta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \quad s < b\end{aligned}$$

در این مقاله، با استفاده از قضیه نقطه ثابت پترشن یک قضیه وجودی جدید، برای معادلات انتگرالی تابعی زیر که شامل انتگرال کسری تناسبی هادامارد و کسری هادامارد است، ارائه و اثبات می‌شود.

$$u(s) = q\left(s, f(u(\xi(s))), \left({}_aH^{r,\mu}ku\right)(s), \left({}_aH^{\beta}lu\right)(s)\right), \quad a < s \tag{3.1}$$

که در آن

$$\left({}_aH^{r,\mu}ku\right)(s) = \frac{1}{\mu^r\Gamma(r)}\int_a^s e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s}{\zeta})}\left(\ln\frac{s}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta, \tag{4.1}$$

و

$$\left({}_aH^{\beta}lu\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s\left(\ln\frac{s}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{l\big(s,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta, \quad a < s \tag{5.1}$$

برای هر $s \in I = [a, b]$، $\beta, r > 0$ و $\mu \in [0, 1)$. که در آن u مجهول و توابع f، l، k و q در شرایط معینی، که در ادامه بیان خواهد شد، صدق می‌کنند.

ابزارهای اصلی برای اثبات وجود جواب برای معادله انتگرالی تابعی فوق، اندازه نافشردگی هاسدروف و قضیه نقطه ثابت پترشن [۲۷] می‌باشند که تعمیم‌یافته قضایای نقطه ثابت شاودر و داربو [۸] است. اولین بار، کاظمی و عزتی [۱۸] سال ۲۰۱۶، ایده اصلی به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت پترشن را به‌منظور بررسی وجود جواب برای دسته ای از معادلات انتگرالی دو بعدی معرفی کردند. در سال های اخیر، استفاده از قضیه نقطه ثابت پترشن به منظور بررسی وجود جواب انواع معادلات انتگرالی توسط محققین، رشد قابل توجه‌ای را داشته است [۱۰، ۱۱، ۱۹–۲۱]. اما قبل از آن عموماً، از قضیه نقطه ثابت داربو استفاده می‌شد. برتری استفاده از قضیه پترشن نسبت به سایر قضایای نقطه ثابت از قبیل قضیه نقطه ثابت شاودر و قضیه نقطه ثابت داربو و غیره، در این است که ما را قادر می‌سازد تا از نشان دادن ویژگی‌های بسته، محدب، و فشردگی عملگرهای مورد بررسی اجتناب کنیم. این باعث می‌شود به‌طور کلی حل پذیری معادلات انتگرالی و از جمله حل پذیری معادله انتگرالی (۳.۱)، تحت فرض های ضعیف‌تر و کلی‌تر آورده شود.

مطالب این مقاله به‌شرح زیر آورده شده است: در بخش ۲، مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به اندازه نافشردگی و همچنین قضایای نقطه ثابت مورد نیاز، ارائه شده است. در بخش ۳، نتایج اصلی، در خصوص بررسی وجود جواب معادله انتگرالی (۳.۱) بیان و اثبات می‌شود. بخش ۴، به بررسی چند مثال اختصاص داده شده است.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش، تعاریف و قضایای مورد نیاز برای بدست آوردن نتایج اصلی بیان می‌شوند.

فرض کنیم E یک فضای باناخ در میدان $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ باشد. به‌علاوه، فرض کنیم $\bar{B}_\rho = \{u \in E : \| u \| \leq \rho\}$ گوی بسته و $\partial \bar{B}_\rho = \{u \in E : \| u \| = \rho\}$ مرز کره‌ای به مرکز ۰ و شعاع $\rho > ۰$ باشد.

تعریف ۱.۲. [۲۳] فرض کنیم P یک زیر مجموعه کران‌دار از فضای E باشد. آنگاه اندازه نافشردگی کاراتفسکی (یا اندازه نافشردگی مجموعه‌ای) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha(P) = \inf\{\varepsilon > ۰ : \text{به‌وسیله تعداد متناهی، مجموعه‌های با قطر کم‌تر از } \varepsilon \text{ پوشیده می‌شود } P\}$$

تعریف ۲.۲. [۱۴] اندازه نافشردگی هاسدروف (یا اندازه نافشردگی گوی‌ها) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mho(P) = \inf\{\varepsilon > ۰ : \text{ یک } \varepsilon-\text{نت متناهی برای } P \text{ در } E \text{ موجود است.}\}$$

که در آن ε-نت متناهی یعنی $\{z_۱, z_۲, \dots, z_m\} \subset E$ موجود باشد که گوی‌های $B_\varepsilon(E; z_۱), B_\varepsilon(E; z_۲), \dots, B_\varepsilon(E; z_m)$، مجموعه P را بپوشانند.

اندازه نافشردگی‌های ذکرشده فوق، برای هر زیر مجموعه کران‌دار P در E در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\mho(P) \leq \alpha(P) \leq ۲\mho(P)$$

قضیه ۳.۲. [۲۷] فرض کنیم E یک فضای باناخ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $P, Q \subset E$ دراین‌صورت:

(i) $\mho(P \cup Q) = \max\{\mho(P), \mho(Q)\}$؛

(ii) $\mho(P + N) \leq \mho(P) + \mho(Q)$؛

(iii) $\mho(\lambda P) = | \lambda | \mho(P)$؛

(iv) $\mho(P) \leq \mho(Q)$ برای $P \subseteq Q$؛

(v) $\mho(\bar{co} P) = \mho(P)$؛

(vi) $\mho(P) = ۰$ اگر و فقط اگر P دارای بستار فشرده باشد.

برای ادامه کار، فضای باناخ $E = C([۰, a], \mathbb{R})$ یعنی تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[۰, a]$ با نرم استاندارد

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [۰, a]\}$$

در نظر گرفته میشود. مدول پیوستگی برای تابع $u \in C[۰, a]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega(u, \sigma) = \sup\{|u(x) - u(y)| : |x - y| \leq \sigma\}.$$

واضح است با توجه به فرض پیوستگی یکنواخت u روی $[۰, a]$، وقتی $\sigma \to ۰$ آنگاه $\omega(u, \sigma) \to ۰$.

قضیه ۴.۲. [۱۴] فرض کنیم $E = C([۰, a], \mathbb{R})$. برای هر زیر مجموعه کران‌دار P در E ، اندازه نافشردگی (۲.۲) معادل است با

$$\mho(P) = \lim_{\sigma \to ۰} \sup_{u \in P} \omega(u, \sigma) \tag{۱.۲}$$

تعریف ۵.۲. [۲۵] فرض کنیم $T : E \to E$ یک نگاشت پیوسته باشد. دراین‌صورت، T را یک k- انقباض مجموعه‌ای می‌نامند هرگاه برای هر $A \subset E$ کران‌دار، *T(A)* نیز کران‌دار باشد و

$$\mho(TA) \leq k\mho(A), \quad ۰ < k < ۱.$$

به‌علاوه T را چگال می‌نامند هرگاه به ازای هر $\mho(A) > ۰$ داشته باشیم:

$$\mho(TA) < \mho(A)$$

واضح است که هر k- انقباض، یک تابع چگال است و البته در حالت کلی، عکس آن برقرار نیست.

قضیه ۶.۲ (قضیه پترشن [۲۷]). فرض کنیم $\bar{B}_\rho$ یک گوی بسته حول مرکز در فضای باناخ E باشد. همچنین فرض کنیم $T : \bar{B}_\rho \to E$ یک نگاشت چگال و پیوسته باشد که در شرط مرزی زیر صدق می‌کند:

(P) اگر برای $u \in \partial B_\rho$ داشته باشیم $T(u) = ku$ آنگاه $k \leq ۱$.

در این‌صورت، مجموعه نقاط ثابت T در $\bar{B}_\rho$ ناتهی است.

۳ نتایج اصلی

در این بخش تحت شرایط زیر، به بررسی وجود جواب برای معادله (۳.۱) می‌پردازیم. فرض کنیم

$H_۱$: $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), k, l \in C(I_b^۲ \times \mathbb{R},\mathbb{R}), q \in C(I_b \times \mathbb{R}^۳,\mathbb{R})$ و همچنین تابع $\xi : I_b \to I_b$ پیوسته باشد.

$H_۲$: ثابت های نامنفی $c_۱, k_i,\ i = ۱,\cdots,۳$ با $k_۱c_۱ < ۱$ موجود باشند، به‌طوری که برای هر $s \in I_b = [۱,b]$ داشته باشیم

$$|q(s,u_۱,u_۲,u_۳) - q(s,\bar{u_۱},\bar{u_۲},\bar{u_۳}| \leq k_۱|u_۱ - \bar{u_۱}| + k_۲|u_۲ - \bar{u_۲}| + k_۳|u_۳ - \bar{u_۳}|,$$
$$|f(u) - f(\bar{u})| \leq c_۱|u - \bar{u}|, \qquad u_۱,\bar{u_۱},u_۲,\bar{u_۲},u_۳,\bar{u_۳},u,\bar{u} \in \mathbb{R}.$$

$H_۳$: (شرط مرزی) عدد حقیقی $\rho \geq ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که در شرط مرزی زیر صدق کند.

$$\sup\left\{|q(s,u_۱,u_۲,u_۳)| : s \in I_b, |u_۱| \leq \rho, |u_۲| \leq \frac{M_۱(\ln b)^r e^{\frac{\mu-۱}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+۱)}, |u_۳| \leq \frac{M_۲(\ln b)^r}{\Gamma(r+۱)}\right\} \leq \rho$$

که در آن

$$M_۱ = \sup\{|k(s,\zeta,u)| : \forall s,\zeta \in I_b\,,\quad u \in [-\rho,\rho]\},$$
$$M_۲ = \sup\{|l(s,\zeta,u)| : \forall s,\zeta \in I_b\,,\quad u \in [-\rho,\rho]\}.$$

قضیه ۱.۳ فرض کنیم شرایط $(H_۱)$، $(H_۲)$ و $(H_۳)$ برقرار باشند. آنگاه معادله (۳.۱)، حداقل یک جواب $u = u(s)$ متعلق به $E = C(I_b)$ دارد.

اثبات. برای اثبات، در ادامه از قضیه (۶.۲) بهره خواهیم برد. عملگر $T : B_\rho \to E$ را به صورت

$$(Tu)(s) = u(s) = q\Big(s, f(u(\xi(s))), ({}_{a=۱}H^{r,\mu}ku)(s), ({}_{a=۱}H^{\beta}lu)(s)\Big).$$

تعریف می‌کنیم. با توجه به شرایطی که در مفروضات قضیه برای k و l در نظر گرفته شده، نگاشت T خوش‌تعریف است. حال نشان می‌دهیم که عملگر T در گوی B_ρ پیوسته است. برای این‌کار، فرض کنیم $\sigma > ۰$ و $u, x \in B_\rho$ به‌طوری‌که $\| u - x \| \leq \sigma$ آن‌گاه برای $s \in I_b$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu)(s) - (Tx)(s)\big| \\
= &\left|q\Big(s, f\big(u(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}ku)(s), ({}_۱H^{\beta}lu)(s)\Big) - q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}kx)(s), ({}_۱H^{\beta}lx)(s)\Big)\right| \\
\leq &\left|q\Big(s, f\big(u(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}ku)(s), ({}_۱H^{\beta}lu)(s)\Big) - q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}ku)(s), ({}_۱H^{\beta}lu)(s)\Big)\right| \\
+ &\left|q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}ku)(s), \big({}_۱H^{\beta}lu\big)(s)\Big) - q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}kx)(s), \big({}_۱H^{\beta}lu\big)(s)\Big)\right| \\
+ &\left|q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}kx)(s), \big({}_۱H^{\beta}lu\big)(s)\Big) - q\Big(s, f\big(x(\xi(s))\big), ({}_۱H^{r,\mu}kx)(s), \big({}_۱H^{\beta}lx\big)(s)\Big)\right| \\
\leq &\ k_۱|f(u(\xi(s))) - f(x(\xi(s)))| \\
&+\frac{k_۲}{\mu^r\Gamma(r)}\int_۱^s e^{\frac{\mu-۱}{\mu}(\ln\frac{s}{\zeta})}(\ln\frac{s}{\zeta})^{r-۱}\frac{|k\big(s,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big) - k\big(s,\zeta,x(\gamma(\zeta))\big)|}{\zeta}d\zeta \\
&+\frac{k_۳}{\Gamma(\beta)}\int_۱^s(\ln\frac{s}{\zeta})^{\beta-۱}\frac{|l\big(s,\zeta,u(\zeta)\big) - l\big(s,\zeta,x(\zeta)\big)|}{\zeta}d\zeta \\
\leq &\ k_۱c_۱|u(\xi(s)) - x(\xi(s))| + \frac{k_۲e^{\frac{\mu-۱}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r)}\omega(k,\sigma)\int_۱^s(\ln\frac{s}{\zeta})^{r-۱}\frac{۱}{\zeta}d\zeta + \frac{k_۳}{\Gamma(\beta)}\omega(l,\sigma)\int_۱^s(\ln\frac{s}{\zeta})^{\beta-۱}\frac{۱}{\zeta}d\zeta \\
\leq &\ k_۱c_۱\|u - x\| + \frac{k_۲e^{\frac{\mu-۱}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+۱)}\omega(k,\sigma)(\ln b)^r + \frac{k_۳}{\Gamma(\beta+۱)}\omega(l,\sigma)(\ln b)^{\beta},
\end{aligned}$$

که در آن

$$\omega(k,\sigma)=\sup\{|k(s,\zeta,u)-k(s,\zeta,x)|:s,\zeta\in I_b,u,x\in[-\rho,\rho],|u-x|\leq\sigma\}.$$

و

$$\omega(l,\sigma)=\sup\{|l(s,\zeta,u)-l(s,\zeta,x)|:s,\zeta\in I_b,u,x\in[-\rho,\rho],|u-x|\leq\sigma\}.$$

با سوپریمم گرفتن از نامساوی اخیر داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{s\in I_a}|(Tu)(s)-(Tx)(s)| &\leq k_1c_1\|u-x\|+\frac{k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+1)}\omega(k,\sigma)(\ln b)^r\\ &+\frac{k_3}{\Gamma(\beta+1)}\omega(l,\sigma)(\ln b)^\beta.\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$||Tu-Tx||\leq k_1c_1\sigma+\frac{k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+1)}\omega(k,\sigma)(\ln b)^r+\frac{k_3}{\Gamma(\beta+1)}\omega(l,\sigma)(\ln b)^\beta.$$

از طرفی چون توابع $k=k(t,s,x)$ و $l=l(t,s,x)$ روی زیربازه فشرده $[0,b]\times[0,b]\times[-\rho,\rho]$ پیوسته یکنواخت هستند، پس وقتی $\sigma\to 0$ خواهیم داشت $\omega(k,\sigma)\to 0,\omega(l,\sigma)\to 0$. از این‌رو، نامساوی اخیر نشان می‌دهد که عملگر T در B_ρ پیوسته است. حال نشان می‌دهیم که عملگر T در شرط چگال بودن، نسبت به اندازه μ تعریف شده، در رابطه (۱.۲) صدق می‌کند. برای این منظور، یک ثابت دلخواه $\sigma>0$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $u\in P$ و P زیر مجموعه کرانداری از E باشد و همچنین $s_1,s_2\in I_b$. بدون آن که به کلیت استدلال خدشه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم که $s_1\leq s_2$ و σ $\leq$ s_2-s_1 . دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&|(Tu)(s_2)-(Tu)(s_1)|\\
&=\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_2),({}_1H^\beta lu)(s_2)\Big)\\
&-q\Big(s_1,f(u(\xi(s_1))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&\leq\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_2),({}_1H^\beta lu)(s_2)\Big)\\
&-q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_2),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&+\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_2),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\\
&-q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&+\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\\
&-q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&+\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_2))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\\
&-q\Big(s_2,f(u(\xi(s_1))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&+\Big|q\Big(s_2,f(u(\xi(s_1))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\\
&-q\Big(s_1,f(u(\xi(s_1))),\left({}_1H^{r,\mu}ku\right)(s_1),({}_1H^\beta lu)(s_1)\Big)\Big|\\
&\leq\frac{k_3}{\Gamma(\beta)}\left|\int_1^{s_2}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{l\big(s_2,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta-\int_1^{s_1}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{l\big(s_1,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\bigg|\int_1^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_2,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\\
&-\int_1^{s_1} e^{\frac{\mu-1}{\mu}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\bigg|\\
&+k_1|f(u(\xi(s_2))-f(u(\xi(s_1))|+\omega_q(I_b,\sigma)\\
&\leq\frac{k_3}{\Gamma(\beta)}\Bigg(\Big|\int_1^{s_2}(\ln\frac{s_2}{\zeta})^{\beta-1}\frac{l\big(s_2,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta-\int_1^{s_2}(\ln\frac{s_2}{\zeta})^{\beta-1}\frac{l\big(s_1,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta\Big|\\
&+\Big|\int_1^{s_2}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{l\big(s_1,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta-\int_1^{s_1}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{l\big(s_1,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta\Big|\Bigg)\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\Big|\int_1^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_2,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\\
&-\int_1^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\Big|\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\Big|\int_1^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\\
&-\int_1^{s_1} e^{\frac{\mu-1}{\mu}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\Big|\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\Big|\int_1^{s_1} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\\
&-\int_1^{s_1} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_1}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)}{\zeta}d\zeta\Big|\\
&+k_1c_1|u(\xi(s_2)-u(\xi(s_1))|+\omega_q^1(I_b,\sigma)\\
&\leq\frac{k_3}{\Gamma(\beta)}\Big[\int_1^{s_2}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{|l\big(s_2,\zeta,u(\gamma(\zeta))-l\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)|}{\zeta}d\zeta\\
&+|k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)|\Big(\int_1^{s_2}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\zeta}d\zeta-\int_1^{s_1}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\zeta}d\zeta\Big)\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\int_1^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{|k\big(s_2,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)-k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)|}{\zeta}d\zeta\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\int_{s_1}^{s_2} e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{|k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)|}{\zeta}d\zeta\\
&+\frac{k_2}{\mu^r\Gamma(r)}\int_1^{s_1}|e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_2}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}-e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln\frac{s_1}{\zeta})}\left(\ln\frac{s_1}{\zeta}\right)^{r-1}|\frac{|k\big(s_1,\zeta,u(\gamma(\zeta))\big)|}{\zeta}d\zeta\\
&+k_1c_1\omega(u,\omega(\xi,\sigma))+\omega_q^1(I_b,\sigma)\\
&\leq\frac{k_3}{\Gamma(\beta+1)}\omega_l^1(I_b,\sigma)(\ln s_2)^\beta+\frac{M_2k_3}{\Gamma(\beta+1)}[(\ln s_2)^\beta-(\ln s_1)^\beta]+\omega_q^1(I_a,\sigma)\\
&+\frac{k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r)}\omega_k^1(I_b,\sigma)\int_1^{s}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{1}{\zeta}d\zeta+\frac{M_1k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r)}\int_{s_1}^{s_2}\left(\ln\frac{s_2}{\zeta}\right)^{r-1}\frac{1}{\zeta}d\zeta\\
&+\frac{M_1k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r)}\int_1^{s_1}\left|(\ln\frac{s_2}{\zeta})^{r-1}-(\ln\frac{s_1}{\zeta})^{r-1}\right|\frac{1}{\zeta}d\zeta+k_1c_1\omega(u,\omega(\xi,\sigma))+\omega_q^1(I_b,\sigma),
\end{aligned}
$$

که در آن

$$\omega_l^1(I_b,\sigma)=\sup\{|l(s,\zeta,u)-l(\bar{s},\zeta,u)|:|s-\bar{s}|\le\sigma,\quad s,\bar{s},\zeta\in I_b,u\in[-\rho,\rho]\},$$
$$\omega_k^1(I_b,\sigma)=\sup\{|k(s,\nu,u)-k(\bar{s},\nu,u)|:|s-\bar{s}|\le\sigma,\quad s,\bar{s},\nu\in I_b,u\in[-\rho,\rho]\},$$

با استفاده از رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|(Tu)(s_2)-(Tu)(s_1)| &\le \frac{k_3}{\Gamma(\beta+1)}\omega_l^1(I_b,\sigma)(\ln s_2)^r\\ &+ \frac{M_2k_3}{\Gamma(\beta+1)}[(\ln s_2)^\beta-(\ln s_1)^\beta]\\ &\quad+\frac{k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^rc\Gamma(r+1)}\omega_k^1(I_b,\sigma)(\ln s_2)^r+\frac{M_1k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+1)}(\ln\frac{s_2}{s_1})^r\\ &\quad+\frac{M_1k_2e^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^rc\Gamma(r+1)}\Big((\ln s_2)^r-(\ln s_1)^r+(\ln\frac{s_2}{s_1})^r\Big)\\ &\quad+k_1c_1\omega(u,\omega(\xi,\sigma))+\omega_q^1(I_b,\sigma),\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\omega_q^1(I_b,\sigma) &= \sup\{|q(s,u_1,u_2,u_3)-q(\bar{s},u_1,u_2,u_3)|:|s-\bar{s}|\le\sigma,s,\bar{s}\in I_b,\\ &\qquad u_1\in[-\rho,\rho],|u_2|\le\frac{M_1(\ln b)^re^{\frac{\mu-1}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+1)},|u_3|\le\frac{M_2(\ln b)^r}{\Gamma(r+1)}\}\le\rho\},\end{aligned}$$

$$\omega(\xi,\sigma)=\sup\{|\xi(s_2)-\xi(s_1)|:s_1,s_2\in I_b,|s_2-s_1|\le\sigma\},$$

با توجه به این واقعیت که توابع k ، l و f روی زیرمجموعه‌های فشرده $[1,b]^2\times[\rho,\rho]$ و $[1,b]$ پیوسته یکنواخت‌اند، وقتی $\sigma\to 0$، آنگاه داریم $s_2\to s_1$ و $\omega_k^1(I_b,\varepsilon)\to 0$ ، $\omega^1(I_b,\varepsilon)\to 0$ و $\omega_q^1(I_b,\varepsilon)\to 0$. در نتیجه:

$$\omega(Tu,\sigma)\le k_1c_1\omega(u,\sigma).$$

بنابر این با سوپریمم گرفتن روی P و رابطه (۱.۲) وقتی $\sigma\to 0$، خواهیم داشت:

$$\mho(TP)\le k_1c_1\mho(P)$$

یعنی T یک نگاشت چگال است. حال شرط (P) را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $u\in\partial\bar{B}_\rho$ ، دراین‌صورت اگر $Tu=ku$ آنگاه خواهیم داشت: $\|Tu\|=k\|u\|=k\rho$ با استفاده از شرط (H_3) نتیجه می‌گیریم که:

$$|Tu(s)|=\Big|q\Big(s,f(u(\xi(s))),({}_1H^{r,\mu}ku)(s),({}_1H^\beta lu)(s)\Big)\Big|\le\rho$$

که در آن $s\in I_b$. از این‌رو $\|Tu\|\le\rho$. این نشان می‌دهد که $k\le 1$ و اثبات تمام است.

□

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم

B_1: $F\in C(I_b\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $k\in C(I_b^2\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ و همچنین تابع $\xi:I_b\to I_b$ پیوسته باشد.

B_2: ثابت های نامنفی c_1,k_1,k_2 با $k_1c_1<1$ موجود باشند، به‌طوری که برای هر $s\in I_b$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}&|F(s,u_1,u_2)-F(s,\bar{u}_1,\bar{u}_2)|\le k_1|u_1-\bar{u}_1|+k_2|u_2-\bar{u}_2|,\\ &|f(u)-f(\bar{u})|\le c_1|u-\bar{u}|,\qquad u_1,\bar{u}_1,u_2,\bar{u}_2,u,\bar{u}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

$B_۳$: (شرط مرزی) عدد $\rho \geq ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که در شرط مرزی زیر صدق کند.

$$sup\Big\{|F(s,u_۱,u_۲)| : s\in I_b, |u_۱|\leq\rho, |u_۲|\leq \frac{M_۱(\ln b)^r e^{\frac{\mu-۱}{\mu}(\ln b)}}{\mu^r\Gamma(r+۱)}\Big\}\leq\rho,$$

که در آن

$$M_۱=\sup\{|k(s,\zeta,u)| : \forall s,\zeta\in I_b\ ,\ \ u\in[-\rho,\rho]\}$$

آنگاه معادله

$$u(s)=F\Bigg(s, f(u(\xi(s))), \frac{۱}{\mu^r\Gamma(r)}\int_a^s e^{\frac{\mu-۱}{\mu}\left(\ln\frac{s}{\zeta}\right)}\Big(\ln\frac{s}{\zeta}\Big)^{r-۱}\frac{k\big(s,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta\Bigg) \qquad (۱.۳)$$

حداقل یک جواب در فضای باناخ $E=C(I_a)$ دارد.

اثبات. اثبات این نتیجه، همانند قضیه فوق است که از آن صرف‌نظر می‌شود. $\square$

نتیجه **۳.۳**. فرض کنیم

$C_۱$: $F\in C(I_b\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $l\in C(I_b^۲\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ و همچنین تابع $\xi: I_b\to I_b$ پیوسته باشد.

$C_۲$: ثابت های نامنفی $c_۱,k_۱,k_۲$ با $k_۱c_۱<۱$ موجود باشند، به‌طوری که برای هر $s\in I_b$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}|F(s,u_۱,u_۲)-F(s,\bar{u_۱},\bar{u_۲})| &\leq k_۱|u_۱-\bar{u_۱}|+k_۲|u_۲-\bar{u_۲}|,\\ |f(u)-f(\bar{u})| &\leq c_۱|u-\bar{u}|, \qquad\qquad u_۱,\bar{u_۱},u_۲,\bar{u_۲},u,\bar{u}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

$C_۳$: (شرط مرزی) عدد $\rho\geq ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که در شرط مرزی زیر صدق کند.

$$sup\Big\{|F(s,u_۱,u_۲)| : s\in I_b, |u_۱|\leq\rho, |u_۲|\leq\frac{M_۲(\ln b)^r}{\Gamma(r+۱)}\Big\}\leq\rho,$$

که در آن

$$M_۲=\sup\{|l(s,\zeta,u)| : \forall\ s,\zeta\in I_b\ ,\ \ u\in[-\rho,\rho]\}.$$

آنگاه معادله

$$u(s)=F\Bigg(s, f(u(\xi(s))), \frac{۱}{\Gamma(\beta)}\int_a^s\Big(\ln\frac{s}{\zeta}\Big)^{\beta-۱}\frac{l\big(s,\zeta,u(\zeta)\big)}{\zeta}d\zeta\Bigg) \qquad (۲.۳)$$

حداقل یک جواب در فضای باناخ $E=C(I_a)$ دارد.

اثبات. از اثبات صرف‌نظر می‌شود. $\square$

۴ مثال‌ها

مثال **۱.۴**. معادله انتگرالی کسری هادامارد زیر را در نظر می‌گیریم.

$$u(s)=\frac{۱}{۴(۱+s)}e^{-\frac{s}{۲}}+\frac{u(\sqrt{s})s^۴}{۵(۱+s^۴)}+\frac{({}_۱H^{۳,\frac{۱}{۴}}ku)(s)}{۲s(۱+\sqrt{s})}+\frac{s^۲\cos(s)({}_۱H^{\frac{۱}{۵}}lu)(s)}{۱+s^۲},\ s\in[۱,۲]. \quad (۱.۴)$$

که در آن:

$$({}_1H^{3,\frac{1}{3}}ku)(s) = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3\Gamma(3)}\int_1^s e^{-2(\ln\frac{s}{\zeta})}(\ln\frac{s}{\zeta})^2\frac{k(s,\zeta,u(\zeta))}{\zeta}d\zeta,\ \ k(s,\zeta,u(\zeta)) = \frac{s\ln(1+|u(\sqrt{\zeta})|}{(2+\zeta(s-1))^2}$$

و

$$({}_1H^{\frac{1}{5}}ku)(s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{5})}\int_1^s(\ln\frac{s}{\zeta})^{\frac{1}{5}-1}\frac{l(s,\zeta,u(\zeta))}{\zeta}d\zeta,\quad l(s,\zeta,u(\zeta)) = \frac{\cos(\zeta)(1+u(\zeta)}{3+\ln(s)+s\zeta}$$

و همچنین:

$$q(s,u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{4(1+s)}e^{-\frac{s}{2}} + \frac{s^4u_1}{5(1+s^4)} + \frac{u_2}{2s(1+\sqrt{s})} + \frac{s^2\cos(s)u_3}{1+s^2},$$
$$u_2 = ({}_1H^{3,\frac{1}{3}}ku)(s),\quad u_3 = ({}_1H^{\frac{1}{5}}lu)(s)$$

اکنون، وجود جواب برای معادله فوق را در $C[1,2]$ بررسی می‌کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که توابع فوق در شرایط داده شده (H_1) و (H_2) صدق می‌کنند. حال نشان می‌دهیم که (H_3) نیز برقرار است. فرض کنیم $\|x\| \le \rho, \rho > 0$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$|u(s)| = |\frac{1}{4(1+s)}e^{-\frac{s}{2}} + \frac{u(\sqrt{s})s^4}{5(1+s^4)} + \frac{({}_1H^{3,\frac{1}{3}}ku)(s)}{2s(1+\sqrt{s})} + \frac{s^2\cos(s)({}_1H^{\frac{1}{5}}lu)(s)}{1+s^2}| \le \rho,$$

برای هر $s \in I_b$. در این صورت (H_3) برقرار است اگر

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\rho + \frac{\rho e^{-2(\ln 2)}(\ln 2)^3}{8\Gamma(4)} + \frac{(1+\rho)(\ln 2)^{\frac{1}{5}}}{8\Gamma(\frac{6}{5})} \le \rho.$$

این نشان می‌دهد که $\rho \in [0/21491, 23/024]$. بنابر این با توجه به قضیه (۱.۳) معادله (۱.۴) حداقل یک جواب دارد.

مثال ۲.۴. معادله انتگرالی

$$u(s) = \frac{u(\sqrt{s+1})s^2}{24} + \frac{\sin(s)({}_1H^{2,\frac{1}{4}}ku)(s)}{2+4s} + \frac{({}_1H^{\frac{1}{3}}lu)(s)}{3+s^3},\quad s \in [1,2]. \tag{2.4}$$

حالت خاصی از معادله (۳.۱) است که در آن

$$({}_1H^{2,\frac{1}{4}}ku)(s) = \frac{1}{(\frac{1}{4})^2\Gamma(3)}\int_1^s e^{-3(\ln\frac{s}{\zeta})}(\ln\frac{s}{\zeta})^{2-1}\frac{1+s\zeta+u(\zeta)}{\zeta(3+2\ln(s))}d\zeta,$$

و

$$({}_1H^{\frac{1}{3}}ku)(s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\int_1^s(\ln\frac{s}{\zeta})^{\frac{1}{3}-1}\frac{1+u(\zeta)}{\zeta(2+s)}d\zeta$$

و همچنین:

$$q(s,u_1,u_2,u_3) = \frac{s^2u_1}{24} + \frac{\sin(s)u_2}{2+4s} + \frac{u_3}{3+s^3},\quad u_2 = ({}_1H^{2,\frac{1}{4}}ku)(s),\quad u_3 = ({}_1H^{\frac{1}{3}}lu)(s)$$

شرایط (H_1) و (H_2) به‌وضوح برقرار است. برای بررسی شرط (H_3) فرض کنیم $\|u\| \le \rho, \rho > 0$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$|u(s)| = |\frac{u(\sqrt{s+1})s^2}{24} + \frac{\sin(s)({}_1H^{2,\frac{1}{4}}ku)(s)}{2+4s} + \frac{({}_1H^{\frac{1}{3}}lu)(s)}{3+s^3}| \le \rho,$$

برای هر $s \in I_b$. در این صورت (H_3) برقرار است اگر

$$\frac{1}{6}\rho + \frac{16(5+\rho)e^{-3(\ln 2)}(\ln 2)^2}{18\Gamma(3)} + \frac{(3+\rho)(\ln 2)^{\frac{1}{3}}}{12\Gamma(\frac{4}{3})} \le \rho.$$

در نتیجه، $\rho > 0/29838$ جوابی از نامساوی فوق است. بنابراین تمام شرایط قضیه (۱.۳) برقرار است. پس معادله (۲.۴) حداقل یک جواب دارد.

۵ نتیجه‌گیری

با استفاده ازمفهوم اندازه نافشردگی هاسدروف و قضیه نقطه ثابت پترشن در بخش ۳، یک قضیه وجودی جدید، برای اثبات وجود جواب برای دسته‌ای از معادلات انتگرالی کسری هادامارد تناسبی ارائه گردید. برتری قضیه نقطه ثابت پترشن نسبت به سایر قضایای نقطه ثابت (قضیه نقطه ثابت شاودر و داربو) در کاربرد این قضیه است، که نیازی به بسته و محدب بودن و نیز بررسی این‌که نگاشت، گوی‌ها را به خودش ببرد، نیست. نتایج اخیر، برای معادله (۳.۱) را می‌توان در سایر فضاها، از قبیل فضای سوبولف، فضای هولدر و اورلیچ بررسی کرد. امیدواریم این مسئله در آینده، موجب تحقیقات بیشتری در این زمینه شود.

فهرست منابع

[1] Abbas, S., Benchohra, M. and Henderson, J., 2012. Global asymptotic stability of solutions of nonlinear quadratic Volterra integral equations of fractional order. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 19(1), p.79.

[2] Adjabi, Y., Samei, M.E., Matar, M.M. and Alzabut, J., 2021. Langevin differential equation in frame of ordinary and Hadamard fractional derivatives under three point boundary conditions. *Aims Math*, 6(3), pp.2796-2843. https://doi.org/10.3934/math.2021171

[3] Adjimi, N., Boutiara, A., Samei, M.E., Etemad, S., Rezapour, S. and Kaabar, M.K., 2023. On solutions of a hybrid generalized Caputo-type problem via the noncompactness measure in the generalized version of Darbo’s criterion. *Journal of Inequalities and Applications*, 2023(1), p.34. https://doi.org/10.1186/s13660-023-02919-z

[4] Arab, R., Nashine, H.K., Can, N.H. and Binh, T.T., 2020. Solvability of functional-integral equations (fractional order) using measure of noncompactness. *Advances in Difference Equations*, 2020, pp.1-13. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2487-4

[5] Bana´s J., Goebel K., 1980. Measure of Noncompactness in Banach Spaces, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics,* vol. 60. Marcel Dekker, New York.

[6] Etemad, S., Iqbal, I., Samei, M.E., Rezapour, S., Alzabut, J., Sudsutad, W. and Goksel, I., 2022. Some inequalities on multi-functions for applying in the fractional Caputo–Hadamard jerk inclusion system. *Journal of Inequalities and Applications*, 2022(1), p.84. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02819-8

[7] Etemad, S., Rezapour, S. and Esmael Samei, M., 2020. On a fractional Caputo–Hadamard inclusion problem with sum boundary value conditions by using approximate endpoint property. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(17), pp.9719-9734. https://doi.org/10.1002/mma.6644

[8] Darbo, G., 1955. Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. *Rendiconti del Seminario matematico della Università* di Padova, 24, pp.84-92.

[9] Deep, A. and Hazarika, B., 2021. An existence result for Hadamard type two dimensional fractional functional integral equations via measure of noncompactness. *Chaos, Solitons & Fractals*, 147, p.110874. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110874

[10] Deep, A., Kumar, A., Abbas, S. and Hazarika, B., 2022. An existence result for functional integral equations via Petryshyn’s fixed point theorem. *Journal of Integral Equations and Applications*, 34(2), pp.165-181. https://doi.org/10.1216/jie.2022.34.165

[11] Deep, A. and Ezzati, R., 2021. Application of Petryshyn's fixed point theorem to solvability for functional integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 395, p.125878. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125878

[12] Derakhshan, M., Jahanshahi, M. and Kazemi Demneh, H., 2021. Investigation the boundary and initial value problems including fractional integro-differential equations with singular kernels. *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, 11(1), pp.97-108. [In Persian] 10.22055/jamm.2021.34670.1848

[13] Furi, M. and Vignoli, A., 1969. Fixed points for densifying mappings. *Atti Della Accademia Nazionali Dei Lincei Rendiconti-Classe Di Scienze Fisiche-Matematiche & Naturali,* 47(6), p.465.

[14] Goldenshtejn, L. S and Markus, A. S., 1965. On the measure of non-compactness of bounded sets and of linear operators. *Studies in Algebra and Math. Anal. (Russian)*, pages 45–54. Izdat. "Karta Moldovenjaske", Kishinev.

[15] Hadamard, J., 1892. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8, pp.101-186.

[16] Hilfer, R. ed., 2000. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific.

[17] Jarad, F., Abdeljawad, T. and Alzabut, J., 2017. Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives. *The European Physical Journal Special Topics*, 226, pp.3457-3471. 10.1140/epjst/e2018-00021-7

[18] Kazemi, M. and Ezzati, R., 2016. Existence of solution for some nonlinear two-dimensional Volterra integral equations via measures of noncompactness. *Applied Mathematics and Computation*, 275, pp.165-171. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.066

[19] Kazemi, M., Deep, A. and Nieto, J., 2023. An existence result with numerical solution of nonlinear fractional integral equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(9), pp.10384-10399. https://doi.org/10.1002/mma.9128

[20] Kazemi, M., 2021. On the existence of solutions for fractional integral equations by measure of noncompactness in Banach space. *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, 11(4), pp.653-665. [In Persian] 10.22055/jamm.2021.37610.1933

[21] Kazemi, M. and Yaghoobnia, A.R., 2022. Application of fixed point theorem to solvability of functional stochastic integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 417, p.126759. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126759

[22] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.

[23] Kuratowski K.,1930. *Sur les espaces completes*, Fund. Math., (15), 301–309.

[24] Mishra, L.N., Sen, M. and Mohapatra, R.N., 2017. On existence theorems for some generalized nonlinear functional-integral equations with applications. *Filomat*, 31(7), pp.2081-2091. 10.2298/FIL1707081N

[25] Nussbaum R., 1969. The fixed point index and fixed point theorems for k-set contractions *Doctoral dissertation, University of Chicago.*

[26] Patle, P.R., Gabeleh, M., Rakočević, V. and Samei, 2023. New best proximity point (pair) theorems via MNC and application to the existence of optimum solutions for a system of ψ-Hilfer fractional differential equations. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 117(3), p.124. https://doi.org/10.1007/s13398-023-01451-5

[27] Petryshyn, W.V., 1971. Structure of the fixed points sets of k-set-contractions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 40, pp.312-328.

[28] Rabbani, M., Deep, A. and Deepmala, 2021. On some generalized non-linear functional integral equations of two variables via measures of noncompactness and numerical method to solve it. *Mathematical Sciences*, pp.1-8. https://doi.org/10.1007/s40096-020-00367-0

[29] Rahman, G., Abdeljawad, T., Jarad, F., Khan, A. and Nisar, K.S., 2019. Certain inequalities via generalized proportional Hadamard fractional integral operators. *Advances in Difference Equations*, 2019, pp.1-10. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2381-0

[30] Samei, M.E., 2020. Employing Kuratowski measure of non-compactness for positive solutions of system of singular fractional q-differential equations with numerical effects. *Filomat*, 34(9), pp.2971-2989. https://doi.org/10.1186/10.2298/FIL2009971S

[31] Samei, M.E., Hedayati, V. and Rezapour, S., 2019. Existence results for a fraction hybrid differential inclusion with Caputo–Hadamard type fractional derivative. *Advances in Difference Equations*, 2019(1), pp.1-15. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2090-8

[32] Samko S.G., A.A. Kilbas and Marichev O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. *Gordon and Breach Science, Yverdon, Switzerland.*

[33] Saxena, R.K. and Kalla, S.L., 2003. On a fractional generalization of the free electron laser equation. *Applied mathematics and computation*, 143(1), pp.89-97. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00348-X

[34] Subramanian, M., Alzabut, J., Baleanu, D., Samei, M.E. and Zada, A., 2021. Existence, uniqueness and stability analysis of a coupled fractional-order differential systems involving Hadamard derivatives and associated with multi-point boundary conditions. *Advances in Difference Equations*, 2021(1), p.267. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03414-9

[35] Yue, X.G., Samei, M.E., Fathipour, A., Kaabar, M.K. and Kashuri, A., 2022. Using Krasnoselskii's theorem to investigate the Cauchy and neutral fractional q-integro-differential equation via numerical technique. *Nonlinear Engineering*, 11(1), pp.186-206. https://doi.org/10.1515/nleng-2022-0023

Existence of solution for Hadamard proportional fractional integral equations by Fixed point theorem

Manochehr Kazemi [2]

Department of Mathematics, Ashtian Branch, Islamic Azad University, Ashtian, Iran

Communicated by: M.S. Samei

Received: 21 October 2023 Accepted: 12 May 2024

Abstract: In this article, using the technique of the measures of non-compactness and the Petryshyn's fixed point theorem in Banach algebra an existence theorem for some Hadamard proportional fractional integral equations is provided. The study of these integral equations are important because they contain lots of particular cases of integral equations that arise in many branches of nonlinear analysis and its applications. Comparing Petryshyn's fixed point theorem to Schauder and Darbo's fixed point theorems, it enables us to skip demonstrating closed, convex and compactness properties on the investigated operators. Finally, some examples are provided for the accuracy and efficiency of the obtained results.

Keywords: Hadamard proportional fractional integral equations, Existence of solutions, Measures of noncompactness, Fixed point theorems, Fractional calculus.

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Kazemi) univer_ka@yahoo.com