



## مروری بر راهکارهای کنترل بهینه برای مهار بیماری‌های عفونی واگیردار<sup>۱</sup>

مریم نیکبخت<sup>(۱)</sup> و علیرضا فخرزاده جهرمی<sup>(۲)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

دبیر مسئول: محمد هادی فراهی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۹/۱۵

**چکیده:** استفاده از مدل‌های ریاضی برای توصیف بیماری‌های عفونی و سپس نحوه مهار و حذف آن‌ها توسط واکسن و یا دیگر درمان‌ها کمک بسیار بزرگی به سازمان‌های بهداشت عمومی می‌کند. ریشه‌کنی این دسته از بیماری‌ها وقتی امکان‌پذیر است که داروها در زمان مناسب و با میزان و فرایند مناسب تجویز شوند که در این راستا نظریه کنترل بهینه، به عنوان ابزاری موفق عمل نموده است. هدف در این مقاله، مروری بر ادبیات موجود در خصوص چنین راهکارهایی در مقابله با بیماری‌های عفونی در قالب مدل پایه‌ای مشهور  $SIR$  است. بدین منظور در این مطالعه، نحوه استفاده از تابع کنترل و چگونگی تبیین راهکارهای ارائه شده در راستای بررسی جمعیت‌های سالم، عفونی و بهبودیافته با در نظر گرفتن اهداف مورد نیاز، در بین فعالیت‌های انجام شده مورد ارزیابی و تحلیل قرار گرفته است. براساس تعداد متغیرهای کنترل به کار گرفته شده در درمان که مبین طرق مختلفی پیشگیری‌های هم‌زمان اعم از واکسیناسیون، درمان عفونت، قرنطینه و نظایر آن است و یا نوع مدل، این مطالعه دسته‌بندی و نتایج حاصل ارائه گردیده است؛ همچنین در این مرور به نحوه‌های پیاده‌سازی مدل‌ها از نظر محاسبات عددی نیز پرداخته شده است و حالت‌های تأخیر زمانی، تصادفی و گسسته زمانی در مورد  $SIR$  نیز بررسی شده است. این مرور برای پژوهشگران به منظور شناخت و اشراف داشتن به موضوع و فعالیت‌های انجام شده جهت ادامه تحقیقات بسیار مفید خواهد بود.

**واژه‌های کلیدی:** کنترل بهینه، مدل ریاضی  $SIR$ ، معادلات دیفرانسیل، بیماری عفونی.

رده‌بندی ریاضی: 34H05; 34H35

<sup>1</sup>Susceptible, Infected, Recovered

<sup>۲</sup>مریم نیکبخت

(M. Nikbakht) [m\\_nikbakht@pnu.ac.ir](mailto:m_nikbakht@pnu.ac.ir) (A. Fakharzadeh), [a\\_fakharzadeh@sutec.ac.ir](mailto:a_fakharzadeh@sutec.ac.ir)

## ۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، مدل‌های ریاضی توصیف‌کننده پویایی بیماری‌های عفونی، نقش مهمی در شناخت نحوه‌ی رشد و مهار این دسته از بیماری‌ها ایفا کرده‌اند [۴، ۲۳، ۲۸، ۳۸، ۴۳، ۴۴، ۴۹، ۵۰، ۵۲، ۵۳]. این در حالی است که شیوع بیماری‌های همه‌گیر باعث مرگ میلیون‌ها نفر و همچنین ایجاد هزینه زیاد در مراقبت‌های بهداشتی و مدیریت پزشکی می‌شود. در طول تاریخ، بیماری‌های واگیردار تأثیر زیادی بر تاریخ بشر در دوره‌های مختلف داشته‌اند؛ به طوری که برخی از آن‌ها حتی مسیر تمدن را تغییر دادند [۲۸]. این بیماری‌ها معمولاً از مرز چند قاره فراتر رفته و بسیاری از مردم جهان را گرفتار می‌کند. گسترش سریع کرونا و ویروس در سال ۲۰۲۰ میلادی در سراسر جهان شاهدهی روشن در این زمینه می‌باشد [۲۴] و [۴۱]. در طول تاریخ چندین همه‌گیری فراگیر رخ داده است که از شناخته‌شده‌ترین آن‌ها می‌توان به طاعون، آبله، سل، وبا، آنفولانزا و به تازگی کوید-۱۹ اشاره کرد [۴۸]. بدیهی است که حوادث غیرمنتظره از جمله بیماری‌های همه‌گیر، براساس وسعت، تعداد و تراکم جمعیت به فجایع کوچک و یا بلایای بزرگ تبدیل می‌شود که در این حالت بازگرداندن شرایط به وضعیت اولیه ممکن است دشوار و طاقت‌فرسا باشد. سازمان بهداشت جهانی بلایا را، پدیده‌های بوم شناختی ناگهانی می‌داند که نیازمند کمک‌های فراسازمانی است [۲۶]. در این بین مدل‌سازی ریاضی با ارائه بینش عمیق‌تری در مورد شیوه‌های اساسی گسترش بیماری‌های عفونی با پیشنهاد راهکارهای کنترل مؤثر این دسته بیماری‌ها، همچنان نقش مهمی در شناخت و حتی مهار فراگیری ایفا می‌کند. ریشه‌کنی موفقیت‌آمیز این نوع بیماری‌های نوظهور، تنها به در دسترس بودن زیرساخت‌های پزشکی بستگی نداشته و به توانایی درک پویایی انتقال یک بیماری خاص، به‌کارگیری راهکارهای بهینه و اجرای سیاست‌های لجستیکی نیز بستگی دارد.

با توجه به بحران‌های به وجود آمده اخیر در جامعه بر اثر بیماری کرونا که به وضوح نظام‌های سلامت دنیا را به چالش کشید و مشکلات اقتصادی و اجتماعی بسیاری را در پی داشت، این نیاز احساس شد که بر مقالات مطرح شده در زمینه بیماری‌های واگیردار از دیدگاه کنترل بهینه مروری داشته باشیم. این نکته نیز قابل تأمل است که انجام آزمایشات در ازای راه‌حل‌های مختلف به صورت واقعی زیان‌های بزرگی را در بر دارد که در بسیاری موارد قابل جبران نیست؛ اما مدل‌های ریاضی قدرت انجام آزمایش‌های مختلف بدون هیچ زیان انسانی و هزینه‌های جانبی را به محققین می‌دهند. بر این اساس است که از مدل‌های ریاضی در ارزیابی و بهینه‌سازی برنامه‌های مختلف تشخیص، پیشگیری، درمان و کنترل بیماری‌ها استفاده شده است. از جمله سؤالاتی که مدل ریاضی بیماری‌ها به آن‌ها پاسخ داده است، عبارتند از: چند نفر مبتلا خواهند شد؟ چه تعداد از افراد مبتلا به بستری شدن در بیمارستان نیاز خواهند داشت؟ حداکثر تعداد افراد مبتلا در هر زمان مورد انتظار چقدر است؟ مدت زمان فراگیری تخمین زده شده چقدر است؟ این گونه سؤال‌ها همواره مورد توجه مسؤولین بهداشت عمومی است که با شناسایی نحوه‌ی درمان فراگیری، در تجزیه و تحلیل راهکارهای کنترل آن به بررسی بپردازند. مدل‌های ریاضی مختلفی برای توصیف بیماری‌های همه‌گیر مطرح شده است؛ در این مدل‌ها اغلب کل جمعیت به رده‌های مختلف در بخش‌های کوچک تقسیم می‌شوند تا نشان‌دهنده افراد مستعد، واکسینه‌شده، در معرض عفونت، بهبودیافته و تحت درمان باشند. در بین مدل‌های متعدد بیماری‌های واگیردار، مدل  $SIR$  که شامل افراد مستعد بیماری، افراد عفونی و افراد بهبودیافته است و در [۳۰] معرفی شده است، به عنوان یکی از پرکاربردترین و پایه‌ای‌ترین مدل‌های ریاضی بیشترین مطالعه را داشته است. از این رو در این مقاله مروری خواهیم داشت بر مقالات مطرح شده برای بیماری‌های همه‌گیر که برپایه‌ی مدل  $SIR$  و از منظر کنترل بهینه دیدگاه خود را بیان نموده‌اند. خاطرنشان شود که قبلاً نیز از مدل‌های ریاضی پیوسته برای مطالعه پویایی بیماری‌های عفونی در یک میزبان انسانی در جامعه استفاده شده است؛ مثلاً در گذشته از کنترل بهینه برای یافتن یک برنامه بهینه برای واکسن، درمان و شیمی درمانی برای فرد آلوده و همچنین برای مدیریت بهینه منابع مرتبط با قرنطینه و برنامه‌های جداسازی استفاده شده است [۴۰].

در ادامه مقاله بدین شکل سازماندهی شده است: روش تحقیق انجام شده در این مقاله در بخش ۲ مطرح گردیده است؛ در بخش ۳ مدل ریاضی  $SIR$  که به عنوان مدل پایه برای بیماری‌های عفونی مطرح است، معرفی می‌شود و انواع زیرمدل‌های آن معرفی خواهد شد. پس از آن مدل‌های  $SIR$  که در آن‌ها کنترل بهینه جهت جلوگیری از پیشرفت بیماری اعمال گردیده است در بخش ۴ مطرح می‌شود. بنابر بررسی‌های انجام شده بر روی این مدل‌ها، نحوه اعمال کنترل را در زیربخش‌های مختلف که شامل اعمال تک متغیر کنترل، دو متغیر کنترل و چهار متغیر کنترل است، دسته‌بندی شده است. سپس در بخش ۵ اعمال کنترل با تأخیر زمانی، در بخش ۶ اعمال کنترل تصادفی و در بخش ۷ کنترل گسسته زمانی که جزو دیگر مدل‌ها می‌باشد بیان خواهد شد. در ادامه در بخش ۸ به موارد دیگر اشاره شده است و آخرین بخش نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲ روش تحقیق

براساس دانش ریاضی در مورد مدل‌سازی بیماری‌های عفونی، در این مطالعه برای مرور از مقاله‌های مرتبط در پایگاه‌های مختلف اطلاعاتی معتبر (الزویر<sup>۳</sup>، اشپرینگر<sup>۴</sup>، پابمد<sup>۵</sup> و اسکوپوس<sup>۶</sup>) استفاده شده است؛ در این راستا جهت جست و جوی مقالات از کلید واژه‌ها از جمله

### *Optimal Control , SIR model و Infection disease*

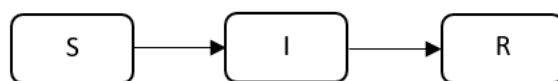
استفاده شده است.

معیارهای انتخاب مقالات عبارت بودند از: توانمندی مقاله در ارتباط با مدل *SIR* (علاوه بر ساختار معمول مقالات دارای نوآوری در مدل‌سازی و پیاده‌سازی قوی عددی نیز باشد)، علمی-پژوهشی بودن و اعتبار مجله (ضریب تأثیر و چارک)، تواتر استناد در پایگاه‌های اطلاعاتی، سابقه قبلی و بعدی نویسندگان، تعداد ارجاعات، اهمیت و تفاوت مدل‌های ارائه شده و نحوه اعمال کنترل در مدل‌ها. بدین ترتیب و با خاص‌تر کردن جستجو، مقالات متعددی جداسازی شدند؛ سپس مقالاتی که به عنوان پایه و یا مقاله کلیدی در این مقالات به آن‌ها استناد شده، به این مجموعه اضافه گردید. براساس بررسی‌های انجام شده مقالات موجود در این رده که اعمال کنترل نموده‌اند شامل واکسن، جداسازی، قرنطینه و یا استفاده از تأخیر زمانی و کنترل تصادفی می‌باشد. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که تحقیقات و به‌ویژه پژوهش‌های کیفی در این زمینه محدود است. بر این اساس مقالات را در چهار دسته کنترل بدون تأخیر زمانی، کنترل با تأخیر زمانی، کنترل تصادفی و کنترل گسسته زمانی دسته‌بندی می‌کنیم. با توجه به این که مقالات مورد بررسی از نوع *SIR* می‌باشند، در ادامه به معرفی این مدل می‌پردازیم و سپس در قسمت بعد ادبیات مورد نیاز مطرح شده در زمینه کنترل را مرور خواهیم کرد. خاطرنشان شود که مدت زمان جستجوی مقالات و مطالعه و بررسی آن‌ها به‌طور تقریبی در شش ماه انجام گرفت.

## ۳ معرفی مختصر مدل *SIR*

مدل *SIR* که ابتدا توسط کرماک و مک کندریک در سال ۱۹۲۷ طراحی و مطالعه شد [۳۰]، به عنوان یک مدل مادر برای توصیف بیماری‌های عفونی استفاده می‌شود. براساس این مدل، زمانی که یک بیماری همه‌گیر در یک جمعیت شیوع پیدا می‌کند، جمعیت به سه دسته‌ی بدون اشتراک تقسیم می‌شوند:

- دسته افرادی که سالم بوده اما مستعد ابتلا به بیماری هستند؛ تعداد این افراد در زمان  $t$  با  $S(t)$  نشان داده می‌شود.
  - دسته افرادی که بیمار هستند؛ تعداد افراد این دسته در زمان  $t$  با  $I(t)$  نشان داده می‌شوند.
  - دسته افرادی که بهبود یافته‌اند و دیگر به بیماری مبتلا نمی‌شوند؛ این دسته در زمان  $t$  با  $R(t)$  نشان داده می‌شوند.
- شکل ۱ رابطه‌ی بین دسته افراد مستعد یا حساس به بیماری، دسته افراد عفونی و دسته افراد بهبودیافته را مطرح می‌کند. اندازه این سه دسته در طول زمان بیماری تغییر می‌کند و در نتیجه آن‌ها به‌صورت  $S(t)$ ،  $I(t)$  و  $R(t)$  که تابعی از زمان



شکل ۱: ارتباط سه دسته افراد مستعد، حساس و عفونی در مدل *SIR*

هستند، بیان می‌گردند. اگر کل جمعیتی که شیوع بیماری در آن رخ داده است را با  $N$  نشان دهیم، داریم:

$$N = S(t) + I(t) + R(t). \quad (1.3)$$

<sup>3</sup>Elsevier

<sup>4</sup>Springer

<sup>5</sup>Pubmed

<sup>6</sup>Scopus

در ادامه پویایی هر دسته را با کمک معادلات دیفرانسیل توصیف می‌کنیم. اما قبل از بیان این موضوع لازم است که اشاره‌ای به راه‌های توصیف بیماری داشته باشیم.

براساس شیوع، بروز و ناشناخته بودن یک بیماری، چند راه برای توصیف آن وجود دارند که عبارتند از: اندمیک<sup>۷</sup>، اپیدمیک<sup>۸</sup> و پاندمیک<sup>۹</sup>. یک بیماری عفونی زمانی اندمیک یا بومی نامیده می‌شود که در یک منطقه جغرافیایی معین وجود داشته باشد اما تأثیر آن قابل کنترل باشد. از مدل‌های این نوع بیماری برای مطالعه آن در دوره‌های طولانی‌تر استفاده می‌شوند و در آن تولد و مرگ در نظر گرفته می‌شود. بعد از آن اپیدمیک یا همه‌گیری را داریم که عبارت است از شیوع سریع بیماری در مدت زمان کوتاه که در آن تعداد مبتلا بیش از حد انتظار است. این مدل برای توصیف شیوع سریع که معمولاً در کمتر از یک سال رخ می‌دهند استفاده می‌شود. پاندمیک یک اپیدمی وسیع‌تر است که چندین کشور را در بر می‌گیرد و افراد زیادی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. براساس تحقیقات انجام شده، دو مدل کلی ریاضی  $SIR$ ، برای حالت‌های اندمیک و اپیدمیک مطرح شده است که در ادامه به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

### ۱.۳ مدل اپیدمیک $SIR$

زمانی که یک فرد سالم ولی مستعد به بیماری در ارتباط با یک فرد بیمار قرار می‌گیرد، شخص سالم با احتمالی بیمار می‌شود و از طرفی فرض اولیه بر این اساس است که شخص بیمار بعد از دوره‌ی بیماری بهبود می‌یابد. بنابراین واضح است که تعداد افراد این سه دسته در طول زمان و در جریان شیوع یک بیماری تغییر می‌کنند. بنابراین در چنین مدلی  $S$ ،  $I$  و  $R$  توابعی برحسب زمان هستند که آن‌ها را به شکل  $S(t)$ ،  $I(t)$  و  $R(t)$  نشان می‌دهیم و همان‌طور که قبلاً هم مطرح گردید، کل جمعیتی که شیوع بیماری در آن رخ داده  $N$  است. برای بررسی تغییرات  $S$ ، لازم است که  $\dot{S} \equiv \frac{dS}{dt}$  و به همین ترتیب برای بررسی تغییرات  $I$  و  $R$  نیاز به داشتن  $\dot{I}$  و  $\dot{R}$  است. با فرض این که در بازه زمانی  $[t, t + \Delta t]$  باشیم (که در آن گام زمانی  $\Delta t$  می‌تواند روز، سال یا کسری از ساعت باشد)، به دنبال پیدا کردن  $\Delta I$ ،  $\Delta S$  و  $\Delta R$  در طول زمان هستیم. برای این منظور می‌دانیم که میزان تغییرات تعداد افراد حساس، با تعداد آن‌ها متناسب است؛ یعنی  $\Delta S \propto S$ ؛ علاوه بر این  $\Delta S$  متناسب با افراد مبتلا نیز می‌باشد؛ به عبارت دیگر  $\Delta S \propto I$ . در نتیجه  $\Delta S \propto SI$  و از این رو داریم:

$$\Delta S = \alpha SI. \quad (۲.۳)$$

آشکار است افرادی که مبتلا نشده‌اند هر روز تعدادشان کمتر می‌شود؛ از این رو با توجه به کم شدن تعداد افراد دسته  $S$ ، برای  $\alpha > 0$  داریم  $\Delta S = -\alpha SI$  که این رابطه تغییرات  $S$  را در یک بازه زمانی معین می‌کند؛ بنابراین:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\alpha SI; \quad (۳.۳)$$

این مقدار کم شده از  $S$ ، به  $I$  اضافه می‌گردد و از این رو داریم:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \alpha SI. \quad (۴.۳)$$

همچنین تعدادی از افراد  $I$  به مرور زمان بهبود می‌یابند و در نتیجه از تعداد آن‌ها کم و به دسته  $R$  اضافه می‌شوند. بنابراین  $\Delta R \propto I$  و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \alpha SI - \beta I; \\ \dot{R} &= \beta I. \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

<sup>7</sup>Endemic

<sup>8</sup>Epidemic

<sup>9</sup>Pandemic

اکنون با توجه به این که  $S + I + R = N$  که در آن  $N$  یک عدد ثابت می‌باشد، واضح است که جمع  $\dot{S}$ ،  $\dot{I}$  و  $\dot{R}$  باید صفر شود؛ چون این اتفاق در جمع معادلات به دست آمده رخ می‌دهد، بنابراین شکل کلی دستگاه معادلات  $SIR$  در این مقاله به صورت زیر مطرح می‌شود [۳]:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\frac{\beta SI}{N}; \\ \dot{I} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I; \\ \dot{R} &= \gamma I.\end{aligned}\quad (۶.۳)$$

در این مدل تغییر جمعیت هر یک از اجزا بر حسب دو پارامتر  $\beta$  و  $\gamma$  که به ترتیب متناظر با نرخ تماس مؤثر بیماری و میانگین نرخ بهبودی می‌باشد؛ در این مدل تولد و مرگ در نظر گرفته نمی‌شود.

### ۲.۳ مدل اندمیک $SIR$

این مدل با در نظر گرفتن پویایی حیاتی (تولد و مرگ) به صورت زیر ارائه می‌شود [۳۰]:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \mu N - \mu S - \frac{\beta SI}{N}; \\ \dot{I} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I; \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\quad (۷.۳)$$

این مدل تقریباً شبیه به مدل  $SIR$  اپیدمیک می‌باشد با این تفاوت که جریان ورود نوزادان به دسته‌ی افراد مستعد با نرخ  $\mu N$  و مرگ در هر سه دسته با نرخ  $\mu S$ ،  $\mu I$  و  $\mu R$  در نظر گرفته شده است. مرگ‌های در نظر گرفته شده در هر دسته تولد را متعادل می‌کند تا اندازه جمعیت  $N$  ثابت بماند. در مدل مطرح شده میانگین طول عمر به طور تقریبی ۷۵ سال در نظر گرفته شده است. مدل‌های مطرح شده ۶.۳ و ۷.۳ مدل‌های دینامیکی بدون کنترل می‌باشند. در ادامه به بررسی مدل‌های  $SIR$  که از دیدگاه نظریه کنترل برای مهار واگیری عفونت ارائه شده‌اند، خواهیم پرداخت.

## ۴ کنترل فراگیری مدل‌های $SIR$

به عنوان مقدمه لازم است در مورد در نظر گرفتن تعداد عوامل مهار یا موثر در مهار بیماری‌های واگیردار در مقالات، یادآوری شود که این عوامل به صورت متغیرهای کنترل در نظر گرفته می‌شوند و از آنجا که نوع درمان متفاوت است، از این رو در مدل‌های مورد مطالعه به صورت‌های مختلف ظاهر شده‌اند. برای مهار بیماری واگیردار مورد مطالعه در مدل‌های  $SIR$ ، در برخی از مقالات یک متغیر کنترل در نظر گرفته شده است؛ اما دسته دیگری از مقالات وجود دارند که در آن‌ها دو متغیر کنترل مورد مطالعه قرار گرفته است (نظیر دو نوع طریق درمان)؛ این در حالی است که در مقاله‌ای با اعمال چهار متغیر کنترل برای مهار فراگیری اقدام شده است. نمایی از این موارد به صورت دسته‌بندی زیر در این مقاله ارائه می‌گردد. یادآور می‌شویم که شرایط اولیه برای تمام مدل‌ها، تعداد جمعیت اولیه هر یک از دسته‌ها ( $S$ ،  $I$  و  $R$ ) در زمان شروع درمان‌ها هستند.

### ۱.۴ مدل‌های کنترل $SIR$ بر مبنای یک متغیر کنترل

ابتدا به بررسی مدل‌هایی می‌پردازیم که فقط یک متغیر کنترل را جهت درمان یا جلوگیری از پیشرفت بیماری عفونی مورد مطالعه قرار داده‌اند. براساس تحقیقات انجام شده لارابی<sup>۱۰</sup> و همکاران مسأله کنترل بهینه را برای مدل  $SIR$  عمومی و

<sup>10</sup>Laarabi

بدون در نظر گرفتن بیماری خاصی مدنظر قرار داده‌اند [۳۵]. برای این منظور متغیر کنترل  $u(t)$  درصد افراد واکسینه شده در واحد زمان در نظر گرفته شده است که نسبت افراد  $S$  واکسینه شده در واحد زمان را نشان می‌دهد و بر جملات  $S$  و  $R$  در ۶.۳ اعمال شده است. هدف بهینه‌سازی در این مدل کمینه‌کردن شدت عوارض جانبی واکسیناسیون در نظر گرفته شده است و مدل مطرح شده در آن از نوع اپیدمیک می‌باشد. در این مدل کنترل بر جملات  $S$  و  $R$  به صورت زیر اعمال شده است (جهت اهمیت و توجه، در این قسمت و در ادامه مقاله فقط جملات اضافه شده بر مدل مورد نظر نمایش داده می‌شوند):

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dots - u(t)S(t), \\ \dot{R} &= \dots + u(t)S(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

در مقایسه با مدل  $SIR$  در این مدل با اعمال واکسیناسیون از دسته افراد مستعد ( $S$ ) کم شده و این افراد به دسته جمعیت بهبودیافته ( $R$ ) اضافه می‌شوند که این مطلب در معادله ۱.۴ در نظر گرفته شده است. تابع هدف مسأله کنترل بهینه مرتبط به صورت کمینه‌سازی تابعی زیر در نظر گرفته شده است:

$$J(u) = \int_0^{t_{end}} \left[ A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{\tau} \tau u^2(t) \right] dt; \quad (2.4)$$

که در آن  $A_1$  و  $A_2$  ضرایب مثبتی هستند که تعادل در اندازه  $S(t)$  و  $I(t)$  را حفظ می‌کنند. مربع بودن متغیر کنترل نشان‌دهنده شدت عوارض واکسیناسیون است و  $\tau$  یک پارامتر وزن مثبت در نظر گرفته شده است. هدف به حداقل رساندن تعداد افراد عفونی و حساس و به حداکثر رساندن تعداد افراد بهبودیافته می‌باشد. برای این مدل شرط اولیه نیز در نظر گرفته شده است (که در پیاده‌سازی عبارتند از  $R(0) = 61, I(0) = 110, S(0) = 1000$ ). در ادامه مقاله با معرفی یک دستگاه غیرخطی با ضرایب کراندار و همچنین استفاده از شرط لیپ شیتز<sup>۱۱</sup>، وجود کنترل بهینه ثابت شده است. سپس از تعریف کنترل  $u(t)$  و محدودیت‌های موجود روی  $S(t)$  و  $I(t)$  و  $R(t) \geq 0$  وجود جواب دستگاه پیشنهادی بررسی گردیده است [۱۱]. برای تعیین جواب بهینه مسأله کنترل بهینه از لاگرانژین<sup>۱۲</sup> و هامیلتونین<sup>۱۳</sup> استفاده شده است. براساس هامیلتونین، شرایط لازم بهینگی از اصل بیشینه پونتریاگین<sup>۱۴</sup> به دست آورده شده و آنگاه وجود کنترل بهینه از نتیجه‌ای در [۳۹] ثابت شده است. برای این منظور نشان داده شده که فضای کنترل محدب و بسته است و دستگاه جواب بهینه کراندار دارد؛ این موارد فشردگی فضای مورد نیاز برای وجود کنترل بهینه را تعیین می‌کند. برای شبیه‌سازی عددی مدل از روش گوس سایدل بهبودیافته [۱۸] در بازه‌ی زمانی ۷۰ روز استفاده شده است که در اصل روش استفاده شده بهبود روش گوس - سایدل می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که عملکرد بهینه واکسیناسیون و درمان تأثیر بسیار مطلوبی بر کاهش جمعیت  $S$  و  $I$  دارد و جمعیت بهبودیافته در طول دوره درمان افزایش می‌یابد.

بانرجی<sup>۱۵</sup> و بیسویس [۷] نیز یک مدل  $SIR$  اپیدمیک را ارائه دادند؛ آن‌ها از واکسن برای کنترل بیماری استفاده کردند و آن را به عنوان متغیر کنترل  $u(t)$  در نظر گرفتند. مدل مطرح شده در قالب مدل ریاضی بیماری کرونا مطرح و تأثیر متغیر کنترل بر مدل در جملات  $I$  و  $S$  بیان شده است. آن‌ها در ادامه تعیین شرایط لازم بهینگی با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین را مطرح کردند. سپس برای شبیه‌سازی معادلات حالت به روش پیشرو و هم‌زمان معادلات هم‌حالت به روش پسرو را ارائه داده‌اند [۴۶]. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد زمانی که دسته جمعیت افراد عفونی  $I$  کنترل می‌شود، به کمینه استفاده از واکسن نیاز است؛ در این شرایط اثرات جانبی واکسیناسیون نیز کاهش می‌یابد. همچنین راهکار کنترل به افزایش پاسخ ایمنی طبیعی فرد آلوده کمک می‌کند و بار ویروسی کاهش می‌یابد. در این مقاله نشان داده شده است که با اعمال کنترل، گسترش بیماری کندتر خواهد بود [۷].

تأثیر متغیر کنترل در این مقاله بر جملات  $S$  و  $I$  به صورت زیر آمده است:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \dots + u\beta SI, \\ \dot{I}(t) &= -u\beta SI - \dots. \end{aligned} \quad (3.4)$$

<sup>11</sup>Lipschitz

<sup>12</sup>Lagrangian

<sup>13</sup>Hamiltonian

<sup>14</sup>Pontryagin's maximum principle

<sup>15</sup>Banerjee



واضح است که با مصرف واکسن از تعداد افراد آلوده به عفونت، کم شده و به افراد سالم اضافه می‌گردد؛ این مطلب در مدل ریاضی ۳.۴ بیان گردیده است. تابع هدف نیز به صورت زیر مطرح شده است:

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left[ S + R - \frac{1}{\gamma} Wu^2 \right] dt, \quad (۴.۴)$$

که در آن  $W$  وزن کنترل مدل در نظر گرفته شده است. بلائین<sup>۱۶</sup> و همکاران در [۱۲] کاهش بهینه بیماری همه‌گیر را با در نظر گرفتن فاصله اجتماعی بررسی کردند. هدف آن‌ها درک چگونگی اعمال مهار جزئی یا کلی اپیدمی در طول بازه زمانی محدود برای به حداقل رساندن اندازه نهایی اپیدمی می‌باشد. برای این منظور از راهکار اعمال حداکثر فاصله اجتماعی مجاز استفاده کردند و با در نظر گرفتن متغیر کنترل  $u(t)$  که به عنوان فاصله اجتماعی، این متغیر بر جملات  $S$  و  $I$  اعمال گردید. سپس با استفاده از قضیه‌ای نشان داده شد که مسأله دارای جواب منحصر به فرد است. در این مقاله کنترل بهینه تحت حالت بازخورد به دست آمده است؛ در واقع در هر لحظه  $t$  ممکن است از متغیر حالت  $(S(t), I(t))$  مقدار ورودی کنترل بهینه  $u(t)$  با استفاده از یک خوارزمی صریح به دست آید. در ادامه تمام جواب‌های معادلات دیفرانسیل مورد نظر جهت شبیه‌سازی مدل با استفاده از روش رونگه کوتای مرتبه چهارم<sup>۱۷</sup> محاسبه شده‌اند؛ نتایج نشان می‌دهد که با فاصله اجتماعی در نظر گرفته شده، اندازه نهایی اپیدمی کاهش می‌یابد. این مسأله تا حد ممکن پس از عبور از آستانه ایمنی باعث توقف بیماری می‌شود. براساس نتایج حاصل توقف بیماری فقط در صورتی امکان‌پذیر است که شدت فاصله‌گذاری اجتماعی به اندازه کافی شدید باشد [۱۲]. در این مقاله با در نظر گرفتن متغیر کنترل  $u(t)$  به عنوان فاصله اجتماعی، این متغیر بر  $S$  و  $I$  به صورت زیر اعمال گردیده است:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \dots - u(t) \beta S(t) I(t), \\ \dot{I}(t) &= \dots + u(t) \beta S(t) I(t). \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

کچسون<sup>۱۸</sup> [۳۱] در مورد گسترش بیماری کوید ۱۹، توسط یک مدل  $SIR$  نقطه تعادل پایداری دستگاه را در نظر گرفته است؛ در این مقاله هدف به حداقل رساندن جمعیت آلوده در یک محدوده زمانی طولانی است. کنترل مورد نظر که با  $\sigma(t)$  نشان داده شده است، به صورت قرنطینه‌شدن در نظر گرفته شده است و با توجه به این که گستره جمعیت را نمی‌توان به‌طور نامحدود در قرنطینه نگه داشت، از کنترل در زمان محدود استفاده شده است. این مدل  $SIR$  مورد مطالعه نیز از نوع اپیدمیک می‌باشد. در ادامه وجود کنترل متناظر با پاسخ بهینه با توجه به محدب بودن تابع هزینه ثابت شده است. علاوه بر این شرایط الحاقی با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین تعیین شده است. سپس معادله هامیلتون - ژاکوبی - بلمن<sup>۱۹</sup> به دست آورده شده و با استفاده از گسسته‌سازی مرتبه دوم به صورت عددی حل شده است [۳۱]. مدت زمان قرنطینه در دو دوره ۱۵ روزه در نظر گرفته شده است. جملات اضافه شده بر مدل  $SIR$  به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \dots - \gamma \sigma(t) \cdot I(t) S(t); \\ \dot{I}(t) &= \dots + \gamma \sigma(t) \cdot I(t) S(t); \\ \dot{R}(t) &= 1 - S(t) - I(t). \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

این مساله برای یک دوره‌ی زمانی ۲۰۰ روزه با شرایط اولیه پیاده‌سازی شده است. اما این کاربرد به چند دلیل غیر دقیق است: مدل  $SIR$  مناسب برای کوید ۱۹ نمی‌باشد مدل اصلی یکی از ساده‌ترین مدل‌های اپیدمیولوژیک است و فرض می‌کند که اختلاط همگن بین جمعیت‌ها برقرار است، وضعیت فعلی افراد مستعد و آلوده به درستی مشخص نیست، پارامترهای خود بیماری نیز نامشخص هستند. مثال‌های این مقاله تنها باید به عنوان نتایجی از چند حالت ممکن و نه یک مطالعه جامع یا تفصیلی دیده شوند. البته باید اذعان داشت که نتایج حاصل از مدل کنترل  $SIR$  می‌تواند نقطه شروع برای مطالعه این نوع کنترل‌ها در مدل‌های پیچیده‌تر باشد. نتایج مطرح‌شده در این مقاله

<sup>16</sup>Bliman

<sup>17</sup>Runge-Kutta fourth-order

<sup>18</sup>Ketcheson

<sup>19</sup>Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

به این صورت است که قرنطینه بسیار قوی ممکن است منجر به موج دوم عفونت پس از برداشتن قرنطینه شود و از طرف دیگر قرنطینه‌ای که بسیار دیر شروع شود یا زود برداشته شود، ممکن است تأثیر ناچیزی بر مرگ و میر کل داشته باشد.

در مقاله‌ای دیگر با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین، کنترل بهینه برای کمینه‌کردن تعداد افراد آلوده ( $I$ ) و میزان واکسیناسیون به کار برده شده است؛ نیوموسنو<sup>۲۰</sup> و همکاران نشان دادند که کنترل پیشنهادی می‌تواند به منظور توسعه یک راهکار در حالت مورد نظر، ایده‌هایی را ارائه دهد [۴۵]. مدل پیشنهادی در این مقاله که از نوع پاندمیک است با اعمال جملات زیر در مدل  $SIR$  مطرح شده است:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \dots - \mu NV; \\ \dot{R}(t) &= \dots + \mu NV; \end{aligned} \quad (7.4)$$

که در آن واکسیناسیون به عنوان متغیر کنترلی  $V$  تعریف شده است و  $N$  معرف کل جمعیت می‌باشد. واضح است که براساس دنیای واقعی با اعمال واکسیناسیون به دسته افراد مستعد به بیماری ( $S$ ) از تعداد آن‌ها کم شده و به دسته افراد سالم ( $R$ ) اضافه می‌گردد که این مطلب در مدل ریاضی نمایان می‌باشد. همچنین در این مقاله به عنوان تابع هدف، کمینه‌کردن تعداد افراد عفونی و واکسیناسیون مدنظر قرار گرفته شده است:

$$J(I, V, t) = \int_{t_0}^{t_f} [\varphi_1 v(\tau)^2 + \varphi_2 I(\tau)^2] d\tau, \quad (8.4)$$

که در آن  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  وزن‌های متناظر با واکسیناسیون و تعداد افراد عفونی است؛ این وزن‌ها می‌توانند اطلاعات خاصی را در مورد هزینه‌ی واکسیناسیون، کمپین‌های واکسن و هزینه مرتبط با هر فرد آلوده را دربر بگیرند. در ادامه به منظور حل مسأله از اصل بیشینه پونتریاگین استفاده شده است. در این مقاله اندازه جمعیت به عنوان یک پارامتر مهم برای نشان دادن پایداری بیماری عفونی مورد بررسی قرار گرفته است. برای شبیه‌سازی مدل از روش مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای<sup>۲۱</sup> در محیط متلب استفاده شده است [۳۳]. ایده‌ی جالبی که در این مقاله استفاده شده است که مسأله در سه حالت بدون کنترل، با کنترل ثابت  $V_c = 0.4$  و واکسیناسیون توسط کنترل بهینه طراحی شده است. از شبیه‌سازی‌ها مشاهده می‌شود که در ابتدا هزینه‌ی کنترل بهینه نسبت به هزینه واکسیناسیون ثابت بالاتر است، اما به وضوح بعد از مدتی نرخ واکسیناسیون توسط کنترل بهینه کمتر از هزینه واکسیناسیون ثابت می‌باشد. خاطرنشان شود که این مقاله با مدل مطرح شده توسط لارابی و همکاران در اعمال کنترل [۴] مشابهت دارد، با این تفاوت که در این مقاله حالت کنترل ثابت نیز بررسی گردیده است.

اکبری و نوایی [۱]، یک مدل  $SIR$  ارائه دادند که در آن تعداد کل جمعیت مورد مطالعه ثابت در نظر گرفته شده است و هیچ مهاجرتی از داخل به خارج و یا برعکس از خارج به داخل انجام نگرفته است. در این مقاله به دو روش انتقال بیماری‌های عفونی اشاره شده است که عبارتند از: انتقال افقی (انتقال بیماری از طریق تماس مستقیم با شخص آلوده) و انتقال عمودی (انتقال عفونت از مادر به جنین در دوران قبل از زایمان و حین زایمان یا به نوزاد پس از زایمان) [۱۰]. سپس بیماری عفونی مورد مطالعه با انتقال از نوع افقی مطرح گردیده است. آن‌ها شرایط کاهش جمعیت افراد مستعد، آلوده و افزایش جمعیت افراد بهبودیافته را با استفاده از واکسیناسیون به عنوان متغیر کنترل  $u(t)$  مورد بررسی قرار داده‌اند. جملات مؤثر بر مدل و تابع هدف به شرح زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} J(U) &= \min \int_0^{t_f} \left[ A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{\gamma} (Cu)^2 \right] dt; \\ \dot{S}(t) &= \dots - muS; \\ \dot{R}(t) &= \dots + muS. \end{aligned}$$

که در آن  $t_f$  زمان نهایی و  $A_1 > 0$  و  $A_2 > 0$  وزن‌های ثابت از افراد مستعد و آلوده و  $C > 0$  ضریب وزن مرتبط با هزینه‌های واکسیناسیون هستند و  $m$  اثر واکسیناسیون می‌باشد. هدف از تعریف این مسأله، به دست آوردن کنترل بهینه

<sup>20</sup>Nepomuceno

<sup>21</sup>Two Point Boundary Value Problem



به‌طوری است که باعث کاهش افراد مستعد و آلوده در جامعه و کاهش هزینه‌های واکسیناسیون و افزایش افراد بهبودیافته در جامعه گردد.

در این مقاله بعد از معرفی مدل ریاضی انتقال بیماری عفونی به طریق افقی، نقاط تعادل، نرخ تکثیر پایه و پایداری مجانبی موضعی بررسی گردیده است و بعد از محاسبه کنترل بهینه با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین مسأله به‌صورت عددی مورد بحث قرار گرفته است. برای حل مسأله از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است. مسأله در دو حالت مختلف بدون کنترل و با کنترل در نظر گرفته شده است.

نتایج نشان می‌دهد که واکسیناسیون افراد مستعد و افزایش واکسیناسیون در جهت کنترل بیماری در جامعه، موجب افزایش افراد بهبودیافته و کاهش انتقال بیماری می‌شود. از این‌رو در پی این اتفاق تعداد افراد بیمار نیز کاهش می‌یابد و با گذشت زمان و تداوم در امر واکسیناسیون در جامعه و بین افراد مستعد، بیماری از بین خواهد رفت.

## ۲.۴ مدل‌های کنترل $SIR$ با دو متغیر کنترل

در دسته‌ای دیگر از مقالات با در نظر گرفتن دو متغیر کنترل، مدل  $SIR$  را از دیدگاه توانایی مهار بیماری عفونی مورد بررسی قرار داده‌اند. لدزویچ و شاتلر<sup>۲۲</sup> [۳۷] برای یک مدل  $SIR$  از نوع اپیدمیک، با در نظر گرفتن واکسیناسیون و درمان، بهینگی کنترل‌های منفرد را به‌صورت نظری بررسی کردند. در این مقاله دو راهبرد ممکن برای کنترل بیماری در نظر گرفته شده است که عبارتند از ایمن‌سازی افراد مستعد و درمان افراد آلوده که این دو توسط دو متغیر کنترل  $u$  و  $v$  نشان داده شده است؛ هر دو کنترل دسته افراد  $R$  را تقویت و بیشتر می‌کند و به‌صورت جملات زیر در مدل اعمال شده است:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \dots - Su; \\ \dot{I}(t) &= \dots - Iv.\end{aligned}$$

هدف در این مقاله تعیین بهترین راهکار از نظر تلاش‌های ترکیبی واکسیناسیون و درمان به‌طوری که تعداد افرادی که از عفونت از بین می‌روند به حداقل برسد. از این رو مسأله مورد نظر به عنوان یک مسأله کنترل بهینه از نوع مایر با تابع هدف زیر کمینه می‌شود:

$$J(u, v) = \int_0^T [aI(t) + bu(t) + cv(t)] dt; \quad (9.4)$$

در تابع فوق،  $a$ ،  $b$  و  $c$  به ترتیب وزن‌های متناظر با تعداد افراد عفونی، میزان واکسیناسیون افراد مستعد و میزان واکسیناسیون افراد آلوده می‌باشند. شرایط لازم بهینگی از اصل کمینه پونتریاگین به دست آورده شده است و با توجه به این که هامیلتونین نسبت به کنترل‌ها خطی است، مسأله کمینه‌سازی به دو مسأله یک بعدی جداگانه که به راحتی قابل حل هستند تبدیل شده است. سپس مسأله به مسأله‌ای کنترلی با ویژگی کنترل بنگ - بنگ تبدیل شده و با توجه به حالت کنترل‌های ثابت با مقادیر در نقاط انتهایی بازه‌های کنترل از نوع منفرد پدید آمده و در ادامه بهینگی محلی کنترل‌های منفرد بررسی گردیده است. در این مقاله فقط مدل ارائه شده است و شبیه‌سازی آن بررسی نگردیده است.

در همین راستا، یوسوف و بنیا<sup>۲۳</sup> [۹] یک مسأله کنترل بهینه با زمان نهایی ثابت را در نظر گرفتند و استدلال خود را از انتخاب زمان ثابت چنین بیان می‌کنند که اغلب دولت‌ها نمی‌توانند به‌طور نامحدود به اجرای مداخلات جهت کنترل بیماری ادامه دهند. بلکه می‌خواهند بیماری ریشه‌کن شده یا در زیر سطح مشخص شده‌ای در یک چارچوب زمانی معین قرار گیرد. برخلاف اکثر مقالات که در آن‌ها مدل اپیدمیک در نظر گرفته شده است، در این مقاله از مدل اندمیک استفاده شده است. در این مقاله به این سؤال پرداخته شده است که چطور واکسیناسیون و راهکارهای درمانی بهینه را ترکیب کنیم به طوری که هزینه اجرای این دو مداخله به حداقل برسد و بیماری در یک دوره مشخص ریشه‌کن شود. همچنین برخلاف بیشتر مقالات که اندازه جمعیت ثابت در نظر گرفته شده است، در این مقاله از اندازه جمعیت متغیر (گرایش به حد) استفاده شده است که واقعی‌تر است. با در نظر گرفتن  $u_1(t)$  به عنوان افرادی از دسته  $S$  که در واحد زمان واکسینه می‌شوند و

<sup>22</sup>Ledzewicz and Schattler

<sup>23</sup>Yusuf and Benyah

$u_2(t)$  افرادی از دسته  $I$  که در واحد زمان درمان می‌شوند، مدل  $SIR$  به فرم کنترلی زیر:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dots - u_1 S; \\ \dot{I} &= \dots - u_2 I; \\ \dot{R} &= \dots + u_1 S + u_2 I. \end{aligned} \quad (10.4)$$

با هدف کمینه کردن

$$I(t) + \frac{1}{\gamma} \int_0^T (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2) dt; \quad (11.4)$$

مبدل شده است. در این مدل هدف مشخص کردن کنترل‌های قابل قبولی است که هزینه واکسیناسیون و درمان را در طول بازه زمانی مشخص کمینه کرده و همچنین تعداد افراد  $I$  را در پایان زمان درمان کمینه کند که در آن  $c_1$  و  $c_2$  وزن‌های نسبی وابسته به هزینه واکسیناسیون و درمان هستند؛ این وزن‌ها به اهمیت نسبی هر یک از معیارهای کنترل در کاهش گسترش بیماری و همچنین هزینه اجرای هر واحد آن‌ها بستگی دارد.

در ادامه مقاله، ضمن بررسی پایداری مدل نشان داده می‌شود که چگونه با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین و یک حدس اولیه برای کنترل بهینه، معادله شبیه‌سازی می‌شود و دستگاه حالت حاصل با استفاده از روش پیشرو و هم‌زمان معادلات هم‌حالت با استفاده از روش پسرو حل می‌گردد. براساس نتایج حاصل در ابتدا باید از واکسیناسیون برای کاهش دسته افراد  $S$  تا آستانه معین استفاده شود؛ سپس به تدریج شروع به اعمال درمان بیشتر و از واکسیناسیون کمتر استفاده گردد. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد در مواردی که واکسیناسیون گران‌تر از درمان است، منابع باید در درمان بیماری تا زمان شروع شیوع بیماری سرمایه‌گذاری شود. از سوی دیگر اگر درمان گران‌تر از واکسیناسیون باشد، باید منابع بیشتری در واکسیناسیون قرار داده شود که این امر منجر به کاهش سریع  $S$  و کاهش قابل توجه  $I$  می‌شود [۹].

در تلاشی دیگر بیکر<sup>۲۴</sup> و همکاران [۵] نیز یک مدل  $SIR$  اپیدمیک با دو متغیر کنترل ارائه دادند. در این تحقیق مدل  $SIR$  که با اندازه جمعیت متغیر در نظر گرفته شده و برای کاهش پیچیدگی مسأله، معادلات بدون بعد مدل بیماری همه‌گیر  $SIR$  استخراج شده است. سپس با اعمال دو متغیر کنترل  $u_1$  به عنوان کسری از دسته  $I$  که در واحد زمان درمان شده‌اند و  $u_2$  کسری از دسته افراد  $S$  که در اثر راهکارهای آموزشی در واحد زمان درمان شده‌اند، جملات به صورت زیر به مدل اضافه شده است:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dots - u_2 S(t); \\ \dot{I} &= \dots - u_1 I(t); \\ \dot{R} &= \dots + u_1 I(t) + u_2 S(t). \end{aligned} \quad (12.4)$$

تابعی هدف مدل به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T \left( A_1 I_n + A_2 \frac{u_1^2}{\gamma} + A_3 \frac{u_2^2}{\gamma} \right); \quad (13.4)$$

که در آن  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  پارامترهای وزنی هستند و اهمیت جملات در تابعی را مشخص می‌کنند. در ادامه وجود کنترل بهینه با شرایط مطرح شده اثبات گردیده و شرایط لازم آن با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین به دست آمده است. آنگاه پیاده‌سازی عددی از روش پیشرو - پسرو انجام گرفته و مشاهده شده است که جمعیت مستعد  $S$  با راهکار کنترل از روز اول شروع بیماری کاهش می‌یابد؛ در حالی که جمعیت افراد  $R$  از روز اول بعد از واکسیناسیون افزایش می‌یابد. اما در ادامه درمان جمعیت  $S$  پایدار شده و بیماری در پایان دوره درمان از بین می‌رود. همچنین نتایج نشان داده‌اند که در دوره اعمال کنترل بهینه، پیشگیری و درمان تأثیر زیادی بر بیماری دارد. وقتی که کنترل کمپین آموزشی در جمعیت معرفی شد، نسبت افراد بهبودیافته افزایش می‌یابد که این تأثیر عملکرد آموزشی بر جمعیت را نشان می‌دهد.

لاشاری<sup>۲۵</sup> در [۳۶] نیز با در نظر گرفتن یک مدل بیماری  $SIR$  اپیدمی‌ک راهکارهای کنترل بهینه در قالب درمان و واکسیناسیون برای کاهش تعداد افراد  $S$ ،  $I$  با حداقل سرمایه‌گذاری در کنترل بیماری را ارائه داده است. او برای این کار، دو کنترل  $u_1(t)$  (واکسینه کردن افراد  $S$ ) و  $u_2(t)$  (درصد درمان  $I$  با نرخ متناسب) را در نظر گرفته است. هدف نیز به حداقل رساندن تعداد افراد  $S$ ،  $I$  با حداقل هزینه در فاصله زمانی محدود در نظر گرفته شد و از ثابت‌های وزنی برای ایجاد تعادل در تابع هدف استفاده شده است.

هزینه مربوط به کنترل اول ناشی از هزینه داروهای ضد میکروبی و هزینه کنترل دوم ناشی از درمان افراد آلوده است. برای حل مسأله کنترل بهینه مرتبط از اصل بیشینه پونت‌ریاگین استفاده شده است. قبل از استخراج جواب بهینه و اثبات وجود کنترل بهینه برای دستگاه، ابتدا مدل با در نظر گرفتن کنترل‌های ثابت تحلیل شده است؛ با فرض ثابت بودن پارامترهای کنترل، جواب‌های حالت پایدار و پایداری آن‌ها نیز با استفاده از قضایای پایداری و رفتار انشعاب تعیین شده است. در ادامه وجود کنترل بهینه برای دستگاه مورد مطالعه اثبات و سپس دستگاه بهینگی با استفاده از روش رونگه کوتای مرتبه چهارم حل شده است [۲۲]. آنگاه راهکار بهینه با حل دستگاه‌های الحاقی و حالت و شرایط مرزی به دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد که واکسیناسیون و درمان، تأثیر مثبتی بر کنترل انتقال بیماری دارند [۳۶]. تغییرات مدل  $SIR$  در این حالت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dots - u_1 S; \\ \dot{I} &= \dots - \frac{(r + r \cdot u_2) I}{1 + \alpha I}; \\ \dot{R} &= \dots \frac{(r + r \cdot u_2) I}{1 + \alpha I} + u_2 S. \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

جمله‌ای که از معادله دوم کم و به معادله سوم اضافه شده، مشهور به تابع درمان است که در آن  $r$  نرخ درمان،  $r_0$  ثابت نرخ درمان و  $\alpha$  مقداری مثبت است که اثر آلودگی در تأخیر درمان را تعیین می‌کند. علاوه بر این  $\frac{1}{1 + \alpha I}$  اثر معکوس تأخیر در مبتلا شدن را معرفی می‌کند. هدف از این نوع درمان نیز به حداقل رساندن تعداد افراد  $S$  و  $I$  با حداقل هزینه در فاصله زمانی محدود به صورت زیر است:

$$F(u_1, u_2) = \int_0^T \left( A_1 S_n + A_2 I_n + \frac{1}{\gamma} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \right) dt; \quad (۱۵.۴)$$

که در آن ثابت‌های وزنی  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $B_1$  و  $B_2$  ثابت‌های وزنی هستند. یادآوری می‌شود که هزینه مربوط به کنترل اول ناشی از هزینه داروهای ضد میکروبی و هزینه کنترل دوم ناشی از درمان افراد آلوده است.

در تحقیق [۴۷] که به بررسی و تدوین مدل  $SIR$  اندمیک پرداخته شده است، مسأله کنترل بهینه با درمان و واکسیناسیون به طریق دیگری قالب‌بندی شده است. در این مقاله شرایط پایداری مدل  $SIR$  در حالتی بررسی شده که اندازه جمعیت ثابت در نظر گرفته شده است. این در حالی است که عملکرد تابع هدف، کاهش تعداد افراد دسته  $I$  در دوره کنترل به سطحی است که در آن بیماری ریشه‌کن شده و از بین می‌رود. انتظار بر این است که کنترل در بازه‌ی بسته  $[0, 1]$  مقدار بگیرد جایی که؛ کنترل صفر به معنی حالت بدون کنترل و کنترل ۱ به این معنی است که تمام افراد  $I$  واکسینه و تحت درمان قرار می‌گیرند. در ادامه جفت کنترل  $[u_1^*, u_2^*]$  براساس اصل بیشینه پونت‌ریاگین با زمان ثابت نهایی و زوج بهینه  $(S^*, I^*)$  مشخص خواهد شد. شبیه‌سازی عددی با استفاده از نرم افزار *Maple*، بر پایه شرایط انجام گرفته است و نمودار مسیرهای با کنترل و بدون کنترل بررسی شده‌اند. براساس بررسی‌ها اگر  $R \leq 1$  باشد بیماری ریشه‌کن و اگر  $R \geq 1$  بیماری ادامه می‌یابد؛ جایی که در آن،  $R$  عدد تکثیر پایه می‌باشد، که به عنوان میانگین تعداد عفونت‌های ثانویه‌ی تولید شده توسط یک فرد آلوده در یک جمعیت مستعد تعریف می‌شود. جملات مؤثر بر مدل و تابع هدف به شرح

زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{u_1, u_2} I(T) + \frac{1}{\gamma} \int_0^T (w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2) dt, \\ s.t.: & \dot{S} = \dots - u_1 S; \\ & \dot{I} = \dots - u_2 I; \\ & \dot{R} = u_2 I. \end{aligned}$$

در اینجا  $u_1$  نسبتی از  $S$  است که در واحد زمان واکسینه می‌شوند و  $u_2$  نسبتی از  $I$  که در واحد زمان درمان می‌گردند. همچنین  $w_1$  و  $w_2$  به ترتیب وزن‌های مرتبط با هزینه‌های واکسیناسیون و درمان هستند.

کمت<sup>۲۶</sup> و کمتوا<sup>۲۷</sup> در سال ۲۰۱۹ میلادی یک مسأله کنترل بهینه با دو متغیر کنترل در بیماری همه‌گیر با مدل  $SIR$  جهت به حداقل رساندن تعداد افراد مستعد و آلوده به بیماری را معرفی کردند که به صورت مسأله کنترل بهینه غیرخطی بود. در این مدل دسته افراد مستعد بیماری قبل از عفونت تحت کنترل  $u_1(t)$  واکسن دریافت می‌کنند و کنترل  $u_2(t)$  برای واکسن دریافتی افراد بیمار در نظر گرفته شده است [۳۴]. تغییرات مدل به صورت زیر نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dots - u_1(t) S(t); \\ \dot{I} &= \dots - u_2(t) I(t); \\ \dot{R} &= \dots + u_1(t) S(t) + u_2(t) I(t). \end{aligned}$$

تابع هدف مدل نیز به صورت زیر مطرح گردیده است:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( a_1 S(t) + a_2 I(t) + \frac{\varepsilon_1}{\gamma} u_1(t)^2 + \frac{\varepsilon_2}{\gamma} u_2(t)^2 \right) dt.$$

که در آن  $\varepsilon_1$ ،  $\varepsilon_2$ ،  $a_1$ ،  $a_2$  ثابت‌های مثبت نشان‌دهنده وزن اهداف در تابع هدف می‌باشند. در ادامه مقاله شرایط لازم و کافی بهینگی و تحلیل پایداری مدل مطرح شده است. سپس برای تعیین کنترل بهینه به روش مستقیم از دو الگوریتم علف‌های هرز<sup>۲۸</sup> و بهینه‌سازی ازدحام ذرات<sup>۲۹</sup> استفاده شده است [۴۲] و [۲۹]. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد که تعداد افراد مستعد  $S$  و تعداد افراد بیمار  $I$  پس از اعمال درمان کنترل بهینه کاهش می‌یابند و حتی تعداد کمی از افراد در دسته  $I$  باقی می‌مانند. خاطر نشان شود که این مقاله از روش غیرمستقیم و براساس اصل بیشینه پونت‌ریاگین نیز مسأله حل شده است. همچنین شبیه‌سازی‌های مختلف نشان می‌دهد که مقادیر تابع هدف برای شرایط اولیه مختلف یکسان است اما زمان انجام شبیه‌سازی‌ها متفاوت است و زمان محاسبات برای روش مستقیم طولانی‌تر از محاسبات به روش غیرمستقیم است.

### ۳.۴ مدل $SIR$ با چهار عامل کنترل

براساس بررسی‌های انجام شده یک مدل کنترل  $SIR$  اپیدمیک با چهار سیاست کنترل متمایز که شامل واکسیناسیون نوزادان، واکسیناسیون افراد مستعد، جداسازی افراد آلوده و سیاست غیر مستقیم مانند آموزش، قرنطینه و غیره با هدف کاهش انتقال در نظر گرفته شده است. در این مقاله دو متغیر کنترل متناظر با واکسیناسیون نوزادان و افراد مستعد بیماری، بر دسته افراد مستعد  $S$  و افراد بهبودیافته اعمال شده است؛ متغیر کنترل متناظر با جداسازی افراد آلوده نیز بر دسته معادلات  $I$  و  $R$  اعمال شده است همچنین متغیر کنترل متناظر با سیاست غیرمستقیم بر دسته معادلات  $S$ ،  $I$  و  $R$  اعمال شده‌اند. برای تعیین جواب بهینه از اصل بیشینه پونت‌ریاگین استفاده شده و نشان داده شده است که کنترل‌های بهینه مسأله از نوع بنگ - بنگ هستند؛ سپس حداکثر تعداد ممکن سویچ کنترل‌ها تخمین زده شده و انواع ممکن کنترل بهینه به دست آورده شده است. هدف برای دستگاه کنترل مورد نظر به حداقل رساندن سطح دسته  $I$  در زمان نهایی می‌باشد. با

<sup>26</sup>Kmet

<sup>27</sup>Kmetova

<sup>28</sup>invasive weed optimisation

<sup>29</sup>particle swarm optimisation

تخمین حداکثر تعداد سویچ‌های کنترل، مسأله کنترل بهینه به یک مسأله ساده‌تر از بهینه‌سازی دو بعدی کاهش می‌یابد که در ادامه به صورت عددی حل شده است. در این مقاله نتایج به حداقل رساندن سطح بیماری عفونی در یک بازه زمانی معین به دست آمده است. نتیجه‌ای که از تحلیل مقاله به دست می‌آید، این است که واکسیناسیون نوزادان و دسته افراد مستعد باید به طور هم‌زمان انجام شود؛ در نتیجه می‌توان این دو کنترل را به عنوان یک کنترل در نظر گرفت. علاوه بر این، براساس بررسی نتایج، واکسیناسیون و جداسازی افراد عفونی غیر مرتبط با هم هستند. به عبارت دیگر، اجرای هر یک از این دو کنترل مستقل از پیاده‌سازی نوع دیگر است و در نتیجه هر یک از این انواع کنترل را می‌توان مستقل از نوع دیگر در نظر گرفت [۲۱]. اعمال کنترل بر مدل و هدف مسأله به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(u, v, w, z) &= I(T) \\ \dot{S}(t) &= \dots - \mu u(t) - \mu w(t) S(t) - (\lambda + v(t)); \\ \dot{I}(t) &= \dots + (\lambda + v(t)) - \mu z(t) I(t); \\ \dot{R}(t) &= \dots + \mu u(t) + \mu w(t) S(t) + \mu z(t) I(t) \end{aligned} \quad (۱۶.۴)$$

که در آن  $u(t)$ ،  $w(t)$ ،  $z(t)$  و  $v(t)$  به ترتیب متغیرهای کنترل متناظر با واکسیناسیون افراد تازه متولد شده، واکسیناسیون افراد مستعد بیماری، شباهت‌سازی، جداسازی افراد بیمار و سیاست غیرمستقیم مانند آموزش، قرنطینه و غیره می‌باشد. همچنین در این مدل فرض می‌شود که تولد و مرگ با نرخ سرانه  $\mu$  رخ می‌دهد.

## ۵ مدل تأخیر زمانی *SIR*

در مقاله [۲۷]، یک مدل کنترل بیماری همه‌گیر (اپیدمیک) با تأخیر زمانی برای جلوگیری از گسترش بیماری با استفاده از راهکارهای درمانی بهینه در نظر گرفته شده است. برای انجام این کار ابتدا یک متغیر کنترل معرفی شده است که نشان‌دهنده درمان بهینه برای میزبان‌های عفونی است و یک دستگاه معادلات کنترل بهینه برای مدل اپیدمی *SIR* تنظیم شده است. سپس تعداد تولید اولیه را به دست آورده و رفتار پویای مدل کنترل شده *SIR* بررسی گردیده است. علاوه بر این، وجود کنترل بهینه برای این مسأله نشان داده شده و در ادامه مشاهده می‌شود که عفونت در جامعه با استفاده از روش کنترل بهینه نمی‌تواند از بین رود. همچنین کنترل بهینه و بهینگی دستگاه، با استفاده از روش‌های کنترل بهینه بررسی گردیده است. نتیجه راهکار کنترل بهینه در این مقاله به این صورت است که تعداد افراد بیمار  $I$  کاهش و تعداد افراد سالم و بهبودیافته افزایش می‌یابد.

در این مقاله با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین و روش‌های عددی مناسب، یک مسأله کنترل بهینه با تأخیر زمانی برای مدل همه‌گیر *SIR*، به منظور کنترل گسترش بیماری تنظیم گردیده است. هدف اصلی، بررسی یک راهکار درمانی مؤثر برای کنترل بیماری‌های عفونی است، به این معنی که یک مدل ایجاد شود که حداکثر تعداد افراد آلوده، از افراد مستعد و سالم بیشتر نباشد. برای این منظور یک مدل *SIR* با تأخیر زمانی [۵۴] در نظر گرفته شده است که جملات مؤثر بر مدل و تابع هدف مورد نظر به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} J(u) &= \text{Min} \int_0^T \left[ I(t) + \frac{\varepsilon u^2(t)}{\gamma} \right] dt, \\ \dot{S}(t) &= \dots + wu(t) \frac{I(t)}{N(t)}; \\ \dot{I}(t) &= \dots - u(t) \frac{I(t)}{N(t)}; \\ \dot{R}(t) &= \dots + (1 - w) u(t) \frac{I(t)}{N(t)}. \end{aligned} \quad (۱.۵)$$

داده‌های واقعی به دست آمده نشان می‌دهند که در صورت تأخیر زمانی کوچک به مقدار زیادی از متغیر کنترل نیاز داریم در حالی که برای تأخیر زمانی بزرگ متغیر کنترل کاهش می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که با معرفی تأخیر زمانی و

کنترل بهینه در یک مدل  $SIR$ ، می‌توان تأثیر عمیقی بر حذف بیماری‌های عفونی داشت و تعداد افراد آلوده پس از درمان از طریق مدل  $SIR$  کمتر از افراد آلوده قبل از درمان خواهد بود [۲۷].

در مقاله [۱۷] از طریق مدل  $SIR$  اپیدمیک، راهکار کنترل با تأخیر زمانی در متغیرهای کنترل و حالت بررسی شده است، در مقاله مفروض از برنامه واکسیناسیون برای به حداقل رساندن تعداد افراد  $S$  و  $I$  و به حداکثر رساندن تعداد افراد  $R$  استفاده شده است. برای توصیف کنترل بهینه از اصل بیشینه پونت‌ریاگین استفاده و دستگاه شرایط بهینگی حاصل با استفاده از روش گسسته‌سازی مبتنی بر تفاضل پیشرو و پسرو حل شده است. شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از داده‌های مربوط به دوره آنفولانزای خوکی در مراکش انجام شده است. کنترلی که به کار رفته به معنی درصد افراد مستعد  $S$  واکسینه‌شده در واحد زمان است و تأخیر زمانی نشان‌دهنده میزان زمان مورد نیاز است تا فرد حساس واکسینه شود. هدف به حداقل رساندن سطح افراد مستعد و آلوده ( $S$  و  $I$ ) و حداکثر کردن افراد  $R$  است.

به منظور داشتن یک مدل واقعی، این مطلب باید در نظر گرفته شود که افراد مستعد واکسینه‌شده از دسته  $S$  به  $R$  منوط به تأخیر است؛ بدین صورت که؛ در زمان  $t$  فقط درصدی از افراد  $S$  واکسینه شده‌اند که مدت زمان واکسینه‌شده برابر  $\tau$  است. به این معنی که در زمان  $t - \tau$  این افراد از دسته  $S$  به  $R$  منتقل می‌شوند. وجود کنترل بهینه براساس نتایج مطرح شده در [۱۹] بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که راهکار کنترل پیشنهادی مؤثر است:

$$J(u) = \min \int_0^{t_f} \left\{ A_1 S(t) + A_2 I(t) - A_3 R(t) + \frac{A_4}{\gamma} U^2(t) \right\} dt, \quad (2.5)$$

$$\dot{S}(t) = \dots - u(t - \tau) S(t - \tau);$$

$$\dot{R}(t) = \dots + u(t - \tau) S(t - \tau).$$

در مقاله [۸] تأثیر کنترل بهینه بر مدل  $SIR$  با تأخیر زمانی در نظر گرفته شده است؛ ایده‌ی اصلی، کنترل بهینه بیماری‌های اپیدمیک به منظور جستجو در میان راهکارهای موجود به صورتی است که بیشترین میزان عفونت را به حداقل برساند در حالی که هزینه به کارگیری واکسن درمانی و پیشگیری که برای کنترل بیماری استفاده می‌شود را نیز بهینه کند. دو راهکار کنترل که شامل واکسیناسیون  $u_1(t)$  و درمان  $u_2(t)$  می‌باشند در نظر گرفته شده است. برای این منظور ابتدا مدل کنترل بهینه مطرح، وجود کنترل بهینه اثبات و سپس نقطه تعادل دستگاه تعیین گردیده است. آنگاه شرایط لازم مرتبه اول برای تعیین کنترل بهینه از طریق ایجاد همیلتونین و استفاده از اصل بیشینه پونت‌ریاگین برای رسیدن به هدف مورد نظر تعیین گردیده است. برای شبیه‌سازی از گسسته‌سازی و یک روش عددی اویلر استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که بدون واکسیناسیون، بسیاری از افراد در معرض بیماری قرار دارند در حالی که اعمال واکسن تا حد بسیار زیادی از تعداد افراد دسته  $I$  می‌کاهد. صورت کلی معادلات مدل چنین است:

$$\dot{S}(t) = \dots - u_1 S; \quad (3.5)$$

$$\dot{I}(t) = \dots - u_2 I.$$

در تحقیق [۱۶] با استفاده از آمار همه‌گیری کرونا در ایالات متحده آمریکا در طول دوره واسنجی، پارامترهای نرخ بروز و نرخ بازیافت با استفاده از خوارزمی رگرسیون خطی برازش داده شده‌اند. مدل مطرح‌شده با تأخیر زمانی و اثربخشی، دو راهکار کنترل واکسیناسیون و قرنطینه اجتماعی در مهار بیماری همه‌گیر کرونا را مورد ارزیابی و بررسی قرار می‌دهد. برای تعیین جواب ابتدا دستگاه نرمال‌سازی می‌شود و نقطه تعادل آن بررسی می‌گردد. خاطر نشان شود که براساس راهکار کنترل بهینه ارائه شده در [۲، ۵۱] تأثیر واکسیناسیون کوید ۱۹ و قرنطینه اجتماعی مداوم در طی اپیدمی شیوع کوید ۱۹ بررسی شده است. بنابر تحقیقات انجام شده، ۴ نوع واکسن کوید ۱۹ توسط سازمان بهداشت جهانی برای استفاده اضطراری در اثربخشی و ایمنی مورد ارزیابی قرار گرفته است؛ نتایج نشان داده که هر چهار واکسن ایمن هستند. براساس مطالعات، باید توجه داشت که گرچه قرنطینه اجتماعی برای مهار گسترش کوید ۱۹ مؤثر است، اما باید به این نکته توجه داشت که قرنطینه اجتماعی طولانی مدت می‌تواند تأثیر منفی زیادی بر سرزندگی جامعه داشته باشد. مدل ریاضی این فرایند عبارت



است از:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \int_{t_0}^{t_f} \left[ B_1 l(t) + \frac{B_1}{\gamma} (f u_1(t))^2 + \frac{B_2}{\gamma} (u_2(t))^2 \right] dt, \\ & \dot{S}(t) = \dots - \beta (1 - u_2(t)) S(t) - f u_1(t) S(t); \\ & \dot{I}(t) = \dots + \beta (1 - u_2(t)) - f u_1(t) S(t); \\ & \dot{R}(t) = \dots + f u_1(t) S(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

در این تحقیق هدف به حداقل رساندن جمعیت  $I$  و کاهش خسارت اقتصادی ناشی از اجرای اقدامات کنترلی در طول گسترش کوید ۱۹ است. برای حل مسأله کنترل بهینه از روش جاروب پیشرو - پسرو استفاده شده است. خوارزمی مربوط با یک حدس اولیه برای متغیر کنترل شروع و دستگاه حالت را حل می‌کند؛ سپس به روزرسانی کنترل بهینه انجام می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود تا همگرایی مورد نظر برآورده شود. در این مقاله تحلیل کنترل بهینه در سه حالت با سه معیار در نظر گرفته شده است که عبارتند از: معیار واکسیناسیون پیشگیرانه، معیار قرنطینه اجتماعی و ادغام هر دو معیار. در شبیه‌سازی عددی راهکار کنترل بهینه، نشان داده شده است که واکسیناسیون با قرنطینه اجتماعی مناسب یک مهار مؤثر برای جلوگیری از اپیدمی است.

## ۶ مدل تصادفی SIR

بر اساس بررسی‌های انجام گرفته فقط یک مقاله موجود است که مدل قطعی و تصادفی را هم‌زمان بررسی کرده است [۲۰]. در این مقاله برای قالب‌بندی از مدل قطعی استفاده شده است و سپس مدل تصادفی بر اساس مدل قطعی طراحی گردیده است. آنگاه حل مدل  $SIR$  کنترل بهینه تصادفی با استفاده از اصل بیشینه تصادفی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در واقع فرض بر این است که یک مؤلفه مهم در یک زیست‌بوم به‌طور اجتناب‌ناپذیری تحت تأثیر اختلالات محیطی قرار می‌گیرد. فرض شده است که این اختلالات با تغییر پارامتر (که در مدل  $SIR$  بیان شده است) به صورت زیر نشان داده شوند:

$$\beta \rightarrow \beta + \varepsilon \eta(t)$$

که در آن  $\varepsilon$ ،  $\eta(t) \sim N(0, 1)$  شدت نویز سفید<sup>۳۰</sup> و  $dW(t) = \eta(t) dt$  است، همچنین  $W(t)$  فرایند وینر استاندارد<sup>۳۱</sup> با  $W(0) = 0$  و  $\varepsilon^2 > 0$  است. بر این اساس مدل تصادفی با استفاده از روش آشفته‌گی پارامتر طراحی شده است و برای این منظور یک دستگاه معادلات پویای غیرخطی برای مدل همه‌گیر  $SIR$  در نظر گرفته شده است که دو کنترل وابسته به زمان برای برنامه واکسیناسیون  $u_1(t)$  و درمان افراد عفونی  $u_2(t)$  را دربر دارد. مدل قطعی این فرایند عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \int_0^{t_f} \left( A_1 I(t) + A_2 \frac{u_1^2(t)}{\gamma} + A_3 \frac{u_2^2(t)}{\gamma} \right) dt; \\ & \dot{S}(t) = \dots - u_1(t) \varphi S(t); \\ & \dot{I}(t) = \dots - u_2(t) \gamma I(t); \\ & \dot{R}(t) = \dots + u_1(t) \varphi S(t) + u_2(t) \gamma I(t), \end{aligned}$$

و در ادامه مدل تصادفی مطرح گردیده است:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \frac{1}{\gamma} E \int_0^{t_f} \left( A_1 I(t) + A_2 \frac{u_1^2(t)}{\gamma} + A_3 \frac{u_2^2(t)}{\gamma} \right) dt + k_1 S^2 + k_2 I^2; \\ & \dot{S}(t) = \dots - u_1(t) \varphi S(t) - \varepsilon S(t) I(t) dW(t); \\ & \dot{I}(t) = \dots - u_2(t) \gamma I(t) + \varepsilon S(t) I(t) dW(t); \\ & \dot{R}(t) = \dots + u_1(t) \varphi S(t) + u_2(t) \gamma I(t), \end{aligned}$$

<sup>30</sup>White noise

<sup>31</sup>Standard Wiener

که در آن  $\varphi$  میزان واکسیناسیون افراد مستعد،  $\gamma$  میزان نرخ بهبودی و  $A_1, A_2, A_3, k_1, k_2, k_3$  ضرایب مثبت وزنی می‌باشند. برای یافتن جواب بهینه پس از تعیین لاگرانژین و هامیلتونین، به شبیه‌سازی مدل قطعی و تصادفی پرداخته شده است. در شبیه‌سازی مشاهده می‌شود که منحنی هزینه در هر دو مدل قطعی و تصادفی شبیه به هم هستند با این تفاوت که تابع هزینه مدل تصادفی کمتر از تابع هزینه مدل قطعی است. همچنین اعمال کنترل در هر دو مدل بررسی شده است و نتایج نشان می‌دهد که اعمال کنترل تأثیر زیادی بر کاهش بیماری عفونی دارد و از تعداد افراد دسته  $I$  کم کرده و به افراد بهبودیافته اضافه می‌کند.

## ۷ مدل گسسته زمانی

زاکاری و همکاران یک مدل گسسته زمانی  $SIR$  برای توصیف گسترش بیماری‌های عفونی در مناطق جغرافیایی مختلف طراحی کردند که نشان می‌دهد افراد آلوده به بیماری با جابه‌جایی از یک منطقه به منطقه دیگر می‌توانند بیماری را گسترش دهند. برای این منظور پیشنهاد شده است که سیاست‌گذاران سلامت می‌توانند با سازماندهی بسیاری از مراکز واکسیناسیون و یا با پیشنهاد راهکارهای دفاعی دیگر مانند مسدود کردن حرکت مردم از مرز مناطق، خطر آلودگی بالای بیماری را مدیریت کنند [۵۵]. برای این منظور دو متغیر کنترل واکسیناسیون  $u_i^{\Omega_j}$  و مسدود کردن سفر  $v_i^{j\Omega_k}$ ، به میزان اثربخشی عملیات که در آن‌ها  $j$  مبین ناحیه‌ها یا مناطق و  $\Omega_j$  تقسیم مناطق به قسمت‌های مختلف هستند، در نظر گرفته شده‌اند. مدل پیشنهادی عبارت است از:

$$J_j(u^{\Omega_j}, v^{j\Omega_k}) = \left( \alpha_j^I I_N^{\Omega_j} - \alpha_j^R R_N^{\Omega_j} \right) + \sum_{k \in I_H} \sum_{i=l}^{N-l} \left( \alpha_j^I I_N^{\Omega_j} - \alpha_j^R R_N^{\Omega_j} + \frac{A_j}{\gamma} (u_i^{\Omega_j})^2 + \frac{B_k}{\gamma} (v_i^{j\Omega_k})^2 \right),$$

$$S_{i+1}^{\Omega_j} = S_i^{\Omega_j} - \sum_{k=1}^p v_i^{j\Omega_k} \beta_{jk} \frac{I_i^{\Omega_k}}{N_i^{\Omega_j}} S_i^{\Omega_j} + \left( N_i^{\Omega_j} - S_i^{\Omega_j} \right) d_j - u_i^{\Omega_j} S_i^{\Omega_j};$$

$$I_{i+1}^{\Omega_j} = I_i^{\Omega_j} + \sum_{k=1}^p v_i^{j\Omega_k} \beta_{jk} \frac{I_i^{\Omega_k}}{N_i^{\Omega_j}} S_i^{\Omega_j} - \gamma_j I_i^{\Omega_j} - d_j I_i^{\Omega_j};$$

$$R_{i+1}^{\Omega_j} = R_i^{\Omega_j} + \gamma_j I_i^{\Omega_j} - d_j R_i^{\Omega_j} + u_i^{\Omega_j} S_i^{\Omega_j}.$$

هدف کمینه‌کردن دسته افراد  $I$ ، کمینه کردن هزینه کنترل و افزایش تعداد افراد دسته  $R$  می‌باشد و شرط لازم و کافی کنترل بهینه با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین مطرح شده است. در این مقاله که ابتدا وجود کنترل  $u_i^{\Omega_j}$  در آن اثبات شده، با توجه به این‌که فرایند بهینگی گسسته با استفاده از روش تکراری حل می‌شوند، نتایج عددی با استفاده از روش جاروب پیش‌رو-پس‌رو کارایی واکسیناسیون را نشان می‌دهد. اما با توجه به این‌که منطقه مورد نظر هنوز به میزان آلودگی در نواحی مجاور خود در معرض خطر بالا هستند، حساس است، در ادامه مدل با اضافه شدن متغیر کنترل نقاط سفر ممنوع که با  $v_i^{j\Omega_k}$  نشان داده شده است، بررسی گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که مسدود کردن سفر برای جلوگیری از کاهش بیماری موفقیت‌آمیز بوده است زیرا که تعداد افراد بیمار در این حالت کاهش یافته است.

## ۸ مواردی دیگر (جهت تحقیقات آتی)

بر اساس جستجوها و بررسی‌های انجام شده مشاهده گردید که تعدادی از مقالات گرچه موضوع خود را در قالب  $SIR$  مطرح کردند اما با مطالعه آن‌ها متوجه شدیم که مدل به کاربرده آن‌ها از نوع دینامیک  $SI$  می‌باشد که متفاوت با  $SIR$

است. در مدل  $SI$  فرض بر این است که دسته افراد بهبودیافته مجدد به بیماری مبتلا نمی‌شوند در حالی که مدل  $SIR$  چنین نیست. برای آگاهی بیشتر خوانندگان محترم به عنوان نمونه می‌توانند منابع [۶، ۱۳-۱۵، ۲۵، ۵۶، ۵۷] را بنگرند. مرور بر کارهای تحقیقی انجام گرفته در مورد بیماری‌های عفونی واگیردار بر مبنای کاربرد مدل  $SI$  می‌تواند یکی از موضوعات آتی تحقیق باشد. همچنین نگاه عمیق‌تر به مشتقات کسری و حالت‌های فازی در بیماری‌های واگیردار از موارد جذاب جهت پژوهش هستند.

## ۹ نتیجه‌گیری

نظر به تنش‌های فراوان جامعه در سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۰ بر اثر بیماری کرونا که از نوع بیماری‌های واگیردار است، بر آن شدیم که مروری داشته باشیم بر مقالات مطرح شده در زمینه اعمال کنترل بهینه در مدل‌های ریاضی  $SIR$  که توصیف‌کننده بیماری‌های همه‌گیر در جامعه هستند. در این تحقیق بر تأثیر کنترل بهینه در مدل‌های اپیمولوژی اشاره‌ای داشتیم. مشخص گردید که در تلاش‌های انجام گرفته، اعمال کنترل بهینه برای پیشگیری و کنترل بیماری‌های عفونی مختلف بسیار مفید بوده است. مشاهده گردید که راهکارهای مهار اعم از جداسازی (قرنطینه)، واکسیناسیون، فاصله اجتماعی، مناطق ممنوع و راهکارهای ترکیبی پیشنهادی به صورت بهینه بسیار مفید و حتی راهگشا هستند. علاوه بر این، اعمال کنترل بهینه، توانسته است جدا از ارائه راهکار مهار پیشرفت این دسته بیماری‌ها، در هزینه‌های اقتصادی، اعمال فاصله اجتماعی و استفاده از واکسن با هدف جلوگیری از رشد بیماری در جامعه همراه با کاهش هزینه بسیار موفق عمل کند. خاطرنشان شود که در دنیای واقعی همیشه اطلاعات قبلی از تعداد افراد مستعد به بیماری، افراد عفونی و بهبودیافته برای فرمول‌بندی و حل مسأله کنترل بهینه وجود ندارد، به همین دلیل از واکسیناسیون ثابت به عنوان روش بهبود و جلوگیری از پیشرفت بیماری استفاده می‌شود که این روش برای دولت‌ها بسیار پرهزینه است و فشارهای اقتصادی فراوانی را برای دولت‌ها دارد. برای غلبه بر این مشکل یک سیاست پیشنهادی این است که از واکنش مدل‌های کنترل بهینه در شبیه‌سازی متناظر با وضعیت موجود در جامعه استفاده شود. در واقع هدف از ریشه‌کنی بیماری‌های عفونی، برداشتن گامی مطلوب در جهت جامعه سالم می‌باشد که نظریه کنترل بهینه در این زمینه با لحاظ هم‌زمان ریشه‌کنی بیماری و حداقل‌سازی مخارج در شرایط پیش روی مختلف، بسیار مفید و مؤثر خواهد بود. در این صورت اگر بخواهیم در خصوص بهتر بودن یک مدل و یا مقایسه‌ی آن‌ها اظهار نظر کنیم باید به شرایط موجود توجه گردد، زیرا مدل‌ها بر مبنای شرایط اشاره شده کارا هستند. بدیهی است که اگر استفاده از تمامی امکانات مورد نظر یعنی تمامی راهکارهای درمان ممکن باشد، مدل‌هایی که تمام آن راهکارها را پوشش دهند و اطلاعات اولیه آن‌ها در دسترس باشند، برتری دارند.

## فهرست منابع

- [۱] اکبری، رضا و نوایی، لیدر، ۰۱۴۰۲. بررسی کنترل بهینه شیوع بیماری‌های عفونی قابل انتقال در جامعه به صورت افقی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، (۱۳) ۲، صص ۲۸۴-۲۹۶. doi: ۰۲۳۰۵۵۰۱۰/JAMM/۲۲۰۵۵۰۱۰.۲۰۲۳.۴۲۷۸۸.۲۱۲۹
- [2] Aldila, D., Ndi, M, Z. and Samiadji, B, M., 2020. Optimal control on COVID-19 eradication program in Indonesia under the effect of community awareness. *Math. Biosci. Eng*, 17(6), PP. 6355-6389. doi: <https://doi.org/10.3934/mbe.2020335>
- [3] Alshomrani, A. S., Ullah, M. Z., and Baleanu, D., 2021. Caputo SIR model for COVID-19 under optimized fractional order. *Advances in Difference Equations*, 185. doi: <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03345-5>
- [4] Anderson, R. M. and May, R. M., 1992. *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press doi: <https://doi.org/10.1017/S0950268800059896>
- [5] Bakare, E.A., Nwagwo, A. and Danso-Addo, E., 2014. Optimal control analysis of an SIR epidemic model with constant recruitment. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3 (3), PP. 273-285. doi: <https://doi.org/10.14419/ijamr.v3i3.2872>

- [6] Balderrama, R., Peressutti, J., Pinasco, J. P., Vazquez, F., and Vega, C. S. D. L., 2022. Optimal control for a SIR epidemic model with limited quarantine. *Scientific Reports*, 12(1), 12583. doi: 10.1038/s41598-022-16619-z
- [7] Banerjee, R. and Biswas, R. K., 2020. Fractional optimal Control of Compartmental SIR model of COVID-19: Shoing the Impact of Effective Vaccination. *IFAC PapersOnLine*, 55(1), PP. 616-622. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.04.101>
- [8] Barro, M., Guiro, A. and Ouedraogo, D., 2018. Optimal control of a SIR epidemic model with general incidence function and a time delays. *CUBO A Mathematical Journal*, 20(2), PP. 53-66. doi: <https://doi.org/10.4067/S0719-06462018000200053>
- [9] Benyah, F. and Yusuf, T. T., 2012. ,Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological Model. *World Journal of Modelling and Simulation*, 8(3), PP., 194-204.
- [10] Bhattacharyya, S. and Ghosh, S., 2010. Optimal control of vertically transmitted disease. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 11 pp. 369-387. doi: <https://doi.org/10.1155/2010/520830>
- [11] Birkhoff, G. and Rota, G. C., 1989. Ordinary Differential Equations. 4th ed. John Wiley & Sons, New York.
- [12] Bliman, P.A., Duprez, M., Privat, Y. and Vauchelet, N., 2021. Optimal Immunity Control and Final Size Minimization by Social Distancing for the SIR Epidemic Model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 189(2), PP., 408–436. doi: <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01830-1>
- [13] Bolzoni, L., Bonacini, E., Soresina, C., and Groppi, M., 2017. Time-optimal control strategies in SIR epidemic models. *Mathematical biosciences*, 292, PP.86-96. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.07.011>
- [14] Bolzoni, L., Bonacini, E., Della Marca, R. and Groppi, M., 2019. Optimal control of epidemic size and duration with limited resources. *Mathematical biosciences*, 315, 108232. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2019.108232>
- [15] Bolzoni, L., Della Marca, R., and Groppi, M., 2021. On the optimal control of SIR model with Erlang-distributed infectious period: isolation strategies. *Journal of Mathematical Biology*, 83, PP.1-21. doi: <https://doi.org/10.1007/s00285-021-01668-1>
- [16] Dong, S., Xu, L., Zhong-Zhou Lan, Y, A., Xiao, D. and Gao, B., 2022. Application of a time-delay SIR model with vaccination in COVID-19 prediction and its optimal control strategy, (2022). doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08308-x>
- [17] Elhia, M., Rachik, M. and Benlahmar, E., 2013. Optimal Control of an SIR Model with Delay in State and Control Variables. *ISRN Biomathematics*, Volume 2013, Article ID 403549, 7 pages. doi: <https://doi.org/10.1155/2013/403549>
- [18] Farrington, C.P., 2003. On vaccine efficacy and reproduction numbers. *Math. Biosci.* 185(1), pp. 89-109. doi: [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(03\)00061-0](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(03)00061-0)
- [19] Fleming, W. and Rishel, R., 1975. Deterministic and Stochastic Optimal Control. *Springer-Verlag, New York*. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6380-7>

- [20] Gani, S. R. and Halawar, S. V., 2017. Deterministic and Stochastic Optimal Control Analysis of an SIR Epidemic model. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 13(9), (2017), pp. 5761-5778.
- [21] Grigorieva, E., Khailov, E. and Korobeinikov, A., 2016. Optimal Control for a SIR Epidemic model with Nonlinear Incidence Rate. *Study in Applied Mathematics*, 141(3), PP. 353-398.
- [22] Hackbusch, W. K., 1978. A numerical Method for solving parabolic equations with opposite orientations. *Computing*, 20 , PP.229-240. doi: 10.1007/BF02251947
- [23] Hethcote, H.W., 2000. *The mathematics of infectious diseases*. SIAM Rev, 42(4): 599. doi: <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
- [24] Huang, C., Wang, Y., Li, X., Ren, L., Zhao, J., Hu, Y., Zhang, L., Fan, G., Xu, J. and Gu, X., 2020. et al. Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China. *Lancet*, 395, PP.497-506. doi: [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30183-5](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30183-5)
- [25] Hussain, T., Ozair, M., Ali, F., ur Rehman, S., Assiri, T. A., and Mahmoud, E. E., 2021. Sensitivity analysis and optimal control of COVID-19 dynamics based on SEIQR model. *Results in Physics*, 22, 103956. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.103956>
- [26] Jahangiri, K. and Tabibi, H., 2003. Disaster management: designing a new model for effective planning in bioterrorism. *Payesh*, 2(3), PP.205-214. doi: <https://www.researchgate.net/publication/303667867>
- [27] Kang, Y. H., Zaman, G. and . Jung, I. H, 2009. Optimal treatment of an SIR epidemic model with time delay. *BioSystems*, 98(1), PP. 43-50. doi: <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2009.05.006>
- [28] Kar, T. K. and Batabyal, A., 2011. Stability analysis and optimal control of an SIR epidemic model with vaccination. *Biosystems*, 104(2-3), PP. 127-135. doi: <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2011.02.001>
- [29] Kennedy, J. and Eberhart, R. C., 1995. Particle swarm optimization. In: *IEEE International Conference on Neural Networks*, IEEE. pp. 1942-1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968
- [30] Kermack, W. O., and McKendrick, A. G., 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 115(772), pp.700-721. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- [31] Ketcheson, D. I., Matteo Parsani, and LeVeque, R. J., 2013. High-order Wave Propagation Algorithms for Hyperbolic Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(1), PP. 351-377. doi: <https://doi.org/10.1137/110830320>
- [32] Ketcheson, D. I., 2021. Optimal control of an SIR epidemic through finite-time non-pharmaceutical intervention. *Journal of Mathematical Biology*, doi: <https://doi.org/10.1007/s00285-021-01628-9>
- [33] Kierzenka, J. and Shampine, L. F., 2001. A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE. *ACM Trans Math Softw*, 27(3), PP. 299-316. doi: <https://doi.org/10.1145/502800.502801>
- [34] Kmeta, T. and Kmetova, M., Bézier, 2019. Curve parametrisation and echo state network methods for solving optimal control problems of SIR model. *BioSystems*, 186, doi: <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2019.104029>

- [35] Laarabi, H., Rachik, M., El Kahlaoui, O. and Labriji, E., 2013. Optimal Vaccination Strategies of an SIR Epidemic Model with a Saturated Treatment. *Universal Journal of Applied Mathematics*, 1(3), pp.185-191. doi: 10.13189/ujam.2013.010305
- [36] Lashari, A. A., 2016. Optimal Control of an SIR Epidemic Model with a Saturated Treatment. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10(1), PP. 185-191. doi: 10.18576/amis/100117
- [37] Ledzewicz, U. and Schattler, H., On optimal singular controls for a general SIR-model with vaccination and treatment. *Manuscript submitted to AIMS*, PP. 981-990. doi: 10.3934/proc.2011.2011.981
- [38] Li, Y., Ye, M. and Zhang, Q., 2019. Strong convergence of the partially truncated Euler-Maruyama scheme for a stochastic age-structured SIR epidemic model. *Appl Math Comput*, 362:124519. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.033>
- [39] Lukes, D.L., 1982. Differential Equations: Classical to Controlled, Math. Sci. Eng. 162, *Academic Press, New York*.
- [40] Malik, T. and Sharomi, O., 2015. Optimal control in epidemiology. *Article in Annals of Operations Research*, 251, PP.55–71. doi: <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1834-4>
- [41] Mallapaty, S., 2020. Why does the coronavirus spread so easily between people? *Nature*, 579:183–183. doi: 10.1038/d41586-020-00660-x
- [42] Mehrabian, A., and Lucas, C., 2006. A novel numerical optimization algorithm inspired from weed colonization. *Ecol. Inform*, 1 (4), PP.355–366. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ecoinf.2006.07.003>
- [43] Murray, J.D., 1993. *Mathematical biology, mathematical biology*. Berlin: Springer. doi: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-08542-4>
- [44] Nepomuceno, E. G., Barbosa, A. M., Silva, M. X. and Perc, M., 2018. Individualbased modelling and control of bovine brucellosis. *R Soc Open Sci*, 5(5):180200. doi: <https://doi.org/10.1098/rsos.180200>
- [45] Nepomuceno, E.G., Peixoto, M.L.C., Lacerda, M.J., Campanharo, A.S.L.O., Takahashi, R.H.C., Aguirre, L.A., 2021. Application of Optimal Control of Infectious Diseases in a Model-Free Scenario. *SN Computer Science*, 2(405). doi: <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00794-3>
- [46] Noupoue, Y.Y.Y., Tandoğdu, Y. and Awadalla, M., 2019. On numerical techniques for solving the fractional logistic differential equation. *Advances in Difference Equations*, 9(1), pp.1-13. doi: 10.1186/s13662-019-2055-y
- [47] Ogunmilroa, O. M., Fadugbab, S. E. and Ogunlade, T. O., 2018. Stability Analysis and Optimal Control of Vaccination and Treatment of a SIR Epidemiological Deterministic Model with Relapse. *International Journal of Mathematical Modelling & Computations*, 8(1), PP.39- 51.
- [48] Piret, J. and Boivin, G., 2021 Pandemics Throughout History, doi: 10.3389/fmicb.2020.631736. *frontiers in microbiology*,
- [49] Slama, H., Hussein, A., El-Bedwehy, N. A. and Selim, M. M., 2019. An approximate probabilistic solution of a random SIR-type epidemiological model using RVT technique. *Appl Math Comput*, 361, PP. 144-156. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.05.019>
- [50] Staněk, J., 2008. Kermack-McKendrick epidemics vaccinated. *Kybernetika*, 44(5), PP.705-714. doi: <http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/135883>



- [51] Tchoumi, S.Y., Diagne, M.L. and Rwezaura, H., 2021. Malaria and COVID-19 co-dynamics: A mathematical model and optimal control. *Appl. Math. Modell*, 99, pp.294. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.06.016>
- [52] Wickwire, K., 1977. Mathematical-models for control of pest and infectious-diseases -a survey: *Theor Popul Biol.*, 11(2), PP.182-238. doi: [https://doi.org/10.1016/0040-5809\(77\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0040-5809(77)90025-9)
- [53] Yang, J. and Wang, X., 2018. Threshold dynamics of an SIR model with nonlinear incidence rate and age-dependent susceptibility. *Complexity*, 2018:1, PP.1-16. doi: <https://doi.org/10.1155/2018/9613807>
- [54] Yoshida, N. and Hara, T., 2007. Global stability of a delayed SIR epidemic model with density dependent birth and death rates. *J. Comput. Appl. Math*, 201(2), PP.339-347. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.034>
- [55] Zakary, O., Rachik, M., and Elmouki, I., 2017. On the analysis of a multi-regions discrete SIR epidemic model: an optimal control approach. *Int. J. Dynam. Control*, 5917-930. doi: <https://doi.org/10.1007/s40435-016-0233-2>
- [56] Zhang, Q., Tang, B., and Tang, S., 2018. Vaccination threshold size and backward bifurcation of SIR model with state-dependent pulse control. *Journal of theoretical biology*, 455, PP.75-85. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2018.07.010>
- [57] Zhou, Y., Yang, K., Zhou, K., and Liang, Y., 2014. Optimal vaccination policies for an SIR model with limited resources. *Acta biotheoretica*, 62, PP.171-181. doi: <https://doi.org/10.1007/s10441-014-9216-x>



## A review on optimal control strategies to inhibition SIR contagious infection disease

Maryam Nikbakht<sup>(1)</sup> <sup>32</sup> and Alireza Fakharzadeh Jahromi<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Communicated by: M.H.Farahi

Received: 6 December 2023

Accepted: 24 May 2024

**Abstract:** Using mathematical models to describe infectious diseases and then how to control and eliminate them by vaccines or other treatments, is a great help to public health organizations. Eradication of this category of diseases is possible when treatments are prescribed at the right time and with the right amount and process; In this regard, optimal control theory has been applied as a successful tool. The main purpose of this article is to review the existing literature considering such strategies in dealing with infectious diseases in the form of famous basic model SIR. For this purpose, this study, deal with the way to use the control functions and how to explain the provided solutions, indeed the aims are to investigate susceptible, infected and recovered populations in terms of the required goals, among the performed activities by evaluation and analyzing. Based on the number of used control variables in the treatment model, which indicate different methods of simultaneous prevention, including vaccination, treatment of infection, quarantine, and like that or, the type of model, this study has been categorized and the results are presented. Also, in this review, the methods of implementing models from numerical computation point of view and reality have also been discussed and time delay, stochastic and discrete time models in the case of SIR are also investigated. This review would help the researchers in order to have knowledge about the subject and activities carried out to continue research in this area very helpful.

**Keywords:** Optimal Control, Mathematical Model SIR, Differential equation, Infection disease.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>32</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Nikbakht) [m\\_nikbakht@pnu.ac.ir](mailto:m_nikbakht@pnu.ac.ir), (A. Fakharzadeh) [a\\_fakharzadeh@sutec.ac.ir](mailto:a_fakharzadeh@sutec.ac.ir)