



روش اکستراگرادیان زیرگرادیان لخت برای حل مسائل تعادل

مریم صفری^(۱) و فریدون مرادلو^(۱)

^(۱) گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران
دبیر مسئول: محسن زیوری رضاپور

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۲

چکیده: در این مقاله، با ترکیب روش اکستراگرادیان زیرگرادیان با روش لخت، الگوریتم تکراری جدیدی برای حل مسائل تعادل در فضاهاى هیلبرت حقیقی معرفی می‌کنیم. علاوه بر این، یک الگوریتم خود-سازگار لخت جدید را برای حل نابرابری‌های تغییراتی در فضاهاى هیلبرت حقیقی ارائه می‌دهیم، که در آن نیازی به دانستن ثابت لیپشیتس نگاشت استفاده شده در الگوریتم نیست. همگرایی ضعیف دنباله‌های تولید شده توسط الگوریتم‌های ارائه شده را اثبات می‌کنیم. برای نشان دادن قابلیت استفاده نتایجمان و همچنین برای نشان دادن کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی، مثالهای مقایسه‌ای با چندین الگوریتم موجود در مقالات را ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم لخت، فضای هیلبرت، مسئله تعادل، مسئله نابرابری تغییراتی، همگرایی ضعیف.

رده‌بندی ریاضی: 47J25, 47H09, 65K10, 65K15

۱ مقدمه

یکی از مسائل اصلی در نظریه بهینه‌سازی، مینیمم‌سازی یک تابع محدب، نیم‌پیوسته پایینی و زیردیفرانسیل پذیر f است که معادل با مسئله یافتن نقاط صفر عملگر ∂f می‌باشد. همچنین، یافتن جواب‌های برخی معادلات دیفرانسیل به یافتن نقاط صفر بعضی از عملگرهای خاص تبدیل می‌شود. از این رو، یافتن نقاط صفر عملگرها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H بوده و تابع $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ برای هر $x \in C$ در شرط $f(x, x) = 0$ صدق کند. در سال ۱۹۹۴، مسئله زیر تحت عنوان مسئله تعادل EP توسط اوتلی و بلوم [۵] مطرح گردید:

$$"x^* \in C \text{ را طوری بیابید که برای هر } y \in C \text{ داشته باشیم، } f(x^*, y) \geq 0."$$

مجموعه جواب مسئله EP را با $EP(f)$ نشان می‌دهیم.

^۱نویسنده مسئول مقاله

نابرابری‌های تغییراتی، حالت خاصی از مسائل تعادل هستند. در سال‌های اخیر الگوریتم‌های بسیاری برای حل مسائل تعادل و نابرابری‌های تغییراتی، توسعه داده شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند که در آنها از تکنیک‌های متفاوتی استفاده شده است. از جمله تصویر، حلال، اصل کمکی و روشهای ترکیبی ([۱، ۳، ۵، ۱۰، ۱۶، ۱۷، ۲۲-۲۴، ۲۶] را ببینید). فرض کنید $\Psi^H : C \rightarrow A$ یک نگاشت باشد. مسئله نابرابری تغییراتی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$"u \in C \text{ را طوری بیابید که برای هر } y \in C \text{ و } x^* \in Au \text{ داشته باشیم، } \langle x^*, y - u \rangle \geq 0."$$

مسئله نابرابری تغییراتی را با VIP و مجموعه جواب آن را با $VI(C, A)$ نشان می‌دهیم. در مسئله EP با در نظر گرفتن تابع f به صورت $f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ ، که در آن A یک نگاشت تک مقداری است، جواب مسئله EP معادل با $VI(C, A)$ خواهد بود. جواب مسئله تعادل است. در سال ۱۹۷۶ کرپلویچ [۱۷] برای حل VIP در فضاهای اقلیدسی روش اکستراگردیان زیر را پیشنهاد داد

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y^k = P_C(x^k - \tau Ax^k), \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \tau Ay^k), \end{cases}$$

که در آن τ عددی مثبت و $A : C \rightarrow H$ نگاشت یکنوا و L -لیپ‌شیتس پیوسته است. او ثابت کرد که دنباله تولید شده توسط این الگوریتم به طور ضعیف همگرا به جواب مسئله VIP است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در الگوریتم بالا، در هر تکرار باید دو تصویر متریک روی مجموعه محدب و بسته C محاسبه شوند. در بیشتر موارد محاسبه تصویر متریک دارای بیان تحلیلی نیست. بنابراین محاسبات عملی در روش اکستراگردیان به سادگی قابل انجام نیستند. بیشتر محققان سعی می‌کنند تا با روش‌های مختلف بر این مشکل غلبه کنند. یکی از این راه‌ها توسط سنسور [۶] با جایگذاری نیم‌فضا به جای مجموعه محدب و بسته، در محاسبه تصویر متریک دوم ارائه گردید. این روش محاسبات را ساده‌تر کرده و توانست کارایی الگوریتم را افزایش دهد. الگوریتم ارائه شده توسط سنسور [۶] به صورت زیر بود

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y^k = P_C(x^k - \tau Ax^k), \\ x^{k+1} = P_{T_k}(x^k - \tau Ay^k), \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن T_k ابرصفحه کراندار است. این الگوریتم معروف به الگوریتم اکستراگردیان زیرگردیان است که به طور ضعیف به عضوی از $VI(C, A)$ همگرا است.

اخیراً پولیاک [۲۰] روش گوی سنگین را پیشنهاد داده است. علاوه بر این، او برای مینیمم کردن تابع هموار و محدب f روش تکراری در ۲ گام ارائه داده است. نستروف [۱۹] با اصلاح روش گوی سنگین الگوریتم زیر را معرفی کرد

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} &= y_n - \lambda_n \nabla f(y_n), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

که در آن $\alpha_n \in [0, 1)$ یک فاکتور برون‌یابی و λ_n یک عدد مثبت است. خاطر نشان می‌شود که $\alpha_n(x_n - x_{n-1})$ عبارت لختی است و الگوریتم‌هایی که شامل عبارت لختی باشند به عنوان الگوریتم‌های لخت شناخته می‌شوند. همچنین عبارت لختی کارایی الگوریتم و نرخ همگرایی دنباله تکرارهای تولید شده را بهبود می‌بخشد. از این رو تعداد زیادی از محققان به مطالعه الگوریتم‌های لخت علاقه‌مند هستند. آلوارز و آتوچ [۲] این روش را برای اصلاح الگوریتم نقطه پروکسیمال به کار بردند و یک الگوریتم نقطه پروکسیمال به صورت زیر ارائه دادند

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} &= (I + \lambda_n B)^{-1}(y_n), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

که در آن B عملگر یکنوای ماکسیمال است. همچنین ثابت می‌شود اگر α_n و λ_n در شرایطی خاصی صدق کنند، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف یک نقطه صفر از عملگر B همگرا است.

در این مقاله، با الهام گرفتن از الگوریتم ارائه شده توسط کِسی و همکارانش [۱۵]، با ارائه یک الگوریتم جدید لخت به حل مسائل تعادل در فضاهای هیلبرت حقیقی می‌پردازیم. این الگوریتم بر اساس روش اکستراگردیان زیرگردیان است. همچنین الگوریتم خود-سازگار لخت جدیدی را برای حل نابرابری‌های تغییراتی در فضاهای هیلبرت حقیقی ارائه می‌دهیم که در آن نیازی به دانستن ثابت لیپ شیتس نگاشت استفاده شده در الگوریتم نیست. همگرایی ضعیف دنباله‌های تولید شده توسط این الگوریتم‌ها را ثابت کرده و با ارائه مثال عددی، کارایی الگوریتم‌های جدید را نشان می‌دهیم. همچنین الگوریتم‌های خود را با برخی الگوریتم‌های معرفی شده در مقالات دیگر با در نظر گرفتن نقاط شروع و پارامترهای مشترک یکسان، مقایسه می‌کنیم و نشان می‌دهیم از لحاظ تعداد گام و نیز از لحاظ زمان، الگوریتم‌های ما کارایی بهتری دارند.

۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

در این بخش مطالب مقدماتی مورد نیاز برای بخش‌های بعدی مقاله ارائه می‌شوند. برای اثبات قضایا و نتایج مورد اشاره و نیز مباحث بیشتر می‌توان منابع مرتبط را نگریست.

در سراسر این مقاله فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و با نرم $\|\cdot\|$ باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در H باشد، آنگاه همگرایی قوی $\{x_n\}$ به $x \in H$ را با نماد $x_n \rightarrow x$ و همگرایی ضعیف آن را با نماد $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. [۲۶] فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H و $A : C \rightarrow H$ یک نگاشت باشد. در این صورت گوییم A

$$(۱) \text{ یکنوا روی } C \text{ است هرگاه برای هر } x, y \in C$$

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0.$$

$$(۲) \text{ یکنوانما روی } C \text{ است هرگاه برای هر } x, y \in C$$

$$\langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Ay, x - y \rangle \leq 0.$$

$$(۳) -L \text{ پیوسته لیپشیتس}^۴ \text{ نامیده می‌شود، هرگاه ثابت } L > 0 \text{ موجود باشد، به قسمی که}$$

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|.$$

ملاحظه ۲.۲. یکنوا بودن نگاشت $A : C \rightarrow H$ ، یکنوانما بودن نگاشت A روی C را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳.۲. [۲۵] فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H و $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک دوتابع باشد. در این صورت گوییم f

$$(۱) \text{ یکنوا روی } C \text{ است، هرگاه برای هر } x, y \in C$$

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0.$$

$$(۲) \text{ یکنوانما روی } C \text{ است، هرگاه برای هر } x, y \in C$$

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0.$$

$$(۳) \text{ در شرط نوع-لیپشیتس}^۵ \text{ صدق می‌کند، هرگاه } c_1 > 0 \text{ و } c_2 > 0 \text{ موجود باشند به قسمی که برای هر } x, y, z \in C$$

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|y - x\|^2 - c_2\|z - y\|^2. \quad (۱.۲)$$

ملاحظه ۴.۲. یکنوا بودن دوتابع f ، یکنوانما بودن آن را نتیجه می‌دهد.

ملاحظه ۵.۲. اگر $A : C \rightarrow H$ یکنوانما روی C باشد، آنگاه دوتابع $f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ نیز یکنوانما روی C است.

لم ۶.۲. [۴] برای هر $x, y \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2.$$

²Monotone

³Pseudomonotone

⁴L-Lipschitz continuous

⁵Lipschitz-type

دامنه تابع $f : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D(f) = \{x \in H \mid f(x) < \infty\}.$$

مجموعه همه مینیمم‌کننده‌های تابع $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ روی زیرمجموعه C از H با نماد $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ نشان داده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]

$$\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x) = \begin{cases} \{x \in C : f(x) = \inf_{x \in C} f\}, & \inf_C f \neq \infty, \\ \emptyset, & \inf_C f = \infty. \end{cases}$$

تعریف ۷.۲. [۲۱] فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد.

(۱) $f : H \rightarrow [-\infty, \infty]$ محض است، هرگاه برای هر $x \in H$ ، $f(x) > -\infty$ و حداقل یک $y \in H$ موجود باشد به طوری که $f(y) < \infty$.

(۲) $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ محدب است، هرگاه

$$f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t), \quad \forall s, t \in H, \lambda \in [0, 1].$$

(۳) $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ نیم‌پیوسته پایینی است، هرگاه $\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$.

(۴) $f : H \rightarrow [-\infty, \infty)$ نیم‌پیوسته بالایی است، هرگاه $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \leq f(\bar{x})$.

تعریف ۸.۲. [۴، ۹، ۲۷] فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی و $f : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ تابع محدب و محض باشد، در این صورت $\partial f : X \rightarrow 2^H$ زیردیفرانسیل f نامیده می‌شود و برای $x \in D(f)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\partial f(x) = \left\{ x^* \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \right\}, \quad \forall y \in H.$$

اگر $\partial f(x) \neq \emptyset$ ، آنگاه f را در x زیردیفرانسیل‌پذیر گوئیم.

لم ۹.۲. [۱۴] فرض کنید C زیرمجموعه محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H و $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب و زیردیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت تابع f در نقطه $x \in C$ مینیمم می‌شود اگر و تنها اگر

$$0 \in \partial f(x) + N_C(x).$$

که در آن

$$N_C(x) = \left\{ q \in H : \langle x - y, q \rangle \geq 0, \forall y \in C \right\},$$

مخروط نرمال^۷ برای C در نقطه $x \in C$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲. [۱۸] فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی و C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از H باشد. نگاشت $A : C \rightarrow H$ را $-F$ هم‌پیوسته^۸ می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر $y \in C$ ، نگاشت $x \rightarrow \langle Ax, x - y \rangle$ به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی روی C باشد. (یا به طور معادل، $x \rightarrow \langle Ax, y - x \rangle$ به طور ضعیف روی C نیم‌پیوسته بالایی باشد)

ماتوگری و راستی [۱۸] با ارائه مثال زیر نشان دادند که تابع $-F$ هم‌پیوسته لزوماً پیوسته نمی‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0, \\ -a, & x \in (0, \frac{1}{\sqrt{a}}], \\ -\frac{1}{x} + a, & x \in (\frac{1}{\sqrt{a}}, 1]. \end{cases}$$

⁶Subdifferential

⁷Normal cone

⁸ F -hemicontinuous

قضیه ۱۱.۲. [۲۸] فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H باشد. آنگاه عضو یکتای $z \in C$ موجود است به قسمی که

$$\|x - z\| = \min_{y \in C} \|x - y\|,$$

در این صورت قرار می‌دهیم $z = P_C x$. بنابراین،

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C.$$

نگاشت پوشای P_C از فضای هیلبرت حقیقی H بروی C ، تصویر متریک^۹ نامیده می‌شود.

لم ۱۲.۲. [۴] برای هر $x, y \in H$ و هر $z \in C$ گزاره‌های زیر برقرارند:

$$P_C x = z \iff \langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \quad (۱)$$

$$\|P_C x - x\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|P_C x - z\|^2 \quad (۲)$$

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C x - x + y - P_C y\|^2 \quad (۳)$$

۳ روش اکستراگرادیان زیرگرادیان لخت برای حل مسائل تعادل

در سراسر این بخش فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت حقیقی H و $f : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ یک دوتابع باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند: (شرایط E)

$$f(x, x) = 0, \quad x \in H \quad (E۱)$$

$$f \text{ روی } C \text{ یکنواخت باشد.} \quad (E۲)$$

$$\text{برای هر } x \in H \text{ تابع } f(x, \cdot) \text{ محدب، نیم‌پیوسته پایینی و زیردیفرانسیل پذیر باشد.} \quad (E۳)$$

$$f \text{ در شرط نوع -لیپ‌شیتس صدق می‌کند، یعنی } c_1, c_2 > 0 \text{ وجود دارند که برای هر } x, y, z \in H \text{ داریم} \quad (E۴)$$

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2.$$

$$EP(f) \neq \emptyset \quad (E۵)$$

$$(E۶) \text{ برای دنباله‌های کراندار } \{x_n\} \subseteq C \text{ و } \{y_n\} \subseteq C \text{ که } \|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \text{، نابرابری} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) \geq 0 \text{ برقرار است.}$$

$$(E۷) \text{ برای دنباله دلخواه } \{z_n\} \text{ که } z_n \rightarrow z \text{، اگر برای هر } y \in C \text{، } \limsup_{n \rightarrow \infty} f(z_n, y) \geq 0 \text{، آنگاه } z \in EP(f).$$

ملاحظه ۱.۳. اگر $A : C \rightarrow H$ پیوسته لیپ‌شیتس با ثابت $L > 0$ باشد و تعریف کنیم $f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ ، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که

$$(۱) \text{ دوتابع } f \text{ نوع -لیپ‌شیتس با ثابت‌های } c_1 = c_2 = \frac{L}{4} \text{ می‌باشد.}$$

$$(۲) \text{ اگر } A \text{ نگاشت کراندار روی مجموعه‌های کراندار باشد، آنگاه } f \text{ در شرط } (E۶) \text{ صدق می‌کند.}$$

ملاحظه ۲.۳. نگاشت‌های پیوسته L -لیپ‌شیتس روی مجموعه‌های کراندار، کراندار هستند.

^۹Metric projection

ملاحظه ۳.۳. اگر $f(\cdot, y)$ به‌طور ضعیف نیم‌پیوسته بالایی باشد، آنگاه f در شرط $(E\mathcal{V})$ صدق می‌کند ولی عکس این مطلب برقرار نمی‌باشد. در مثال زیر تابعی را تعریف می‌کنیم که در شرط $(E\mathcal{V})$ صدق می‌کند ولی $f(\cdot, y)$ نیم‌پیوسته بالایی نیست.

مثال ۴.۳. فرض کنید $H = l_2$ که فضای همه دنباله‌های حقیقی $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ است به‌طوری که $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$. فرض کنید $f(x, y) = (y_1 - x_1) \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ و قرار دهید

$$C = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in l_2 : z_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots\}.$$

همچنین فرض کنید $z_k = (0, \dots, 0, \frac{\text{sink}}{k}, 0, \dots)$. در این صورت $z_k \rightarrow z = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ و $z \in EP(f)$ و عضو C مانند $y \in C$ وجود دارد به‌طوری که $\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \geq 0$. بنابراین نتیجه می‌گیریم $\limsup_{k \rightarrow \infty} (y_1 - x_1^k) \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^k)^2 \geq 0$ از این رو

$$(y_1 - x_1) \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^k)^2 \geq 0.$$

چون $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_1 - x_1^k) = (y_1 - x_1)$ پس $y_1 \geq x_1$ بنابراین برای هر $y \in C$ ، $f(z, y) \geq 0$ یعنی f در شرط $(E\mathcal{V})$ صدق می‌کند.

حال با تلفیق روش اکستراگردیان و روش زیرگردیان و نیز استفاده از روش لخت به ارائه الگوریتم خود می‌پردازیم.

الگوریتم ۵.۳. روش اکستراگردیان زیرگردیان لخت

گام ۰: فرض کنید $\theta \in [0, 1)$ و $\lambda > 0$.

گام ۱: فرض کنید $x_0, y_0, x_1 \in H$ دلخواه باشند و $w_1 = x_1 + \theta(x_1 - x_0)$ و $n = 1$ و $y_1 = \operatorname{argmin}_{y \in C} \{\lambda f(y_0, y) + \frac{1}{\lambda} \|y - w_1\|^2\}$ قرار دهید

گام ۲: فرض کنید $k_n \in \partial_2 f(y_{n-1}, y_n)$ وجود داشته باشد به‌طوری که عضو $q_n \in N_C(y_n)$ است که

$$q_n = w_n - y_n - \lambda k_n \tag{۱.۳}$$

و نیم‌فضای H_n را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$H_n = \{y \in H : \langle w_n - \lambda k_n - y_n, y - y_n \rangle \leq 0\}.$$

گام ۳: مقادیر زیر را به دست آورید

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H_n} \{\lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} \|y - w_n\|^2\},$$

$$w_{n+1} = x_{n+1} + \theta(x_{n+1} - x_n)$$

و

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \{\lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} \|y - w_{n+1}\|^2\}.$$

گام ۴: اگر $y_{n+1} = w_{n+1} = y_n$ آنگاه y_n عضو $EP(f)$ است، در غیر این صورت قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ بروید.

$$\sigma = (1 - 2\lambda c_2) - 4\lambda c_1(1 + \theta) > 0 \quad (F1)$$

$$\sigma(1 + 3\theta^2) - 4\theta(1 + \theta) > 0 \quad (F2)$$

به آسانی می‌توانیم λ و θ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط $(F1)$ و $(F2)$ برقرار باشند. برای مثال

$$0 < \lambda < \frac{1 - 4\theta - \theta^2}{(3\theta^2 + 1)(4c_1 + 4c_1\theta + 2c_2)} \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta < \sqrt{5} - 2.$$

برای اثبات همگرایی دنباله‌های تولید شده در الگوریتم ۵.۳، ابتدا به اثبات لم‌ها و قضایای زیر می‌پردازیم.

لم ۶.۳. برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، شمول $C \subseteq H_n$ برقرار است.

اثبات. بنابر رابطه (۱.۳)، می‌دانیم که برای هر $n \geq 1$ ، عضو n مانند $k_n \in \partial_\nu f(y_{n-1}, y_n)$ و $q_n \in N_C(y_n)$ وجود دارد به طوری که $q_n = w_n - \lambda k_n - y_n$. از تعریف

$$N_C(y_n) = \left\{ q \in X : \langle q, y - y_n \rangle \leq 0, \forall y \in C \right\}$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \geq 1$ و هر $y \in C$ ، رابطه $\langle w_n - \lambda k_n - y_n, y - y_n \rangle \leq 0$ برقرار است. از این رو طبق تعریف H_n ، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داریم $C \subseteq H_n$. \square

لم ۷.۳. اگر $y_{n+1} = w_{n+1} = y_n$ ، آنگاه $y_n \in EP(f)$.

اثبات. با استفاده از لم ۹.۲ داریم

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\nu} \|y - w_{n+1}\|^2 \right\} \Leftrightarrow 0 \in \lambda \partial_\nu f(y_n, y_{n+1}) + y_{n+1} - w_{n+1} + N_C(y_{n+1}).$$

اگر $y_{n+1} = w_{n+1} = y_n$ ، آنگاه نتیجه می‌گیریم

$$0 \in \lambda \partial_\nu f(y_n, y_n) + N_C(y_n),$$

بنابراین $w_n^1 \in \partial_\nu f(y_n, y_n)$ وجود دارد به طوری که $-\lambda w_n^1 \in N_C(y_n)$ ، یعنی برای هر $y \in C$ ، $\langle w_n^1, y - y_n \rangle \geq 0$. چون $w_n^1 \in \partial_\nu f(y_n, y_n)$ ، برای هر $y \in C$ نتیجه می‌گیریم

$$f(y_n, y) - f(y_n, y_n) \geq \langle w_n^1, y - y_n \rangle \geq 0,$$

یعنی برای هر $y \in C$ ، $f(y_n, y) \geq 0$ و بنابراین $y_n \in EP(f)$. \square

لم ۸.۳. فرض کنید $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ دنباله‌های تولید شده توسط الگوریتم ۵.۳ باشند و $p \in EP(f)$. فرض کنید دنباله $\Lambda_n(p)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\Lambda_n(p) = \|x_n - p\|^2 - \theta \|x_{n-1} - p\|^2 + 4\lambda c_1 \|w_n - y_{n-1}\|^2.$$

در این صورت

$$\Lambda_{n+1}(p) \leq \Lambda_n(p) + \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \Gamma_2 \|x_{n+1} - x_n\|^2,$$

که در آن $\Gamma_1 = \theta(1 + \theta) + \frac{\sigma}{4}\theta(1 - \theta)$ و $\Gamma_2 = \frac{\sigma}{4}(1 - \theta) - 4\lambda c_1\theta(1 + \theta)$. $\sigma = 1 - 4\lambda c_1 - 4\lambda c_1\theta - 2\lambda c_2$

اثبات. چون $x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H_n} \left\{ \lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\gamma} \|y - w_n\|^2 \right\}$ داریم

$$\circ = \lambda \omega'_n + x_{n+1} - w_n + q'_n, \quad q'_n \in N_{H_n}(x_{n+1}), \quad \omega'_n \in \partial_{\gamma} f(y_n, x_{n+1}). \quad (۲.۳)$$

با استفاده از تعاریف $\partial_{\gamma} f(y_n, x_{n+1})$ و $N_{H_n}(x_{n+1})$ برای هر $y \in H$ خواهیم داشت

$$f(y_n, y) - f(y_n, x_{n+1}) \geq \langle \omega'_n, y - x_{n+1} \rangle,$$

و برای هر $y \in H_n$ داریم

$$\lambda \langle \omega'_n, y - x_{n+1} \rangle \geq \langle w_n - x_{n+1}, y - x_{n+1} \rangle.$$

بنابراین برای هر $y \in H_n$ نابرابری زیر برقرار است

$$\langle w_n - x_{n+1}, y - x_{n+1} \rangle \leq \lambda (f(y_n, y) - f(y_n, x_{n+1})).$$

پس

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^{\gamma} &= \|w_n - p\|^{\gamma} + \|x_{n+1} - w_n\|^{\gamma} + \gamma \langle x_{n+1} - w_n, w_n - p \rangle \\ &= \|w_n - p\|^{\gamma} - \|x_{n+1} - w_n\|^{\gamma} + \gamma \langle x_{n+1} - w_n, x_{n+1} - p \rangle \\ &\leq \|w_n - p\|^{\gamma} - \|x_{n+1} - w_n\|^{\gamma} + \gamma \lambda [f(y_n, p) - f(y_n, x_{n+1})] \\ &= \|w_n - p\|^{\gamma} - \|x_{n+1} - w_n\|^{\gamma} \\ &\quad + \gamma \lambda [f(y_{n-1}, x_{n+1}) - f(y_{n-1}, y_n) - f(y_n, x_{n+1})] \\ &\quad + \gamma \lambda [f(y_{n-1}, y_n) - f(y_{n-1}, x_{n+1})] + \gamma \lambda f(y_n, p). \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

چون $x_{n+1} \in H_n$ پس $\langle w_n - y_n, x_{n+1} - y_n \rangle \leq \lambda \langle k_n, x_{n+1} - y_n \rangle$ که $k_n \in \partial_{\gamma} f(y_{n-1}, y_n)$ بنابراین

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^{\gamma} &\leq \|w_n - p\|^{\gamma} - \|x_{n+1} - w_n\|^{\gamma} \\ &\quad + \gamma \lambda [c_1 \|y_{n-1} - y_n\|^{\gamma} + c_2 \|y_n - x_{n+1}\|^{\gamma}] \\ &\quad + \gamma \langle w_n - y_n, y_n - x_{n+1} \rangle + \gamma \lambda f(y_n, p) \\ &= \|w_n - p\|^{\gamma} - (\gamma - \gamma \lambda c_2) \|y_n - x_{n+1}\|^{\gamma} + \gamma \lambda c_1 \|y_{n-1} - y_n\|^{\gamma} \\ &\quad - \|w_n - y_n\|^{\gamma} + \gamma \lambda f(y_n, p) \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \|y_{n-1} - y_n\|^{\gamma} &= \|y_{n-1} - w_n\|^{\gamma} + \|w_n - y_n\|^{\gamma} + \gamma \langle y_{n-1} - w_n, w_n - y_n \rangle \\ &\leq \gamma \|y_{n-1} - w_n\|^{\gamma} + \gamma \|w_n - y_n\|^{\gamma}. \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

چون $p \in EP(f)$ و f یکنواخت است، نتیجه می شود که $f(y_n, p) \leq \circ$ بنابراین با استفاده از روابط (۴.۳) و (۵.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^{\gamma} &\leq \|w_n - p\|^{\gamma} - (\gamma - \gamma \lambda c_2) \|y_n - x_{n+1}\|^{\gamma} \\ &\quad - (\gamma - \gamma \lambda c_1) \|w_n - y_n\|^{\gamma} + \gamma \lambda c_1 \|y_{n-1} - w_n\|^{\gamma}. \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

علاوه بر این با استفاده از لم ۶.۲ داریم

$$\|w_n - p\|^{\gamma} = (\gamma + \theta) \|x_n - p\|^{\gamma} - \theta \|x_{n-1} - p\|^{\gamma} + \theta (\gamma + \theta) \|x_n - x_{n-1}\|^{\gamma}, \quad (۷.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - y_n\|^{\gamma} &= (\gamma + \theta) \|x_{n+1} - y_n\|^{\gamma} - \theta \|x_n - y_n\|^{\gamma} \\ &\quad + \theta (\gamma + \theta) \|x_{n+1} - x_n\|^{\gamma} \\ &\leq (\gamma + \theta) \|x_{n+1} - y_n\|^{\gamma} + \theta (\gamma + \theta) \|x_{n+1} - x_n\|^{\gamma}. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

با استفاده از روابط (۶.۳) و (۷.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (\lambda + \theta)\|x_n - p\|^2 - \theta\|x_{n-1} - p\|^2 + \theta(\lambda + \theta)\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad - (\lambda - 2\lambda c_\gamma)\|y_n - x_{n+1}\|^2 - (\lambda - 4\lambda c_\lambda)\|w_n - y_n\|^2 \\ &\quad + 4\lambda c_\lambda\|y_{n-1} - w_n\|^2. \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

روابط (۸.۳) و (۹.۳) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 - \theta\|x_n - p\|^2 + 4\lambda c_\lambda\|w_{n+1} - y_n\|^2 \\ \leq \|x_n - p\|^2 - \theta\|x_{n-1} - p\|^2 + 4\lambda c_\lambda\|w_n - y_{n-1}\|^2 \\ - (\lambda - 4\lambda c_\lambda)\|w_n - y_n\|^2 + \theta(\lambda + \theta)\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ - (\lambda - 2\lambda(2c_\lambda + 2c_\lambda\theta + c_\gamma))\|x_{n+1} - y_n\|^2 \\ + 4\lambda c_\lambda\theta(\lambda + \theta)\|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

اکنون قرار می‌دهیم $\sigma = \lambda - 4\lambda c_\lambda - 4\lambda c_\lambda\theta - 2\lambda c_\gamma$ در این صورت $\sigma < \lambda$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1}(p) &\leq \Lambda_n(p) - \sigma(\|w_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2) \\ &\quad + \theta(\lambda + \theta)\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad + 4\lambda c_\lambda\theta(\lambda + \theta)\|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

به آسانی دیده می‌شود که

$$\|w_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2 \geq \frac{1}{\gamma}\|w_n - x_{n+1}\|^2.$$

با استفاده از تعریف w_n خواهیم داشت

$$\frac{1}{\gamma}\|w_n - x_{n+1}\|^2 = \frac{1}{\gamma}\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{1}{\gamma}\theta^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \theta\langle x_n - x_{n+1}, x_n - x_{n-1} \rangle.$$

از طرفی با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتز می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \|w_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2 &\geq \frac{1}{\gamma}\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{1}{\gamma}\theta^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad + \theta\|x_n - x_{n+1}\|\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\geq \frac{1}{\gamma}\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{1}{\gamma}\theta^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad - \frac{\theta}{\gamma}\|x_n - x_{n+1}\|^2 - \frac{\theta}{\gamma}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= \frac{1-\theta}{\gamma}\|x_n - x_{n+1}\|^2 - \frac{\theta(1-\theta)}{\gamma}\|x_n - x_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (۱۲.۳)$$

با ضرب طرفین رابطه (۱۲.۳) در $(-\sigma)$ نتیجه می‌گیریم که

$$-\sigma(\|w_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2) \leq -\frac{\sigma}{\gamma}(1-\theta)\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\theta(1-\theta)\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

که رابطه زیر را ایجاب می‌کند

$$\Lambda_{n+1}(p) \leq \Lambda_n(p) - \Gamma_2\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \Gamma_1\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

□

لم ۹.۳. فرض کنید شرایط E و F برقرار باشند و $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ دنباله های تولید شده توسط الگوریتم ۵.۳ باشد. برای هر $n \geq 0$ و برای هر $p \in EP(f)$ $\varphi_n(p)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi_n(p) = \|x_n - p\|^2 - \theta \|x_{n-1} - p\|^2 + 4\lambda c_1 \|w_n - y_{n-1}\|^2 + \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

در این صورت حد دنباله $\{\varphi_n(p)\}$ موجود است و $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ وقتی که $n \rightarrow \infty$.

اثبات. با استفاده از تعاریف $\varphi_n(p)$ و $\Lambda_n(p)$ به آسانی دیده می شود

$$\varphi_n(p) = \Lambda_n(p) + \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

با استفاده از لم ۸.۳ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(p) - \varphi_n(p) &= \Lambda_{n+1}(p) + \Gamma_1 \|x_{n+1} - x_n\|^2 - \Lambda_n(p) - \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\leq (\Gamma_1 - \Gamma_2) \|x_{n+1} - x_n\|^2 = -(\Gamma_2 - \Gamma_1) \|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (13.3)$$

توجه داشته باشید که $1 - 4\lambda c_1 - \sigma < 1$ و بنابراین $1 + 4\lambda c_1 < 2 - \sigma$. پس از شرط (F2) و تعاریف Γ_1 و Γ_2 داریم

$$\begin{aligned} \Gamma_2 - \Gamma_1 &= \frac{\sigma}{2}(1 - \theta) - 4\lambda c_1 \theta(1 + \theta) - \theta(1 + \theta) - \frac{\sigma}{2}\theta(1 - \theta) \\ &= \frac{\sigma}{2}(1 - \theta) - (1 + 4\lambda c_1)\theta(1 + \theta) - \frac{\sigma}{2}\theta(1 - \theta) \\ &\geq \frac{\sigma(1 - \theta) - 2(2 - \sigma)\theta(1 + \theta) - \sigma\theta(1 - \theta)}{2} \\ &= \frac{\sigma(1 + 3\theta^2) - 4\theta(1 + \theta)}{2} > 0. \end{aligned} \quad (14.3)$$

بنابراین از روابط (۱۳.۳) و (۱۴.۳) نتیجه می شود که $\varphi_{n+1}(p) - \varphi_n(p) \leq 0$ یعنی دنباله $\{\varphi_n(p)\}$ ناصعودی است. بعلاوه

$$\varphi_n(p) \geq \|x_n - p\|^2 - \theta \|x_{n-1} - p\|^2 + \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2. \quad (15.3)$$

از طرفی داریم

$$\Gamma_1 = \theta(1 + \theta) + \frac{\sigma}{2}\theta(1 - \theta) = \theta\left(1 + \frac{2\theta + \sigma(1 - \theta)}{2}\right).$$

حال با تعریف $k = \frac{2\theta + \sigma(1 - \theta)}{2} > 0$ خواهیم داشت

$$\Gamma_1 - \theta\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 0. \quad (16.3)$$

با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتز به آسانی دیده می شود

$$\begin{aligned} 2\langle x_{n-1} - x_n, x_n - p \rangle &\leq 2\|x_{n-1} - x_n\| \|x_n - p\| \\ &\leq \frac{1}{k} \|x_{n-1} - x_n\|^2 + k \|x_n - p\|^2. \end{aligned} \quad (17.3)$$

از رابطه (۱۷.۳) می توانیم نتیجه بگیریم

$$\|x_{n-1} - p\|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \|x_{n-1} - x_n\|^2 + (1 + k) \|x_n - p\|^2. \quad (18.3)$$

پس روابط (۱۵.۳)، (۱۶.۳) و (۱۸.۳) ایجاب می کند

$$\begin{aligned} \varphi_n(p) &\geq (1 - \theta(1 + k)) \|x_n - p\|^2 + \left(\Gamma_1 - \theta\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= (1 - \theta(1 + k)) \|x_n - p\|^2. \end{aligned} \quad (19.3)$$

واضح است که

$$(1 - \theta(1 + k)) = \frac{\sigma(1 - \theta)^2 - 2\theta^2}{(2 - \sigma)\theta + \sigma},$$

و $[\sigma(1 - \theta)^2 - 2\theta^2] - [\sigma(1 + 3\theta^2) - 4\theta(1 + \theta)] = (1 - \sigma)2\theta^2 + (2 - \sigma)2\theta \geq 0$ از شرط $(F2)$ نتیجه می‌شود $(1 - \theta(1 + k)) > 0$ ، از این رو از رابطه (19.3) نتیجه می‌شود که برای هر $n \geq 0$ ، $\varphi_n(p) \geq 0$ و چون $\{\varphi_n(p)\}$ ناصعودی است پس حد دنباله $\{\varphi_n(p)\}$ موجود است. حال اگر از طرفین رابطه (13.3) وقتی $n \rightarrow \infty$ حد بگیریم، با توجه به اینکه $\Gamma_1 - \Gamma_2 > 0$ ، نتیجه می‌شود $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$. \square

قضیه 10.3. فرض کنید شرایط E و F برقرار باشند. دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم 5.3 به طور ضعیف به یک عضو از $EP(f)$ همگرا هستند.

اثبات. از تعریف $\Lambda_n(p)$ و $\varphi_n(p)$ نتیجه می‌شود $\Lambda_n(p) = \varphi_n(p) - \Gamma_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2$ که در این صورت لم 9.3 ایجاب می‌کند حد دنباله $\{\Lambda_n(p)\}$ موجود است. بنابراین از رابطه (11.3) و لم 9.3 می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(\|w_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2) \\ &\leq \Lambda_n(p) - \Lambda_{n+1}(p) + \theta(1 + \theta)\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad + 4\lambda c_1 \theta(1 + \theta)\|x_{n+1} - x_n\|^2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (20.3)$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ از این رو می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0. \quad (21.3)$$

بنابراین از رابطه (21.3) و لم 9.3 نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ همچنین با استفاده از رابطه (8.3) نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_{n+1}\| = 0$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_{n+1} - y_n\| = 0$ ، بنابراین دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ هم کراندار هستند. از تعریف y_{n+1} نتیجه می‌شود که برای هر $y \in C$

$$\langle w_{n+1} - y_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle \leq \lambda(f(y_n, y) - f(y_n, y_{n+1})),$$

و از این رو برای هر $y \in C$

$$\frac{\langle w_{n+1} - y_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle}{\lambda} \leq f(y_n, y) - f(y_n, y_{n+1}).$$

اکنون فرض کنید \bar{x} نقطه حدی ضعیف دنباله $\{x_n\}$ باشد، یعنی زیردنباله $\{x_m\}$ از $\{x_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که به طور ضعیف به \bar{x} همگرا باشد. پس دنباله $\{y_m\}$ هم به \bar{x} همگرا است. چون C زیرمجموعه بسته از H است و $\{y_n\} \subseteq C$ ، پس $\bar{x} \in C$ با استفاده از رابطه (21.3) ، وقتی $m \rightarrow \infty$ می‌توان نتیجه گرفت که طرف چپ نابرابری فوق به صفر همگرا است، بنابراین شرط $(E6)$ و لم 9.3 برای هر $y \in C$ ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n, y_{n+1}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\langle w_{n+1} - y_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. + f(y_n, y_{n+1}) \right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n, y). \end{aligned} \quad (22.3)$$

حال از شرط $(E7)$ نتیجه می‌شود $\bar{x} \in EP(f)$

حال نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به \bar{x} همگرا است. فرض کنید زیردنباله دیگری مانند $\{x_k\}$ از $\{x_n\}$ موجود باشد که به طور ضعیف به x^* همگرا باشد و $x^* \neq \bar{x}$. به همان روشی که در بالا بیان شد می‌توان نشان داد که $x^* \in EP(f)$. بنابراین

$$2\langle x_n, \bar{x} - x^* \rangle = \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 - \|x^*\|^2 \quad (23.3)$$

$$\langle x_{n-1}, \bar{x} - x^* \rangle = \|x_{n-1} - x^*\|^2 - \|x_{n-1} - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 - \|x^*\|^2 \quad (24.3)$$

با ضرب طرفین رابطه (۲۴.۳) در θ و تفریق طرفین آن از رابطه (۲۳.۳) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \langle x_n - \theta x_{n-1}, \bar{x} - x^* \rangle &= (\|x_n - x^*\|^2 - \theta \|x_{n-1} - x^*\|^2) \\ &\quad - (\|x_n - \bar{x}\|^2 - \theta \|x_{n-1} - \bar{x}\|^2) + (1 - \theta)(\|\bar{x}\|^2 - \|x^*\|^2) \quad (25.3) \\ &= \Delta_n(x^*) - \Delta_n(\bar{x}) + (1 - \theta)(\|\bar{x}\|^2 - \|x^*\|^2) \end{aligned}$$

که در آن برای هر $n \geq 0$ و هر $p \in EP(f)$ $\Delta_n(p) = \|x_n - p\|^2 - \theta \|x_{n-1} - p\|^2$ و $\Delta_n(p) = \Lambda_n(p) - \lambda c_1 \|y_{n-1} - w_n\|^2$ چون $\{\Delta_n(p)\}$ حد دنباله $p \in EP(f)$ پس برای هر $\|w_n - y_{n-1}\| \rightarrow 0$ و $\Delta_n(p) = \Lambda_n(p) - \lambda c_1 \|y_{n-1} - w_n\|^2$ موجود است. چون $x^*, \bar{x} \in EP(f)$ از رابطه (۲۵.۳) نتیجه می‌شود که حد دنباله $\{\langle x_n - \theta x_{n-1}, \bar{x} - x^* \rangle\}$ موجود است. فرض کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - \theta x_{n-1}, \bar{x} - x^* \rangle = l \quad (26.3)$$

با فرض $n = m = k \rightarrow \infty$ در رابطه (۲۶.۳) داریم

$$\begin{aligned} \langle x^* - \theta x^*, \bar{x} - x^* \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_m - \theta x_{m-1}, \bar{x} - x^* \rangle = l \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k - \theta x_{k-1}, \bar{x} - x^* \rangle \quad (27.3) \\ &= \langle \bar{x} - \theta \bar{x}, \bar{x} - x^* \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $(1 - \theta)\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0$ و چون $\theta \in [0, 1)$ پس $\bar{x} = x^*$ بنابراین دنباله $\{x_n\}$ به‌طور ضعیف به \bar{x} همگراست. \square از این‌رو دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ نیز به‌طور ضعیف به \bar{x} همگرا هستند.

۱.۳ الگوریتم لخت برای حل مسائل نابرابری تغییراتی

می‌دانیم که اگر $A : H \rightarrow H$ یک نگاشت باشد و برای هر $x, y \in C$ دو تابع تعادل f را با ضابطه $f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ تعریف کنیم، آنگاه مسئله تعادل به مسئله نابرابری تغییراتی VIP تبدیل می‌شود. مجموعه جواب مسئله نابرابری تغییراتی را با نماد $VI(C, A)$ نشان می‌دهیم. اگر A یک نگاشت پیوسته لیپ‌شیتس باشد که ثابت لیپ‌شیتس آن مشخص نباشد، آنگاه با روش‌های متعارف، مسئله نابرابری تغییراتی به راحتی قابل حل نخواهد بود. برای غلبه بر این مشکل، یک روش خود-سازگار برای حل مسائل نابرابری تغییراتی ارائه می‌دهیم که در آن نیازی به دانستن ثابت لیپ‌شیتس L نمی‌باشد.

الگوریتم ۱.۱.۳. روش خود-سازگار^{۱۰} لخت برای حل VIP

گام ۰: فرض کنید $\theta \in [0, 1)$ و $\mu > 0$.

گام ۱: فرض کنید $x_0, y_0, x_1 \in H$ ، $ax_0 = x_0 + \theta(x_0 - x_0)$ ، $aw_0 = x_0 + \theta(x_0 - x_0)$ ، $ay_0 = P_C(w_0 - Ay_0)$ و $n = 1$ تعریف کنید

$$\lambda_n = \begin{cases} \mu \frac{\|y_n - y_{n-1}\|}{\|Ay_n - Ay_{n-1}\|} & \text{if } \|Ay_n - Ay_{n-1}\| \neq 0, \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

گام ۲: نیم‌فضای H_n را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$H_n = \{y \in H : \langle w_n - \lambda_n Ay_{n-1} - y_n, y - y_n \rangle \leq 0\}.$$

¹⁰Self-adaptive

گام ۳: مقادیر زیر را به دست آورید

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= P_{H_n}(w_n - \lambda_n A y_n), \\w_{n+1} &= x_{n+1} + \theta(x_{n+1} - x_n),\end{aligned}$$

و

$$y_{n+1} = P_C(w_{n+1} - \lambda_n A y_n).$$

گام ۴: اگر $y_{n+1} = w_{n+1} = y_n$ آنگاه y_n عضوی از $VI(C, A)$ است، در غیر این صورت قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ بروید.

برای بررسی الگوریتم ۱۱.۳، فرض خواهیم کرد که شرط زیر نیز برقرار باشد: (شرط G)

$$(1 - \mu)(1 - \theta)^2 - 2\theta(1 + \theta)(1 + \mu) > 0.$$

به راحتی می‌توان مقادیر μ و θ را چنان انتخاب کرد که شرط G برقرار شود. به‌عنوان نمونه

$$0 < \mu < \frac{1 - 4\theta - \theta^2}{3\theta^2 + 1} \quad 0 \leq \theta < \sqrt{5} - 2.$$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید $A : H \rightarrow H$ یک نگاشت یکنوانما، F -هم‌پیوسته و پیوسته لیپ‌شیتس باشد که مقدار ثابت لیپ‌شیتس آن نامشخص است و $VI(C, A) \neq \emptyset$. در این صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم ۱۱.۳، به‌طور ضعیف به عضوی از $VI(C, A)$ همگرا هستند.

اثبات. ابتدا همانند اثبات لم ۸.۳، برای هر $z \in VI(C, A)$ ، تعریف می‌کنیم

$$\Omega_n(z) = \|x_n - z\|^2 - \theta\|x_{n-1} - z\|^2 + \mu\|w_n - y_{n-1}\|^2.$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\Omega_{n+1}(z) \leq \Omega_n(z) + \Xi_1\|x_n - x_{n-1}\|^2 - \Xi_2\|x_{n+1} - x_n\|^2,$$

که در آن $\Xi_1 = (1 - \mu)\frac{\theta(1-\theta)}{4} + \theta(1 + \theta)$ و $\Xi_2 = (1 - \mu)\frac{1-\theta}{4} - \mu\theta(1 + \theta)$. با استفاده از تعریف x_{n+1} و ویژگی لم ۱۲.۲ (۲) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|w_n - \lambda_n A y_n - z\|^2 - \|w_n - \lambda_n A y_n - x_{n+1}\|^2 \\ &= \|w_n - z\|^2 - \|w_n - x_{n+1}\|^2 - 2\lambda_n \langle A y_n, x_{n+1} - z \rangle.\end{aligned} \quad (28.3)$$

از یکنوانما بودن A نتیجه می‌شود $\langle A y_n, y_n - z \rangle \geq 0$ ، پس رابطه زیر به دست می‌آید

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|w_n - z\|^2 - \|w_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n \langle A y_n, y_n - x_{n+1} \rangle.$$

از طرفی

$$\|w_n - x_{n+1}\|^2 = \|w_n - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\langle w_n - y_n, y_n - x_{n+1} \rangle,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|w_n - z\|^2 - \|w_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2\langle \lambda_n A y_n + y_n - w_n, y_n - x_{n+1} \rangle \\ &= \|w_n - z\|^2 - \|w_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_n \langle A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n \rangle \\ &\quad + 2\langle w_n - \lambda_n A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n \rangle.\end{aligned}$$

چون $x_{n+1} \in H_n$ نتیجه می شود $\langle w_n - \lambda_n A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n \rangle \leq 0$. همچنین به آسانی دیده می شود

$$\begin{aligned} 2\lambda_n \langle A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n \rangle &\leq 2\mu \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \\ &\leq 2\mu (\|y_{n-1} - w_n\| + \|w_n - y_n\|) \|x_{n+1} - y_n\| \\ &\leq \mu (\|y_{n-1} - w_n\|^2 + \|w_n - y_n\|^2 + 2\|x_{n+1} - y_n\|^2). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|w_n - z\|^2 - (\lambda - \mu) \|w_n - y_n\|^2 \\ &\quad - (\lambda - 2\mu) \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \mu \|y_{n-1} - w_n\|^2. \end{aligned} \quad (29.3)$$

روابط (۷.۳)، (۸.۳) و (۲۹.۳) می توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \theta \|x_n - z\|^2 + \mu \|w_{n+1} - y_n\|^2 \\ \leq \|x_n - z\|^2 - \theta \|x_{n-1} - z\|^2 + \mu \|w_n - y_{n-1}\|^2 + \theta(\lambda + \theta) \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ + \mu\theta(\lambda + \theta) \|x_{n+1} - x_n\|^2 - (\lambda - 2\mu - \mu\theta) \|x_{n+1} - y_n\|^2 \\ - (\lambda - \mu) \|w_n - y_n\|^2. \end{aligned}$$

چون $(\lambda - 2\mu - \mu\theta) \leq (\lambda - \mu)$ پس

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1}(z) &\leq \Omega_n(z) - (\lambda - \mu) (\|w_n - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2) \\ &\quad + \theta(\lambda + \theta) \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad + \mu\theta(\lambda + \theta) \|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (30.3)$$

با استفاده از روابط (۳۰.۳) و (۲۰.۳) و شرط G نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1}(z) &\leq \Omega_n(z) + [(\lambda - \mu) \frac{\theta(\lambda - \theta)}{2} + \theta(\lambda + \theta)] \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad - [(\lambda - \mu) \frac{\lambda - \theta}{2} - \mu\theta(\lambda + \theta)] \|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \Xi_2 - \Xi_1 &= (\lambda - \mu) \frac{\lambda - \theta}{2} - \mu\theta(\lambda + \theta) - [(\lambda - \mu) \frac{\theta(\lambda - \theta)}{2} + \theta(\lambda + \theta)] \\ &= \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \theta)^2 - 2\theta(\lambda + \theta)(\lambda + \mu)}{2} > 0. \end{aligned} \quad (31.3)$$

حال تعریف می کنیم

$$\psi_n(z) = \Omega_n(z) + \Xi_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

همانند اثبات لم ۹.۳، نتیجه می شود $\psi_{n+1}(z) - \psi_n(z) < 0$ و به آسانی دیده می شود که برای هر $n \geq 0$ رابطه $\psi_n(z) \geq 0$ برقرار است. از این رو حد دنباله $\{\psi_n(z)\}$ موجود است و وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\|x_{n-1} - x_n\| \rightarrow 0$ از طرفی

$$\psi_n(z) \geq \|x_n - z\|^2 - \theta \|x_{n-1} - z\|^2 + \Xi_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2. \quad (32.3)$$

بعلاوه

$$\Xi_1 = \theta \left(\lambda + \frac{2\theta + (\lambda - \mu)(\lambda - \theta)}{2} \right).$$

با تعریف $\eta := \frac{2}{2\theta + (\lambda - \mu)(\lambda - \theta)}$ خواهیم داشت:

$$\Xi_1 - \theta \left(\lambda + \frac{1}{\eta} \right) = 0.$$

به همان روشی که در روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳) مشاهده کردیم نتیجه می‌گیریم

$$\psi_n(z) \geq (1 - \theta(1 + \eta)) \|x_n - z\|^2.$$

واضح است که

$$(1 - \theta(1 + \eta)) = \frac{(1 - \theta)^2(1 - \mu) - 2\theta^2}{2\theta + (1 - \mu)(1 - \theta)}$$

و همچنین

$$(1 - \theta)^2(1 - \mu) - 2\theta^2 - (1 - \mu)(1 - \theta)^2 + 2\theta(1 + \theta)(1 + \mu) = 2\theta(1 + \mu(1 + \theta)) \geq 0.$$

بنابراین از شرط G نتیجه می‌شود $1 - \theta(1 + \eta) > 0$. پس از رابطه ۳۲.۳ نتیجه می‌شود که دنباله $\{x_n\}$ کراندار است. مشابه اثبات قضیه ۱۰.۳، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (33.3)$$

بنابراین دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ هم کراندار هستند. علاوه بر این، با استفاده از لم ۱۲.۲(۱) و تعریف y_{n+1} در گام ۲، برای هر $y \in C$ در گام ۲، نتیجه می‌شود

$$\langle y_{n+1} - w_{n+1} + \lambda_n A y_n, y - y_{n+1} \rangle \geq 0.$$

پس برای هر $y \in C$ داریم

$$0 \leq \langle y_{n+1} - w_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle + \lambda_n \langle A y_n, y_n - y_{n+1} \rangle + \lambda_n \langle A y_n, y - y_n \rangle \quad (34.3)$$

اگر \hat{x} نقطه حدی ضعیف دنباله $\{x_n\}$ باشد، آنگاه یعنی زیر دنباله $\{x_m\}$ از $\{x_n\}$ وجود داشته باشد، به طوری که به طور ضعیف به \hat{x} همگرا باشد پس دنباله $\{y_m\}$ هم به طور ضعیف به \hat{x} همگرا است. چون C زیرمجموعه بسته از H است و $\{y_n\} \subseteq C$ پس $\hat{x} \in C$ با تقسیم طرفین نابرابری فوق بر λ_n ، برای هر $y \in C$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$0 \leq \frac{\langle y_{n+1} - w_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle}{\lambda_n} + \langle A y_n, y_n - y_{n+1} \rangle + \langle A y_n, y - y_n \rangle \quad (35.3)$$

اکنون از طرفین نابرابری فوق حد می‌گیریم و n را به سمت $+\infty$ میل می‌دهیم. از اینکه تابع $\langle Ax, x - y \rangle$ به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است، با استفاده از رابطه (۳۳.۳) نتیجه می‌شود که برای هر $y \in C$ $\langle A\hat{x}, y - \hat{x} \rangle \geq 0$ یعنی $\hat{x} \in VI(C, A)$ همانند قضیه ۱۰.۳ می‌توان نشان داد دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به \hat{x} همگراست و \square بنابراین دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ نیز به طور ضعیف به \hat{x} همگرا هستند.

در اینجا با جایگذاری $\langle Ax, x - y \rangle$ به جای $f(x, y)$ در الگوریتم ۵.۳ که در آن A نگاشت پیوسته L -لیپ‌شیتس است، یک الگوریتم جدید برای حل VIP ارائه می‌دهیم. الگوریتم حاصل، الگوریتم ۱۰.۳ از [۱۱] را که به $MSEM$ معروف است، نتیجه می‌دهد.

الگوریتم ۱۳.۳. روش اکستراگرادیان زیرگرادیان بهبود یافته لخت برای حل VIP

گام ۰: فرض کنید $\theta \in [0, 1)$ و $\mu > 0$.

گام ۱: فرض کنید $x_0, y_0, x_1 \in H$ ، $w_1 = x_1 + \theta(x_1 - x_0)$ ، $a_1 = P_C(w_1 - A y_0)$ ، $y_1 = a_1$.

گام ۲: نیم‌فضای H_n را به صورت زیر تعریف کنید

$$H_n = \{y \in H : \langle w_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, y - y_n \rangle \leq 0\}.$$

گام ۳: مقادیر زیر را به دست آورید

$$x_{n+1} = P_{H_n}(w_n - \lambda A y_n),$$

$$w_{n+1} = x_{n+1} + \theta(x_{n+1} - x_n),$$

۹

$$y_{n+1} = P_C(w_{n+1} - \lambda A y_n).$$

گام ۴: اگر $y_{n+1} = w_{n+1} = y_n$ آنگاه y_n جواب $VI(C, A)$ است، در غیر این صورت قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ بروید.

قضیه ۱۴.۳. فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از H باشد و $A : H \rightarrow H$ نگاشت یکنوانما، F -هم‌پیوسته و پیوسته لیپ‌شیتس با ثابت $L > 0$ باشد و همچنین $VI(C, A) \neq \emptyset$. در این صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم ۱۳.۳ به طور ضعیف به یک عضوی از $VI(C, A)$ همگرا هستند.

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle \quad \forall x, y \in C,$$

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کرده‌ایم، f یک نگاشت نوع-لیپ‌شیتس با ثابت‌های $\frac{L}{4} = c_1 = c_2$ می‌باشد. با استفاده از مفروضات بیان شده به آسانی دیده می‌شود که شرایط E برقرار هستند و گام ۳ در الگوریتم ۵.۳ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H_n} \left\{ \lambda \langle A y_n, y - y_n \rangle + \frac{1}{4} \|y - w_n\|^2 \right\},$$

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda \langle A y_n, y - y_n \rangle + \frac{1}{4} \|y - w_{n+1}\|^2 \right\}.$$

بنابراین

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H_n} \left\{ \frac{1}{4} \|y - (w_n - \lambda A y_n)\|^2 \right\} = P_{H_n}(w_n - \lambda A y_n),$$

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \frac{1}{4} \|y - (w_{n+1} - \lambda A y_n)\|^2 \right\} = P_C(w_{n+1} - \lambda A y_n).$$

با استفاده از قضیه ۱۰.۳، می‌توان نتیجه گرفت که دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ به طور ضعیف به $x^* \in EP(f)$ همگرا هستند. \square یعنی دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{w_n\}$ به طور ضعیف به $x^* \in VI(C, A)$ همگرا هستند.

۴ نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی الگوریتم‌های معرفی شده در این مقاله، با ارائه چند مثال، الگوریتم‌های پیشنهادی را با الگوریتم‌های ارائه شده توسط وینچ^{۱۱} [۱۳]، کُسی^{۱۲} [۱۵]، هیو^{۱۳} و تانگ^{۱۴} [۱۲] و دانگ^{۱۵} [۸] مقایسه می‌کنیم. برای انجام این مقایسه، نقاط شروع و پارامترهای مشترک به صورت یکسان در نظر گرفته خواهند شد. همچنین شرط توقف برای همه الگوریتم‌ها به صورت یکسان در نظر گرفته خواهد شد. ابتدا الگوریتم‌هایی را که مقایسه با آن‌ها انجام می‌گیرد به اختصار بیان می‌کنیم.

در سال ۲۰۱۸، وینچ [۱۳]، یک الگوریتم نسبت طلایی برای حل مسائل تعادل به صورت زیر ارائه کرد و نشان داد دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط این الگوریتم به طور ضعیف به یک جواب EP همگراست.

فرض کنید $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ نسبت طلایی باشد، یعنی $\varphi^2 = \varphi + 1$ و پارامتر λ را به گونه‌ای انتخاب کنید که $0 < \lambda \leq \min\left\{\frac{\varphi}{4c_1}, \frac{\varphi}{4c_2}\right\}$.

¹¹Vinh

¹²Kassay

¹³Hieu

¹⁴Thong

¹⁵Dong

الگوریتم ۱.۴. الگوریتم GRA

گام ۱) نقاط شروع $x_0 \in C$ و $y_1 \in C$ را در نظر گرفته و قرار دهید $n = 0$.

گام ۲) مقادیر زیر را محاسبه کنید

$$x_n = \frac{(\varphi - 1)y_n + x_{n-1}}{\varphi},$$

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ f(y_n, y) + \frac{1}{\varphi} \|y - x_n\|^2 \right\}.$$

گام ۳) اگر $y_{n+1} = y_n = x_n$ آنگاه y_{n+1} جواب مسئله است، در غیر این صورت قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۱) بروید.

در سال ۱۸۰۲ کِسی [۱۵]، یک الگوریتم اکستراگرادیان زیرگرادیان برای حل مسائل تعادل به صورت زیر معرفی و ثابت کرد دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط این الگوریتم به طور ضعیف به یک جواب EP همگراست.

الگوریتم ۲.۴. الگوریتم KA

گام ۰: برای هر x_0, y_0 داده شده محاسبه کنید

$$x_1 = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y_0, y) + \frac{1}{\varphi} \|y - x_0\|^2 \right\}$$

$$y_1 = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y_0, y) + \frac{1}{\varphi} \|y - x_1\|^2 \right\}$$

گام ۱: فرض کنید x_n, y_{n-1}, x_n و y_n داده شده باشند و فرض کنید $\omega_n \in \partial_2 f(y_{n-1}, y_n)$ به طوری که $q_n \in N_C(y_n)$ موجود باشد که

$$0 = \lambda \omega_n + y_n - x_n + q_n,$$

نیم فضای H_n را به صورت زیر محاسبه کنید

$$H_n = \{z \in H : \langle x_n - \lambda \omega_n - y_n - n, z - y_n \rangle \leq 0\},$$

و به دست آورید

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H_n} \left\{ \lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\varphi} \|y - x_n\|^2 \right\}$$

$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y_n, y) + \frac{1}{\varphi} \|y - x_{n+1}\|^2 \right\}$$

گام ۲: اگر $x_{n+1} = x_n$ و $y_n = y_{n-1}$ آنگاه توقف کنید، در غیر این صورت قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۱) برگردید.

در سال ۱۸۰۲ هیو و تانگ [۱۲]، با استفاده از تصویر متریک، الگوریتمی را برای حل مسئله نابرابری تغییراتی به صورت زیر ارائه کرده و نشان دادند که دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط این الگوریتم به طور ضعیف به یک جواب VIP همگراست. فرض کنید $x_0 \in H$ و دنباله $\{\alpha_n\}$ را به گونه ای در نظر بگیرید که دو شرط زیر برقرار باشند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

الگوریتم ۳.۴. Hieu

(گام ۱) محاسبه کنید

$$y_n = P_C(x_n - \alpha_n A x_n).$$

اگر $x_n = y_n$ آنگاه x_n جواب مسئله VIP است، در غیر این صورت به گام ۲ بروید.(گام ۲) زیر فضای $T_n = \{x \in H : x_n - \alpha_n A x_n - y_n, x - y_n \leq 0\}$ را ایجاد کنید و مقدار زیر را محاسبه نمایید

$$x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \alpha_n A y_n).$$

قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۱ بروید.

در سال ۱۸۰۲ دانگ [۸]، الگوریتم اکستراگرادیان زیر را برای حل مسائل نابرابری تغییراتی ارائه کرد و نشان داد که دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط این الگوریتم به طور ضعیف به یک جواب VIP همگراست.

الگوریتم ۴.۴. iEgA

برای نگاشت یکنوا و $-L$ پیوسته لیپشیتس $A : H \rightarrow H$ و زیرمجموعه محدب و بسته C از H ، دنباله $\{x_n\}$ را از الگوریتم زیر به دست می آوریم

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}), \\ y_n = P_C(w_n - \tau A w_n), \\ x_{n+1} = (1 - \lambda_n)w_n + \lambda_n P_C(w_n - \tau A y_n), \end{cases}$$

که در آن $0 < \tau < \frac{1}{L}$ ، دنباله $\{\alpha_n\}$ نازولی است و $\alpha_1 = 0$ و برای هر $n \geq 1$ داریم $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$ و $\lambda, \sigma, \delta > 0$ و به گونه ای هستند که

$$\delta > \frac{\alpha[(1 + \tau L)^\nu \alpha(1 + \alpha) + (1 - \tau^\nu L^\nu)\alpha\sigma + \sigma(1 + \tau L)^\nu]}{1 - \tau^\nu L^\nu}$$

و

$$0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \frac{\delta(1 - \tau^\nu L^\nu) - \alpha[(1 + \tau L)^\nu \alpha(1 + \alpha) + (1 - \tau^\nu L^\nu)\alpha\sigma + \sigma(1 + \tau L)^\nu]}{\sigma[(1 + \tau L)^\nu \alpha(1 + \alpha) + (1 - \tau^\nu L^\nu)\alpha\sigma + \sigma(1 + \tau L)^\nu]}.$$

حال با ارائه چند مثال، کارایی الگوریتم های جدید ارائه شده در این مقاله را با الگوریتم های اشاره شده در بالا مقایسه می کنیم.

مثال ۵.۴. دو تابع تعادل $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم

$$f(x, y) = \langle Px + Qy + q, y - x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^5$$

که در آن q یک بردار در \mathbb{R}^5 ، P یک ماتریس مربعی از مرتبه ۵ و Q یک ماتریس متقارن نیم معین مثبت از مرتبه ۵ و همچنین $Q - P$ نیم معین منفی به صورت زیر هستند

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3/1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

	$x_0 = (-1, 0, 0, 0, 0)$		$x_0 = (3, -2, -1, 2, 1)$		$x_0 = (-1, -2, 1, 2, 0)$	
Algorithms	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec
$GRA \setminus$	۹۱	۸۵۵	۱۰۰	۹۲۲	۹۵	۸۷۸
KA	۳۱	۵۸۶	۳۸	۷۱۴	۳۶	۶۸۰
$Algorithm \setminus$	۲۷	۵۲۰	۳۳	۶۲۵	۳۱	۵۸۶

جدول ۱: مقایسه نتایج عددی الگوریتم ۵.۳، $GRA \setminus$ و KA با نقاط شروع متفاوت x_0 .
نمودار

قرار می‌دهیم

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^5 x_i \geq -1, -5 \leq x_i \leq 5, i = 1, \dots, 5 \right\}.$$

در جدول ۱، الگوریتم ۵.۳ ($Algorithm \setminus$)، الگوریتم $GRA \setminus$ و الگوریتم KA را با نقاط شروع متفاوت x_0 مقایسه کرده‌ایم، که در آن ستون 'Iter' نشان دهنده تعداد تکرارها و ستون 'Sec' نشان دهنده مدت زمان لازم برای اجرای الگوریتم‌ها بر حسب ثانیه تا رسیدن به شرط توقف می‌باشد. در تمام الگوریتم‌ها مقدار $\lambda = 0.27$ را در نظر گرفته و نقاط شروع x_0 را یکسان گرفته‌ایم. همچنین شرط توقف را برای الگوریتم ۵.۳ به صورت

$$\|y_{n+1} - w_{n+1}\| + \|w_{n+1} - y_n\| < 10^{-6}$$

برای $GRA \setminus$ به صورت

$$\|y_{n+1} - y_n\| + \|y_n - x_n\| < 10^{-6}$$

و برای KA به صورت

$$\|x_{n+1} - x_n\| + \|y_n - y_{n-1}\| < 10^{-6}$$

در نظر گرفته‌ایم. رفتار همگرایی این سه الگوریتم در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است. در این شکل، محور y -ها نشان دهنده $\log(\text{error})$ و محور x -ها نشان دهنده تعداد تکرار لازم برای رسیدن به شرط توقف می‌باشد. با توجه به جدول ۱ و شکل ۱ نتیجه می‌شود همگرایی الگوریتم ۵.۳ سریعتر از سایر الگوریتم‌ها است.

مثال ۶.۴ فرض کنید برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ نگاشت $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $A(x, y) = (x + y + \cos(x), -x + y + \cos(y))$ تعریف شده باشد. ابتدا یکنوا بودن نگاشت A را ثابت می‌کنیم. نقاط دلخواه $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. چون برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$

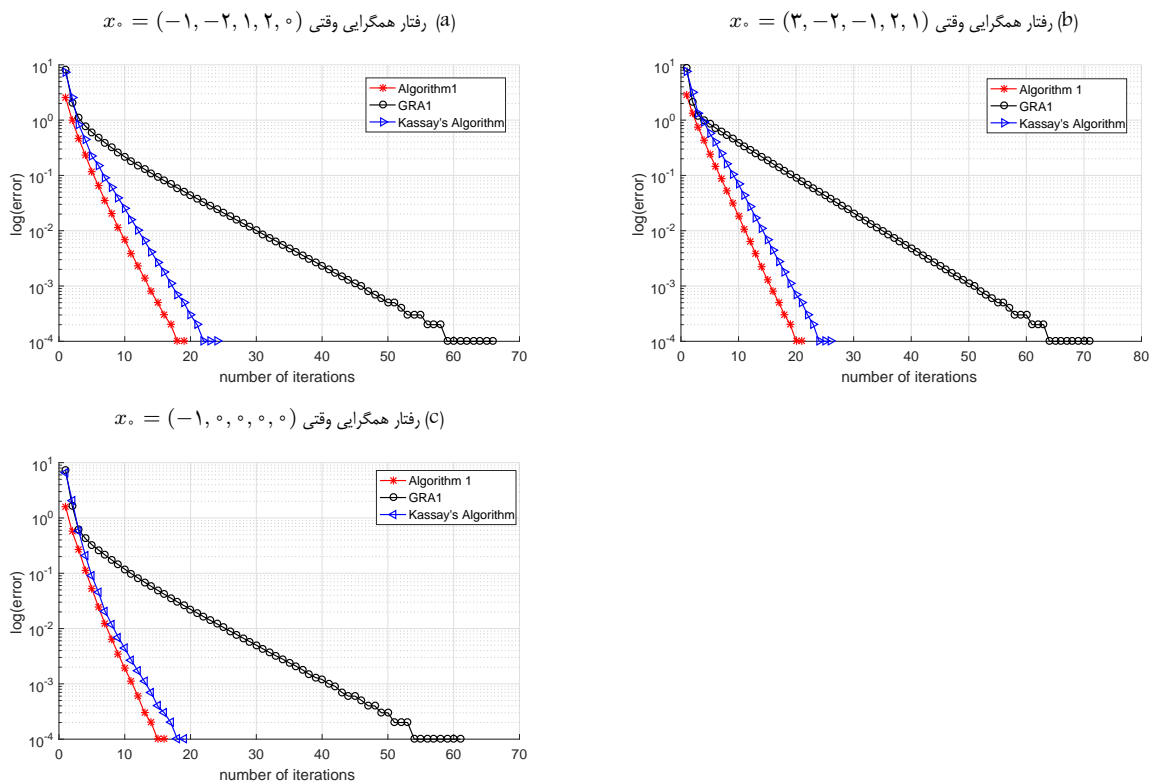
$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$

پس نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \langle Ax - Ay, x - y \rangle &= [(x_1 + x_2 + \cos(x_1)) - (y_1 + y_2 + \cos(y_1))](x_1 - y_1) \\ &\quad + [(-x_1 + x_2 + \cos(x_2)) - (-y_1 + y_2 + \cos(y_2))](x_2 - y_2) \\ &= (x_1 - y_1)^2 + (\cos(x_1) - \cos(y_1))(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)^2 \\ &\quad + (\cos(x_2) - \cos(y_2))(x_2 - y_2) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

بنابراین طبق رابطه (۱.۴)، نگاشت A یکنوا و از این رو یکنوانما است. حال باید نشان دهیم نگاشت A پیوسته لیپ‌شیتس است. به آسانی دیده می‌شود

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cos(x_1) - (y_1 + y_2 + \cos(y_1))| &\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\quad + |\cos(x_1) - \cos(y_1)| \\ &\leq 2|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \end{aligned} \quad (2.4)$$



شکل ۱: رفتار همگرایی الگوریتم ۳.۵، ۱ و GRA_1 با نقاط شروع متفاوت x_0 .

به روش مشابه داریم

$$\begin{aligned}
 |(-x_1 + x_2 + \cos(x_2)) - (-y_1 + y_2 + \cos(y_2))| &\leq |y_1 - x_1| + |x_2 - y_2| \\
 &\quad + |\cos(x_2) - \cos(y_2)| \tag{۳.۴} \\
 &\leq 2|x_2 - y_2| + |x_1 - y_1|.
 \end{aligned}$$

چون برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ، پس با ترکیب روابط (۲.۴) و (۳.۴) نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
 \|Ax - Ay\|^2 &= [(x_1 + x_2 + \cos(x_1)) - (y_1 + y_2 + \cos(y_1))]^2 \\
 &\quad + [(-x_1 + x_2 + \cos(x_2)) - (-y_1 + y_2 + \cos(y_2))]^2 \\
 &\leq (2|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 + (2|x_2 - y_2| + |x_1 - y_1|)^2 \\
 &\leq 10[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] = 10\|x - y\|^2, \tag{۴.۴}
 \end{aligned}$$

بنابراین A پیوسته لیبشیتس با ثابت $L = \sqrt{10}$ می باشد. فرض کنید $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq 10b\}$ که در آن $a = (-20, -20)$ و $b = (20, 20)$. با مفروضات بیان شده الگوریتم ۱۱.۳ (Algorithm ۲)، الگوریتم ۱۳.۳ (Algorithm ۳)، الگوریتم $iEgA$ و الگوریتم $Hieu$ را برای حل VIP باهم مقایسه می کنیم. در تمامی این الگوریتم ها نقاط شروع x_0 را یکسان فرض کرده و با توجه به اینکه برای هر $x \in VI(A, C)$ داریم $x = P_C(x - Ax)$ ، در تمام این الگوریتم ها از شرط توقف یکسان

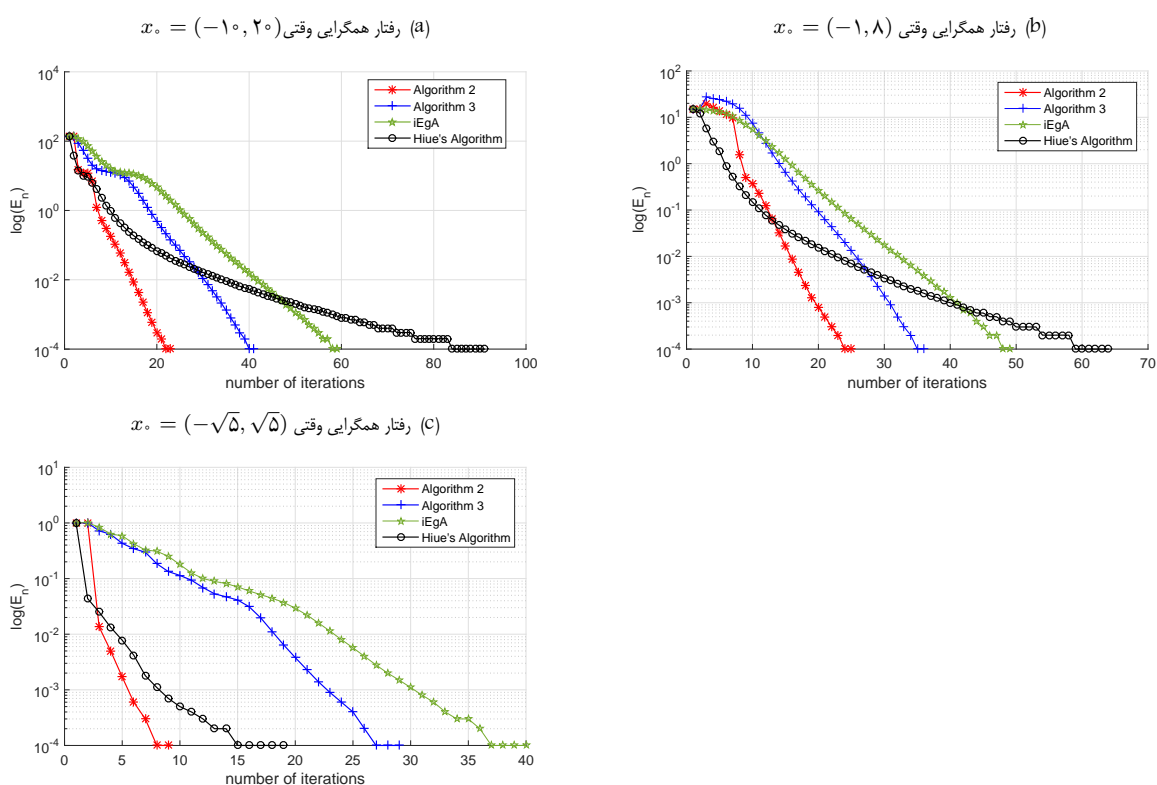
$$E_n = \|x_n - P_C(x_n - Ax_n)\|^2 < 10^{-4}$$

استفاده می کنیم. اگر وقتی $n \rightarrow \infty$ نتیجه بگیریم $\{E_n\}$ به صفر همگرا است، یعنی $\{x_n\}$ به جوابی از مسئله VIP همگرا است. در الگوریتم ۱۱.۳، الگوریتم ۱۳.۳، الگوریتم $Hieu$ و الگوریتم $iEgA$ قرار می دهیم

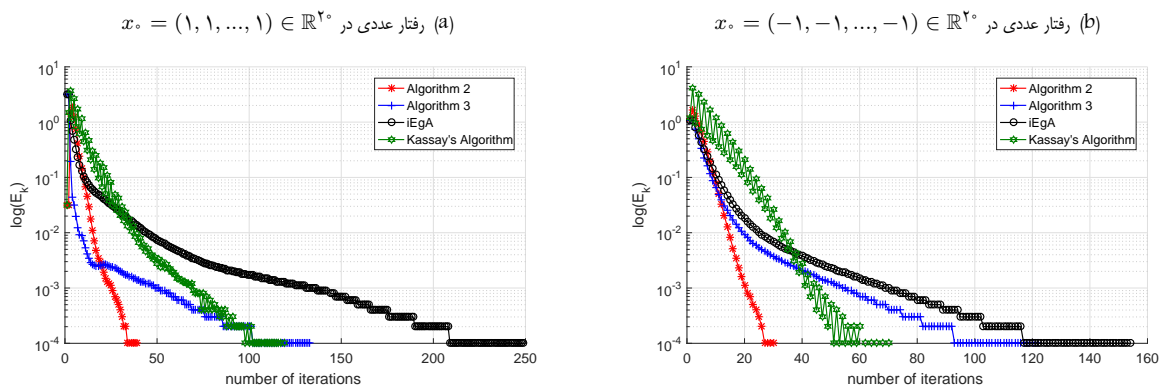
$$\lambda = \frac{1}{37.5L}, \theta = 0.1, \tau = \frac{1}{2L}, \lambda_n = 0.6, \mu = \frac{1}{4},$$

	$x_0 = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$		$x_0 = (-1, 8)$		$x_0 = (-10, 20)$	
Algorithms	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec
Algorithm ۲	۲۷	۹/۶۸	۲۵	۸/۹۳	۱۵	۶/۷۵
Algorithm ۳	۳۸	۱۱/۶۴	۴۳	۱۲/۸۷	۳۵	۱۱/۴۶
Hiue	۶۵	۱۹/۴۶	۹۲	۲۶/۱۱	۳۱	۱۱/۱۵
iEgA	۵۱	۱۵/۵۸	۶۱	۱۹/۴۴	۴۹	۱۵/۸۳

جدول ۲: نتایج عددی الگوریتم ۱۱.۳، الگوریتم ۱۳.۳، Hiue و iEgA با نقاط شروع متفاوت x_0 .



شکل ۲: نتایج عددی برای الگوریتم ۱۱.۳، الگوریتم ۱۳.۳، Hiue و iEgA با نقاط شروع متفاوت x_0 .



شکل ۳: نتایج عددی برای الگوریتم‌های KA ، ۱۱.۳ ، ۱۳.۳ و $iEgA$ با نقاط شروع متفاوت x_0 .

و نیز در الگوریتم $Hieu$ قرار می‌دهیم $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^{0.8}}$. همچنین در الگوریتم $iEgA$ فرض می‌کنیم $\alpha_n = 0.8$. جدول ۲ و شکل ۲ رفتار همگرایی این الگوریتم‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ و شکل ۲ نتیجه می‌شود همگرایی الگوریتم ۱۱.۳ سریعتر از سایر الگوریتم‌ها است.

مثال ۷.۴. فرض کنید $A : \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{20}$ با ضابطه $A(x) = Mx + q$ تعریف شده باشد که در آن $M = NN^T + S + D$ یک بردار تصادفی در \mathbb{R}^{20} ، N یک ماتریس تصادفی 20×20 باشد. همچنین فرض کنید S یک ماتریس چپ متقارن 20×20 ($A^T = -A$) که درایه‌های آن در بازه $(-2, 2)$ هستند و D یک ماتریس قطری تصادفی 20×20 که درایه‌های روی قطر اصلی آن مثبت بوده و در بازه $(0, 2)$ قرار دارند، باشند. واضح است که در این حالت M نیم‌معین متقارن مثبت می‌باشد. مجموعه C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C = \{x \in \mathbb{R}_+^{20} : Ex \leq \gamma\},$$

که در آن E ماتریس متقارن 20×20 می‌باشد که درایه‌های آن در بازه $(-2, 2)$ قرار دارند و $\gamma \in \mathbb{R}_+^{20}$. با توجه به تعریف M به راحتی می‌توان نشان داد که A یک نگاشت یکنوانم و پیوسته لیب شیتس با ثابت $L = \|M\|$ می‌باشد. با این مفروضات، در این مثال رفتار همگرایی الگوریتم‌های ۱۱.۳ (Algorithm ۲)، ۱۳.۳ (Algorithm ۳)، الگوریتم KA و الگوریتم $iEgA$ را برای حل VIP باهم مقایسه می‌کنیم. در همه این الگوریتم‌ها نقطه شروع $x_0 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{20}$ می‌باشد. در الگوریتم ۱۱.۳ قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{5L}$ و در الگوریتم ۱۱.۳ ، الگوریتم ۱۳.۳ و الگوریتم KA قرار می‌دهیم $\theta = 0.4$ ، در الگوریتم $iEgA$ قرار می‌دهیم $\alpha_k = 0.4$ و در الگوریتم ۱۱.۳ و الگوریتم KA قرار می‌دهیم $\mu = 0.15$. نتایج عددی برای این مثال در شکل ۳ رسم شده‌اند. با توجه به اینکه انتخاب q, N, S و D تصادفی هستند، بنابراین عملگر A در نمودارهای (a) و (b) این شکل متفاوت می‌باشد.

۵ نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله، یک الگوریتم اکستراگرادیان زیرگرادیان لخت برای حل مسائل تعادل و یک الگوریتم خود-سازگار لخت برای حل نابرابری‌های تغییراتی در فضاهای هیلبرت حقیقی معرفی کردیم. همگرایی ضعیف دنباله‌های تولید شده توسط این الگوریتم‌ها را اثبات کردیم. همچنین الگوریتم‌های معرفی شده را با الگوریتم‌های ارائه شده توسط وینچ [۱۳]، کسبی [۱۵]، هیو و تانگ [۱۲] و دانگ [۸] مقایسه کردیم. با نظر گرفتن نقاط شروع و پارامترهای مشترک به صورت یکسان، نشان دادیم که الگوریتم‌های معرفی شده در این مقاله سریعتر و دارای کارایی بهتر می‌باشند.

برای پژوهش‌های آتی می‌توان همگرایی قوی دنباله‌های تولید شده توسط الگوریتم‌های معرفی شده در این مقاله را مورد بررسی قرار داد و نیز می‌توان با تغییر طول گام‌های الگوریتم‌ها، الگوریتم‌های دیگری طراحی کرد که کارایی بهتری داشته باشند.

فهرست منابع

- [1] Agwu, I. K. and Igbokwe, D. I., 2023. New Iteration Algorithms for Solving Equilibrium Problems and Fixed Point Problems of Two Finite Families of Asymptotically Demicontractive Multivalued Mappings. *Sahand Comm. Math. Anal.* 20(2), pp.1–38. doi:10.22130/scma.2022.531263.939
- [2] Alvarez, F. and Attouch, H., 2001. An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Var. Anal.*, 9(1), pp.3–11. doi: 10.1023/A:1011253113155
- [3] Asad, M., 2023. A new inertial algorithm for equilibrium problem and a family of nonexpansive operators in Hilbert space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pp. 1–12. doi: 10.1002/mma.9447
- [4] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L., 2011. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. CMS books in mathematics, 10, pp.1–978.
- [5] Blum, E. and Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequality to equilibrium problems. *The Mathematics Student*, 63(1), pp.127–149.
- [6] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S., 2011. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *J. Optim. Theory Appl*, 148(2), pp. 318–335. doi: 10.1007/s10957-010-9757-3
- [7] Chidume, Ch., 2009. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations. *Lecture Notes in Mathematics, vol. 1965, Springer, Berlin*,
- [8] Dong, Q. L., Lu, Y. Y. and Yang, J., 2016. The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. *Optimization*, 65(12), pp. 2217–2226. doi: 10.1080/02331934.2016.1239266
- [9] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. and Zizler, V., 2011. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics, (Vol. 1). New York: Springer.
- [10] Giannessi, F., Maugeri, A. and Pardalos, P.M., 2001. *Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models*. (vol. 58). Springer Science & Business,
- [11] Gibali, A. and Van Hieu, D., 2019. A new inertial double-projection method for solving variational inequalities. *J. Fixed Point Theory Appl*, 21(4), pp.97. doi: doi.org/10.1007/s11784-019-0726-7.
- [12] Hieu, D. and Thong, D. V., 2018. New extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone variational inequalities. *J. Global Optim*, 70(10), pp. 385–399. doi: 10.1007/s10898-017-0564-3
- [13] Hoai, P.T., Thuong, N.T. and Vinh, Nguyen The, 2021. Golden ratio algorithms for solving equilibrium problems in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Var. Anal.* , 5(4), pp.493-518. doi: 10.23952/jnva.5.2021.4.01
- [14] Jouymandi, Z. and Moradlou, F., 2018. Retraction algorithms for solving variational inequalities, pseudomonotone equilibrium problems and fixed-point problems in Banach spaces. *Numer. Algor*, 78, pp.1153–1182. doi: 10.1007/s11075-017-0417-7
- [15] Kassay, G., Hai, T.N. and Vinh, N. T., 2018. Coupling Popov's algorithm with subgradient extragradient method for solving equilibrium problems. *J. Nonlinear Convex Anal*, 19(6), pp. 959–986.

- [16] Kassay, G., Reich, S. and Sabach, S., 2011. Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces. *SIAM J. Optim*, 21(4), pp.1319–1344. doi: 10.1137/110820002
- [17] Korpelevich, G.M., 1976. The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Ekon. Mat. Metody*, 12(4), pp. 747–756.
- [18] Maugeri, A. and Raciti, F., 2009. On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities. *J. Convex Anal*, 16(3&4), pp. 899–911.
- [19] Nesterov, Y., 1983. A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 269, pp. 543–547.
- [20] Polyak, B. T., 1964. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. *U. S. S. R. Comput. Math. Math. Phys*, 4(5), pp. 1–17.
- [21] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.B., 2009. Variational analysis (Vol. 317). Springer Science & Business Media.
- [22] Safari, M. and Moradlou, F., 2021. Shrinking hybrid method for multiple-sets split feasibility problems and variational inequality problems. *Ric. Mat.*, pp 1–26. doi: 10.1007/s11587-021-00676-z
- [23] Safari, M., Moradlou, F. and Khalilzadeh, A. A., 2022. Hybrid proximal point algorithm for solving split equilibrium problems and its applications. *Hacet. J. Math. Stat*, 51(4), pp. 932–957. doi:10.15672/hujms.1023754
- [24] Thong, D. V., Reich, S., Shehu, Y and Iyiola, O. S., 2023. Novel projection methods for solving variational inequality problems and applications. *Numerical Algorithms*, 93(3), pp. 1105–1135. doi: 10.1007/s11075-022-01457-x
- [25] Tran, D. Q., Muu, L. D. and V. H. Nguyen., 2008. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*, 57(6), pp. 749–776. doi: 10.1080/02331930601122876
- [26] Vuong, P. T., Strodiot, J. J. and Nguyen, V. H., 2013. On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space. *Optimization*, 64, pp. 429–451. doi: 10.1080/02331934.2012.759327
- [27] Xu, H. K., 2010. Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces. *Inverse Problems*, 26(10), pp. 1–17. doi: 10.1088/0266-5611/26/10/105018
- [28] Zarantonello, E. H., 1971. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory. *Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Academic, New York*, pp. 237–424. doi: 10.1016/B978-0-12-775850-3.50013-3



subgradient extragradient algorithm with inertial effects for solving equilibrium problems

Maryam Safari⁽¹⁾ and Fridoun Moradlou⁽¹⁾ ¹⁶

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

Communicated by: Mohsen Zivari Rezapour

Received: 11 February 2024

Accepted: 12 December 2024

Abstract: In this paper, combining the subgradient extragradient method with inertial method, we introduce a new iterative algorithm for solving equilibrium problems in real Hilbert spaces. Moreover, we present a new inertial self-adaptive scheme for solving variational inequalities in real Hilbert spaces, which it is not necessary to know the Lipschitz constant of the mapping. We prove the weak convergence of the generated iterates by presented algorithms. To illustrate the usability of our results and also to show the efficiency of the proposed methods, we present some comparative examples with several existing schemes in the literature.

Keywords: Equilibrium problem, Subgradient extragradient method, Inertial effect, Variational inequality, Weak convergence.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹⁶Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Safari) ma_safari@sut.ac.ir, (F. Moradlou) moradlou@sut.ac.ir.