



بررسی وجود جواب برای یک مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی ششم

سعید شکوه^(۱)، حدیث قزلسفلو^(۱) و راضیه فرخزاد رستمی^(۱)

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس، ایران

دبیر مسئول: مرتضی فتوحی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۷

چکیده: در این مقاله، با استفاده از روش تغییراتی نشان می‌دهیم یک مسأله‌ی مقدار مرزی از مرتبه‌ی ششم دارای بی‌نهایت جواب می‌باشد. در واقع با بهره‌گیری از یک قضیه نقطه بحرانی، شرایطی کافی ارائه خواهیم کرد تا مسأله یک دنباله از جواب‌ها در یک فضای توابع مناسب داشته باشد. حالت‌های خاص و چندین نمونه از نتایج نیز بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: نقطه بحرانی، روش تغییراتی، مسائل مقدار مرزی.

رده‌بندی ریاضی: 34B15; 47J30; 35B38

۱ مقدمه

مدل‌سازی پدیده‌های مختلفی در فیزیک و مهندسی به معادله‌های دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی ششم به فرم کلی

$$u^{(6)}(x) = f(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(5)}) \quad a < x < b$$

ختم می‌شود. به‌عنوان مثال در اختر فیزیک، مطالعه رفتار لایه‌های همرفت با معادله‌های مرتبه ششم مدل می‌شود (مرجع [۷] را مشاهده نمایید). همچنین حرکت مماسی تیرها و لوله‌هایی که محور مرکزی آن‌ها قوس دایره‌ای دارند توسط یک معادله‌ی مرتبه‌ی ششم توصیف می‌شود [۹]. در بررسی رفتار جبهه‌های فاز در موادی که در حال گذار بین حالت مایع و جامد هستند، معادله‌ای از مرتبه ششم ظاهر می‌شود [۳]. در نتیجه بررسی معادله‌های مرتبه‌ی ششم با شرایط مرزی مختلف بسیار مورد توجه بوده است. جهت مشاهده بخشی از پژوهش‌های

^۱ نویسنده مسئول مقاله

(S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir, (H. Ghezelseflou) ghezelseflou@gmail.com

(R. Farokhzad Rostami) r_farokhzad@gonbad.ac.ir

صورت گرفته در زمینه مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی ششم می‌توان مقاله‌های [۲، ۳، ۵، ۸-۱۱] را نگریست. ما در این مقاله یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر را مطالعه خواهیم کرد:

$$\begin{cases} u^{(6)}(x) + \mathfrak{A}h(x)u^{(5)}(x) + \mathfrak{B}(h^{\mathfrak{A}}(x) + h'(x))u^{(4)}(x) \\ + (h^{\mathfrak{B}}(x) + \mathfrak{A}h(x)h'(x) + h''(x))u^{(3)}(x) = -\lambda f(x, u) - \mu g(x, u) \quad x \in (a, b) \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = 0 \\ u^{(3)}(b) = u^{(4)}(b) = u^{(5)}(b) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

که $0 \leq a < b$ ، μ پارامتر نامنفی، λ پارامتر مثبت، $f, g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع کاراتئودری^۲ و $h : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ یک تابع $C^{\mathfrak{A}}$ می‌باشد.

در مهندسی سازه، این مساله برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی و خمشی تیرها استفاده می‌شود. به عبارتی، تیرهای بلند که تحت بارگذاری‌های طولی قرار می‌گیرند، ممکن است دچار خمش و ارتعاش شوند. مدل‌سازی این رفتار منجر به مساله مقدار مرزی فوق می‌شود. همچنین در طراحی پل‌ها، شناخت رفتار دینامیکی تیرهای اصلی پل بسیار مهم است. با این مساله پاسخ دینامیکی پل‌ها تحت بارهای متحرک (مانند عبور وسایل نقلیه) مطالعه می‌شود. تابع u تغییر شکل طولی تیر، تابع h ضریب سختی خمشی تیر، توابع غیرخطی f و g اثرات کشش، و پارامترهای λ و μ به ترتیب بارهای توزیع شده بر تیر (مانند وزن خود تیر، برف، باد) و بارهای متمرکز (مانند بار وارد شده از ستون‌ها) را نشان می‌دهند. در مساله فوق شرایط مرزی بیان می‌کند که تغییر شکل، چرخش و خمش تیر در نقطه a و نیروی برشی، گشتاور خمشی و شتاب برشی تیر در نقطه b صفر است.

روشی که برای بررسی معادله‌ی (۱.۱) به کار می‌بریم روش تغییراتی است. با توجه به این که به دست آوردن جواب صریح و دقیق از معادله‌ها در بیشتر مواقع امکان‌پذیر نیست، استفاده از روش تغییراتی از اهمیت و توجه زیادی برخوردار می‌باشد [۱-۳، ۶، ۱۰-۱۳]. در مقاله [۱۳] با بهره‌گیری از لم مسیر کوهی و ساختار تغییراتی، وجود جواب‌های نابدهی برای مسأله‌ی زیر بررسی شده است:

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + \mathfrak{A}h(x)u'''(x) + (h^{\mathfrak{A}}(x) + h'(x))u''(x) = \lambda f(x, u(x)) \quad x \in [0, 1] \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(1) - \mu g(u(1)) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

که $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ ، $\mu \in \mathbb{R}$ ، $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، $h \in C^1([0, 1])$ یک تابع نامنفی و $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته می‌باشد.

همچنین در مقاله‌ی [۶]، با استفاده از قضایای نقاط بحرانی وجود یک، دو و سه جواب ضعیف برای مسأله‌ی (۲.۱) اثبات شده است. در این مقاله با توجه به کاربرد معادله‌های مرتبه‌ی ششم و اهمیت روش تغییراتی، وجود یک دنباله از جواب‌ها را برای مسأله‌ی (۱.۱) اثبات خواهیم کرد. ساختار مقاله به این صورت می‌باشد که در بخش بعد فضای توابع و قضیه‌ی نقطه بحرانی لازم را مطرح کرده و چند نتیجه اولیه را اثبات خواهیم کرد. در بخش سوم قضیه وجود جواب همراه با اثبات بیان می‌شود و در بخش چهارم حالت‌های خاص و یک مثال از قضیه اصلی را بیان کرده و وجود یک دنباله از جواب‌های همگرا به صفر را نیز برای مساله اثبات می‌کنیم.

۲ ساختار تغییراتی و نتایج اولیه

در این بخش فضای توابع و تعاریف لازم، نتایج اولیه و روش اثبات نتایج اصلی مطرح خواهد شد. فرض کنیم $H^{\mathfrak{A}}([a, b])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ باشد به طوری که u, u', u'' به طور مطلق پیوسته بوده و $u''' \in L^{\mathfrak{A}}([a, b])$. فضای توابع $\langle u, v \rangle := \int_a^b e^{H(x)} u'''(x) v'''(x) dx$ با ضرب داخلی $X = \{u \in H^{\mathfrak{A}}([a, b]), u(a) = u'(a) = u''(a) = 0\}$ یک فضای هیلبرت می‌باشد که

$$H(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi \quad \forall x \in [a, b].$$

نرم تولید شده توسط ضرب داخلی فوق برابر است با

$$\|u\|_H = \left(\int_a^b e^{H(x)} |u'''(x)|^{\mathfrak{A}} dx \right)^{\frac{1}{\mathfrak{A}}}.$$

²Caratheodory

نرم دیگری روی فضای X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|u\| := \left(\int_a^b |u'''(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

که با نرم $\|\cdot\|_H$ روی X معادل است. در واقع

$$\sqrt{e^{H^{\circ}}} \|u\| \leq \|u\|_H \leq \sqrt{e^{H^{\circ}}} \|u\| \quad (1.2)$$

به طوری که $H^{\circ} = \max_{x \in [a,b]} H(x)$ و $H_{\circ} = \min_{x \in [a,b]} H(x)$

لم ۱.۲. فضای X به طور فشرده در $L^2([a, b])$ نشانده می شود و به ازای $u \in X$ نامساوی های زیر برقرارند.

$$\|u\|_2 \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{3}} \|u\| \quad \text{الف)}$$

$$\|u'\|_2 \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{2}} \|u\| \quad \text{ب)}$$

اثبات. برقراری نامساوی (الف) را نشان می دهیم و اثبات قسمت (ب) مشابه (الف) می باشد. با توجه به نامساوی هولدر^۳ داریم

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \int_a^b |u(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^x u'(s) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^x |u'(s)|^2 ds \right) \left(\int_a^x 1 ds \right) dx \\ &= \int_a^b \int_s^b (x-a) |u'(s)| dx ds \\ &= \int_a^b |u'(s)|^2 \left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^2}{2} \right] ds \\ &= \int_a^b \left(\int_a^s u''(\tau) d\tau \right)^2 \left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^2}{2} \right] ds \\ &\leq \int_a^b \int_a^s |u''(\tau)|^2 \left[\frac{(s-a)(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^3}{2} \right] d\tau ds \\ &= \int_a^b (u''(\tau))^2 \left[\frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(\tau-a)^2(b-a)^2}{4} + \frac{(\tau-a)^3}{3} \right] d\tau \\ &\leq \left(\int_a^b |u'''(\xi)|^2 d\tau \right) \int_a^b \left[\frac{(b-a)^3(\tau-a)}{3} - \frac{(\tau-a)^2(b-a)^2}{4} + \frac{(\tau-a)^3}{3} \right] d\tau \\ &= \frac{(b-a)^6}{48} \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

□

لم ۲.۲. فضای X به طور فشرده در $C^1([a, b])$ نشانده می شود و به ازای $u \in X$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1([a,b])} &= \|u\|_{\infty} := \max \left\{ \max_{x \in [a,b]} |u(x)|, \max_{x \in [a,b]} |u'(x)| \right\} \\ &\leq \max \left\{ (b-a)^{\frac{5}{2}}, (b-a)^{\frac{3}{2}} \right\} \|u\|. \end{aligned}$$

³Holder

اثبات. به‌ازای $x \in [a, b]$ و با استفاده از نامساوی هولدر مشاهده می‌شود:

$$\begin{aligned} |u'(x)| &= \left| \int_a^x u''(s) ds \right| \leq \int_a^b |u''(s)| ds = \int_a^b \left| \int_a^s u'''(\xi) d\xi \right| \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\| \end{aligned}$$

بنابراین

$$\max_{x \in [a, b]} |u'(x)| \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\|. \quad (۲.۲)$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲)، به‌ازای $x \in [a, b]$ می‌توان نوشت:

$$|u(x)| = \left| \int_a^x u'(s) ds \right| \leq \int_a^b |u'(s)| ds \leq (b-a)^{\frac{3}{2}} \|u\|.$$

در نتیجه

$$\max_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq (b-a)^{\frac{3}{2}} \|u\|. \quad (۳.۲)$$

□

از روابط (۲.۲) و (۳.۲) حکم ثابت می‌شود.

تذکر ۳.۲. از رابطه‌ی (۱.۲) و لم‌های ۱.۲ و ۲.۲ نتیجه می‌شود به‌ازای $u \in X$

$$\|u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3} e^{H_0}} \|u\|_H, \quad \|u'\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{2} e^{H_0}} \|u\|_H$$

و

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{m}{\sqrt{e^{H_0}}} \|u\|_H$$

$$m = \max\{(b-a)^{\frac{3}{2}}, (b-a)^{\frac{1}{2}}\} \text{ که}$$

تعریف ۴.۲. اگر $u \in X$ در رابطه‌ی زیر

$$\int_a^b e^{H(x)} u'''(x) v'''(x) dx - \lambda \int_a^b e^{H(x)} f(x, u(x)) dx - \mu \int_a^b e^{H(x)} g(x, u(x)) dx = 0$$

به‌ازای هر $v \in X$ صدق نماید، به u جواب ضعیف از معادله‌ی (۱.۱) می‌گویند.

تعریف ۵.۲. تابع $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را L^1 -کارا تئوری گویند هرگاه:

(۱) نگاشت $x \mapsto f(x, \xi)$ به‌ازای هر $\xi \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد،

(۲) نگاشت $\xi \mapsto f(x, \xi)$ تقریباً برای هر $x \in [a, b]$ پیوسته باشد،

(۳) برای هر $\rho > 0$ تابع $l_{\rho} \in L^1([a, b])$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تقریباً هر $x \in [a, b]$

$$\sup_{|\xi| \leq \rho} |f(x, \xi)| \leq l_{\rho}(x).$$

متناظر با f و g ، به‌ترتیب توابع $F, G : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x, t) := \int_0^t f(x, \xi) d\xi, \quad G(x, t) := \int_0^t g(x, \xi) d\xi$$

که $x \in [a, b]$ و $t \in \mathbb{R}$

قضیه‌ی نقطه بحرانی زیر از مرجع [۴]، ابزار اصلی ما برای اثبات وجود جواب می‌باشد.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی و $\Phi, \Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق پذیر گاتو^۴ باشد به طوری که Φ نیم پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، پیوسته قوی و اجباری و Ψ نیم پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای است. همچنین برای هر $r > \inf_X \Phi$ فرض می‌شود:

$$\varphi(r) := \inf_{u \in \Phi^{-1}(-\infty, r)} \frac{(\sup_{v \in \Phi^{-1}(-\infty, r)} \Psi(v)) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)},$$

$$\gamma := \liminf_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r), \quad \delta := \liminf_{r \rightarrow (\inf_X \Phi)^+} \varphi(r).$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند:

الف) برای هر $r > \inf_X \Phi$ و $\lambda \in (0, \frac{1}{\varphi(r)})$ ، تحدید تابع $I_\lambda := \Phi - \lambda \Psi$ به $I_\lambda := \Phi^{-1}(-\infty, r)$ یک مینیمم سراسری می‌پذیرد که یک نقطه‌ی بحرانی (مینیمم موضعی) از I_λ در X است.

ب) اگر $\gamma < +\infty$ ، آن‌گاه برای هر $\lambda \in (0, \frac{1}{\gamma})$ یکی از حالت‌های زیر برقرار است: یا

۱) تابع I_λ یک مینیمم سراسری دارد، یا

۲) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (مینیمم‌های موضعی) I_λ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) = +\infty$.

ب) اگر $\delta < +\infty$ ، آن‌گاه برای هر $\lambda \in (0, \frac{1}{\delta})$ یکی از حالت‌های زیر برقرار می‌باشد: یا

۱) یک مینیمم سراسری از Φ وجود دارد که مینیمم موضعی I_λ است، یا

۲) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی دوبدو مجزا (مینیمم‌های موضعی) I_λ موجود است که همگرای ضعیف به مینیمم سراسری Φ می‌باشد.

۳ قضیه‌ی وجود جواب

در این بخش وجود یک دنباله بی‌کران از جواب‌ها برای مساله (۱.۱) اثبات می‌شود. با تعریف

$$A := \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi} F(x, t) dx}{\xi^2}$$

9

$$B := \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{a+\frac{1}{\xi}(b-a)}^{b-\frac{1}{\xi}(b-a)} F(x, \xi) dx}{\xi^2}$$

قضیه‌ی اصلی به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع L^1 -کارائودری است و

(F_۱) برای هر $x \in [a + \frac{1}{\varphi}(b-a), b - \frac{1}{\varphi}(b-a)]$ و $t \in \mathbb{R}$ ، $F(x, t) \geq 0$ ،

$$A < \frac{e^{H_0} (b-a)^{\frac{1}{\varphi}}}{1924 e^{H_0} m^2} B \quad (F_2)$$

⁴Gateaux

اگر قرار دهیم $\lambda_1 = \frac{9\gamma^2 e^{H_0}}{(b-a)^5 B}$ و $\lambda_2 = \frac{e^{H_0}}{\gamma m^2 A}$ ، در این صورت برای هر $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ و برای هر تابع L^1 -کارا L تابع $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که تابع

$$G(x, t) := \int_0^t f(x, \xi) d\xi \quad \forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}$$

نامنفی و صادق در شرط

$$g_\infty := \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi} G(x, t) dx}{\xi^2} < +\infty.$$

مسأله (۱.۱) به‌ازای $\mu \in [0, \mu_{g, \lambda})$ دارای یک دنباله بی‌کران از جواب‌های ضعیف در X است که

$$\mu_{g, \lambda} := \frac{e^{H_0}}{\gamma m^2 g_\infty} \left(1 - \lambda \frac{\gamma m^2 A}{e^{H_0}} \right).$$

اثبات. می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی ۶.۲ قسمت (ب) حکم را ثابت کنیم. $\bar{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$ را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\mu_{g, \bar{\lambda}} = \frac{e^{H_0}}{\gamma m^2 g_\infty} \left(1 - \bar{\lambda} \frac{\gamma m^2 A}{e^{H_0}} \right) > 0.$$

اکنون $\bar{\mu} \in (0, \mu_{g, \bar{\lambda}})$ را ثابت گرفته و به‌ازای $(x, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم

$$J(x, \xi) := F(x, \xi) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} G(x, \xi).$$

به‌ازای $u \in X$ توابع $\Phi, \Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi(u) := \frac{1}{\gamma} \|u\|_H^2, \quad \Psi(u) := \int_a^b J(x, u(x)) dx.$$

تابع‌های Φ و Ψ در فرض‌های قضیه‌ی ۶.۲ صادق است. در واقع تابع Φ مشتق‌پذیر گاتو و مشتق آن $\Phi'(u) \in X^*$ مساوی است با

$$\Phi'(u)(v) = \int_a^b e^{H(x)} u'''(x) v'''(x) dx$$

به‌ازای $v \in X$. همچنین Φ نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، اجباری و پیوسته قوی است (با توجه به اینکه نرم این خواص را دارد بنابراین Φ نیز داراست). از طرفی چون X به‌طور فشرده در $C^1([a, b])$ نشانده می‌شود، بنابراین Ψ خوش‌تعریف، مشتق‌پذیر گاتو با مشتق فشرده است که

$$\Psi'(u)(v) = \int_a^b f(x, u(x)) v(x) dx + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \int_a^b g(x, u(x)) v(x) dx$$

به‌ازای $v \in X$. ابتدا نشان می‌دهیم $\bar{\lambda} < \frac{1}{\gamma}$. بنابراین فرض کنید $\{\xi_n\}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty$ و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} F(x, t) dx}{\xi_n^2} = A.$$

به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $r_n = \frac{e^{H_0}}{\gamma m^2} \xi_n^2$. در این صورت برای هر $v \in X$ صادق در $\Phi(v) < r_n$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{e^{H_0}}{m^2} \|v\|_\infty^2 &< \frac{e^{H_0}}{\gamma m^2} \xi_n^2, \\ \Rightarrow \|v\|_\infty &< \xi_n. \end{aligned}$$

چون $\Phi(\circ) = \Psi(\circ) = \circ$ ، بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} \varphi(r_n) &= \inf_{u \in \Phi^{-1}(-\infty, r_n)} \frac{\left(\sup_{v \in \Phi^{-1}(-\infty, r_n)} \Psi(v) \right) - \Psi(u)}{r_n - \Phi(u)} \\ &\leq \frac{\sup_{v \in \Phi^{-1}(-\infty, r_n)} \Psi(v)}{r_n} \leq \frac{\Upsilon m^\Upsilon \int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} J(x, t) dx}{e^{H_\circ} \xi_n^\Upsilon} \\ &\leq \frac{\Upsilon m^\Upsilon}{e^{H_\circ}} \left[\frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} F(x, t) dx}{\xi_n^\Upsilon} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} G(x, t) dx}{\xi_n^\Upsilon} \right]. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

همچنین از فرض (F_2) و این که $g_\infty < +\infty$ ، مشاهده می کنیم $A < +\infty$ و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} G(x, t) dx}{\xi_n^\Upsilon} = g_\infty. \tag{۲.۳}$$

از روابط (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می گیریم

$$\gamma \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(r_n) \leq \frac{\Upsilon m^\Upsilon}{e^{H_\circ}} \left(A + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} g_\infty \right) < +\infty. \tag{۳.۳}$$

اکنون ثابت می کنیم قسمت (ب) از قضیه ۶.۲ برقرار نیست. در نتیجه قسمت (ب) حکم را اثبات می کند. برای این منظور از فرض $\bar{\mu} \in (\circ, \bar{\mu}_g, \bar{\lambda})$ شروع کرده و نتیجه می گیریم

$$\gamma \leq \frac{\Upsilon m^\Upsilon}{e^{H_\circ}} \left(A + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} g_\infty \right) < \frac{\Upsilon m^\Upsilon}{e^{H_\circ}} A + \frac{1 - \frac{\Upsilon m^\Upsilon \bar{\lambda} A}{e^{H_\circ}}}{\lambda}.$$

بنابراین

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\frac{\Upsilon m^\Upsilon}{e^{H_\circ}} A + (1 - \frac{\Upsilon m^\Upsilon \bar{\lambda} A}{e^{H_\circ}}) / \bar{\lambda}} < \frac{1}{\gamma}.$$

چون $\frac{1}{\lambda} < \frac{(b-a)^\Delta}{9\Upsilon 2 e^{H_\circ}} B$ ، دنباله ای مانند $\{\eta_n\}$ از اعداد مثبت و $\tau > \circ$ وجود دارد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty$ و به ازای $n \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ

$$\frac{1}{\lambda} < \tau < \frac{(b-a)^\Delta \int_{a+\frac{1}{\Upsilon}(b-a)}^{b-\frac{1}{\Upsilon}(b-a)} F(x, \eta_n) dx}{9\Upsilon 2 e^{H_\circ} \eta_n^\Upsilon}. \tag{۴.۳}$$

به ازای $x \in [a, a + \frac{1}{\Upsilon}(b-a)]$ تابع P_a را به صورت زیر تعریف کرده:

$$P_a(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

و به ازای $x \in [b - \frac{1}{\Upsilon}(b-a), b]$ قرار می دهیم:

$$P_b(x) = \frac{1}{\Upsilon} - \frac{x - [b - \frac{1}{\Upsilon}(b-a)]}{b - a}.$$

همچنین به ازای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم

$$w_n(x) = \begin{cases} T(P_a(x))\eta_n & x \in [a, a + \frac{1}{\Upsilon}(b-a)[\\ \eta_n & x \in [a + \frac{1}{\Upsilon}(b-a), b - \frac{1}{\Upsilon}(b-a)] \\ T(P_b(x))\eta_n & x \in]b - \frac{1}{\Upsilon}(b-a), b] \end{cases}$$

که به‌ازای $x \in \mathbb{R}$

$$T(x) = ۱۴۵۸x^۵ - ۱۲۱۵x^۴ + ۲۷۰x^۳.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ به‌وضوح $w_n \in X$

$$\Phi(w_n) \leq \frac{۹۷۲e^{H^*}}{(b-a)^\delta} \eta_n^2. \quad (۵.۳)$$

از سویی دیگر فرض (F_1) و این‌که G نامنفی است، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \Psi(w_n) &= \int_a^b [F(x, w_n(x)) + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} G(x, w_n(x))] dx \\ &\geq \int_{a+\frac{1}{\tau}(b-a)}^{b-\frac{1}{\tau}(b-a)} F(x, \eta_n) dx. \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

از رابطه‌های (۴.۳)-(۶.۳)، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ مشاهده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} I_{\bar{\lambda}}(w_n) &\leq \frac{۹۷۲e^{H^*}}{(b-a)^\delta} \eta_n^2 - \bar{\lambda} \int_{a+\frac{1}{\tau}(b-a)}^{b-\frac{1}{\tau}(b-a)} F(x, \eta_n) dx \\ &< \frac{۹۷۲e^{H^*}}{(b-a)^\delta} \eta_n^2 (1 - \bar{\lambda}\tau). \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

چون $\bar{\lambda}\tau > ۱$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty$ ، رابطه‌ی (۷.۳) نتیجه می‌دهد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\bar{\lambda}}(w_n) = -\infty$. بنابراین $I_{\bar{\lambda}}$ از پایین کران‌دار نمی‌باشد. پس قسمت (ب) از قضیه‌ی ۶.۲ برقرار است. یعنی دنباله‌ای از نقاط بحرانی $I_{\bar{\lambda}}$ مانند $\{u_n\}$ وجود دارد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = +\infty$ و حکم اثبات می‌شود. \square

۴ نتایج قابل توجه

در این بخش دو حالت خاص و یک مثال از قضیه‌ی ۱.۳ را بیان کرده و در پایان وجود یک دنباله از جواب‌های همگرا به صفر را برای مسأله (۱.۱) اثبات خواهیم کرد.

تذکر ۱.۴. قضیه‌ی قبل به‌ازای $\mu = ۰$ برقرار است. یعنی به‌ازای $\lambda \in]\frac{۹۷۲e^{H^*}}{(b-a)^\delta B}, \frac{e^{H_0}}{4m^2A}[$ مسأله‌ی زیر

$$\begin{cases} u^{(6)} + 3hu^{(5)} + 3(h^2 + h')u^{(4)} + (h^3 + 3hh' + h'')u^{(3)} = -\lambda f(x, u) & a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰ \\ u^{(3)}(b) = u^{(4)}(b) = u^{(5)}(b) = ۰ \end{cases}$$

دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف در X است.

نتیجه ۲.۴. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۳، به‌ازای $\lambda \in]\frac{۹۷۲}{(b-a)^\delta B}, \frac{1}{4m^2A}[$ و $\mu \in [۰, \mu_{g,\lambda})$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} -u^{(6)}(x) = \lambda f(x, u(x)) + \mu g(x, u(x)) & a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰ \\ u^{(3)}(b) = u^{(4)}(b) = u^{(5)}(b) = ۰ \end{cases} \quad (۱.۴)$$

دارای یک دنباله‌ای بی‌کران از جواب‌های ضعیف در X است.

اکنون یک مثال را جهت درک بهتر قضیه‌ی ۱.۳ بیان می‌کنیم.

مثال ۳.۴. به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، قرار می دهیم

$$a_n = \frac{n!(n+2)! - 1}{2(n+1)!}, \quad b_n = \frac{n!(n+2)! + 1}{2(n+1)!}$$

و تابع نامنفی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{22(n+1)!^2 [(n+1)!^2 - n!^2] e^\xi}{\pi} \sqrt{\frac{1}{16(n+1)!^2} - \left(\xi - \frac{n!(n+2)}{2}\right)} & \xi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \\ 0 & \text{سایر نقاط.} \end{cases}$$

با تغییر متغیر

$$\begin{cases} \xi - \frac{n!(n+2)}{2} = \frac{1}{4(n+1)!} \sin \theta \\ d\xi = \frac{1}{4(n+1)!} \cos \theta d\theta \end{cases}$$

و محاسبات ساده نتیجه می گیریم

$$\int_{a_n}^{b_n} \sqrt{\frac{1}{16(n+1)!^2} - \left(\xi - \frac{n!(n+2)}{2}\right)^2} d\xi = \frac{\pi}{32(n+1)!^2}.$$

بنابراین به ازای $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{n!}^{(n+1)!} f(t) dt = \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt = [(n+1)!^2 - n!^2] e^\xi.$$

پس مشاهده می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(a_n)}{a_n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(b_n)}{b_n^2} = 4e^\xi \quad (2.4)$$

که $F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$ به ازای $t \in \mathbb{R}$ از (۲.۴) نتیجه می گیریم

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^2} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^2} = 4e^\xi.$$

طبق قضیه ۱.۳، به ازای $\lambda \in \left(\frac{9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}}, +\infty\right)$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} u^{(6)} + 9x^2 u^{(5)} + 9(3x^4 + 2x) u^{(4)} + 3(9x^6 + 18x^3 + 2) u^{(3)} = -\lambda f(u) \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \\ u^{(3)}(\sqrt[3]{3}) = u^{(4)}(\sqrt[3]{3}) = u^{(5)}(\sqrt[3]{3}) = 0 \end{cases}$$

دارای یک دنباله‌ی بی کران از جواب‌های ضعیف می باشد.

در پایان می خواهیم شرایطی را ارائه دهیم که مطابق قسمت (پ) از قضیه ۶.۲، مسأله‌ی (۱.۱) دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف را در X دارا بوده و این دنباله به صفر همگرای قوی باشد. برای این منظور تعریف می کنیم

$$\tilde{A} := \liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi} F(x, t) dx}{\xi^2}$$

$$\tilde{B} := \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_{a+\frac{1}{\xi}(b-a)}^{b-\frac{1}{\xi}(b-a)} F(x, \xi) dx}{\xi^2}.$$

قضیه ۴.۴. فرض کنیم شرط (F_1) از قضیه ۱.۳ برقرار بوده و

$$\tilde{A} < \frac{e^{H_0}(b-a)^5}{1944e^{H_0}m^2} \tilde{B}. \quad (3.4)$$

اگر قرار دهیم $\lambda_3 = \frac{972e^{H_0}}{(b-a)^5 \tilde{B}}$ و $\lambda_4 = \frac{e^{H_0}}{2m^2 \tilde{A}}$ در این صورت برای هر $\lambda \in (\lambda_3, \lambda_4)$ و برای هر تابع L -کارا تودری $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که تابع

$$G(x, t) := \int_0^t g(x, \xi) d\xi$$

نامنفی و صادق در شرط

$$g_0 := \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi} G(x, t) dx}{\xi^2} < +\infty,$$

مسأله‌ی (۱.۱) به‌زای

$$\mu \in \left[0, \frac{e^{H_0}}{2m^2 g_0} \left(1 - \lambda \frac{2m^2 \tilde{A}}{e^{H_0}}\right)\right]$$

دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف در X است که به صفر همگرای قوی است.

اثبات. همان‌طور که قبلاً گفته شد با استفاده از قسمت (پ) قضیه‌ی ۶.۲، حکم را ثابت می‌کنیم. $\tilde{\lambda} \in (\lambda_3, \lambda_4)$ را ثابت در نظر گرفته و بنابراین

$$\tilde{\mu}_{g, \tilde{\lambda}} := \frac{e^{H_0}}{2m^2 g_0} \left(1 - \tilde{\lambda} \frac{2m^2 \tilde{A}}{e^{H_0}}\right) > 0.$$

هم‌چنین برای $\tilde{\mu}$ ثابت در بازه‌ی $[0, \tilde{\mu}_{g, \tilde{\lambda}})$ ، به‌زای $(x, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$J(x, \xi) := F(x, \xi) + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}} G(x, \xi).$$

مانند اثبات قضیه‌ی ۱.۳ توابع Ψ و $I_{\tilde{\lambda}}$ را تعریف نموده و ابتدا ثابت می‌کنیم $\tilde{\lambda} < \frac{1}{\delta}$. دنباله‌ی $\{\xi_n\}$ از اعداد مثبت را طوری در نظر می‌گیریم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$ و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \sup_{|t| \leq \xi_n} F(x, t) dx}{\xi_n^2} = \tilde{A}.$$

چون $\inf_X \Phi = 0$ بنابراین $\delta = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) < +\infty$. از این‌که $\tilde{\mu} \in [0, \tilde{\mu}_{g, \tilde{\lambda}})$ می‌توان نوشت

$$\delta \leq \frac{2m^2}{e^{H_0}} \left(\tilde{A} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}} g_0\right) < \frac{2m^2}{e^{H_0}} \tilde{A} + \frac{1 - \frac{2m^2}{e^{H_0}} \tilde{\lambda} \tilde{A}}{\tilde{\lambda}}.$$

در نتیجه

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\frac{2m^2}{e^{H_0}} \tilde{A} + (1 - \frac{2m^2}{e^{H_0}} \tilde{\lambda} \tilde{A}) / \tilde{\lambda}} < \frac{1}{\delta}.$$

ثابت می‌کنیم $I_{\tilde{\lambda}}$ در صفر مینیمم موضعی ندارد. از آنجا‌که

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} < \frac{(b-a)^5}{972e^{H_0}} \tilde{B}$$

دنباله‌ای از اعداد مثبت مانند $\{\eta_n\}$ و عدد مثبت τ وجود دارد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = 0$ و

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} < \tau < \frac{(b-a)^5 \int_{a+\frac{1}{\tau}(b-a)}^{b-\frac{1}{\tau}(b-a)} F(x, \eta_n) dx}{972e^{H_0} \eta_n^2}$$

به‌ازای عدد طبیعی n به‌قدر کافی بزرگ. برای $w_n, n \in \mathbb{N}$ را مانند اثبات قضیه ۱.۳ تعریف می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\lambda}}(w_n) &= \Phi(w_n) - \tilde{\lambda}\Psi(w_n) \\ &\leq \frac{972e^{H^0}}{(b-a)^5} \eta_n^2 (1 - \tilde{\lambda}\tau) < 0. \end{aligned}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\tilde{\lambda}}(w_n) = I_{\tilde{\lambda}}(0) = 0$$

صفر مینیمم موضعی از $I_{\tilde{\lambda}}$ نمی‌باشد. با توجه به این که صفر مینیمم سراسری تابع Φ است، نتیجه می‌گیریم $I_{\tilde{\lambda}}$ مینیمم موضعی در مینیمم سراسری Φ ندارد. بنابراین طبق قسمت (ب) از قضیه ۶.۲ دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی $I_{\tilde{\lambda}}$ در X وجود دارد که به صفر همگرایی ضعیف است. هم‌چنین چون X به‌طور فشرده در $C^1([a, b])$ نشانده می‌شود، دنباله $\{u_n\}$ به صفر همگرایی قوی است و اثبات تمام می‌باشد. \square

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مسأله‌ی مقدار مرزی از مرتبه‌ی ششم با روش تغییراتی بررسی شد. در واقع تحت فرض‌های مناسب، بازه‌هایی را برای پارامترهای کنترلی مسأله $\{\mu, \lambda\}$ ارائه کردیم که به‌ازای مقادیر معین از آن‌ها مسأله دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف بی‌کران یا همگرا به صفر است. خوانندگان محترم و علاقمند می‌توانند از مطالب بیان شده در این مقاله بهره‌برده و مسأله را با سایر روش‌ها یا قضایا بررسی نمایند.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داورهای محترم جهت مطالعه دقیق مقاله و ارائه اصلاحات و پیشنهادهای ارزشمند، صمیمانه قدردانی می‌نمایند.

فهرست منابع

- [1] Abdolrazaghi, F., Razani, A. and Mirzaei, R., 2020. Multiple weak solutions for a kind of time-dependent equation involving singularity, *Filomat*, 34(13), pp.4567–4574. doi: 10.2298/FIL2013567A
- [2] Bonanno, G., Candito, P. and Oregan, D., 2021. Existence of nontrivial solutions for sixth-order differential equations, *Mathematics*, 9(16), 1852. doi: 10.3390/math9161852
- [3] Bonanno, G. and Livrea, R., 2021. A sequence of positive solutions for sixth-order ordinary nonlinear differential problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 20, pp.1–17. doi: 10.14232/ejqtde.2021.1.20
- [4] Bonanno, G. and Molica Bisci, G., 2009. Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities, *Bound. Value Probl.*, 2009, pp.1–20. doi: 10.1155/2009/670675
- [5] Chaparova, J.V., Peletier, L.A. and Tersian, S.A., 2004. Existence and nonexistence of nontrivial solutions of semilinear sixth-order ordinary differential equations, *Appl. Math. Lett.*, 17(10), pp.1207–1212. doi: 10.1016/j.aml.2003.05.014
- [6] Ghobadi, A. and Heidarkhani, S., 2023. Variational approach for an elastic beam equation with local nonlinearities, *Ann. Polon. Math.*, 130, pp.201–222. doi: 10.4064/ap220519-20-10

- [7] Glatzmaier, G.A., 1985. Numerical simulations of stellar convective dynamics iii: at the base of the convection zone, *Astrophys J.*, 31(1-2), pp.137–150. doi: 10.1080/03091928508219267
- [8] Martinez, A. L. M., Pendeza Martinez, C. A., Bressan, G. M., Souza, R. M. and Meier, E. W., 2021. Multiple solutions for a sixth order boundary value problem, *Trends in comput. Appl. Math.*, 22(1), pp.1–12. doi: 10.5540/tcam.2021.022.01.00001
- [9] Moller, M. and Zinsou, B., 2013. Sixth order differential operators with eigenvalue dependent boundary conditions, *Appl. Anal. Discret. Math.*, 7(2), pp.378–389. doi: 10.2298/AADM130608010M
- [10] Shokooh, S., 2023. Existence of solutions for a sixth-order nonlinear equation, *Rend. Circ. Mat. Palermo(2)*, 72, pp.4251–4271. doi: 10.1007/s12215-023-00901-8
- [11] Shokooh, S., 2023. Variational techniques for a system of sturm-liouville equations, *J. Elliptic Parabol. Equ.*, 9, pp.595–610. doi: 10.1007/s41808-023-00217-9
- [12] Shokooh, S., 2020. On a model of nonlinear differential equation with variable exponent by variational method, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, 10(2), pp.453–472. doi: 10.22055/JAMM.2020.31804.1784
- [13] Xia, M., Zhang, X., Kang, D. and Liu, C., 2022. Existence and concentration of nontrivial solutions for an elastic beam equation with local nonlinearity, *AIMS Mathematics*, 7(1), pp.579–605. doi: 10.3934/math.2022037



On the existence of solutions for a sixth-order boundary value problem

Saeid Shokooh^{(1) 5} Hadis Ghezelseflou⁽¹⁾ and Raziieh Farokhzad Rostami⁽¹⁾

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran.

Communicated by: Morteza Fotouhi

Received: 16 February 2024

Accepted: 23 June 2024

Abstract: In this paper, by employing the variational method, we show that a boundary value problem of sixth order has infinitely many solutions. In fact, via a critical point theorem, we will present sufficient conditions such that the problem has a sequence of solutions in a suitable function space. Specific cases and an example of results are also stated.

Keywords: Critical point, Variational method, Boundary value problems.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

⁵Corresponding author.

E-mail addresses: (S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir, (H. Ghezelseflou) ghezelseflou@gmail.com
(R. Farokhzad Rostami) r_farokhzad@gonbad.ac.ir.