مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، ۱۴، شماره ۲، ص ۲۶-۳۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2024.46159.2257

بررسی وجود جواب برای یک مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی ششم

سعید شکوه(۱) [۱]، حدیث قزلسفلو(۱) و راضیه فرخزاد رستمی(۱)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس، ایران

دبیر مسئول: مرتضی فتوحی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۳

چکیده: در این مقاله، با استفاده از روش تغییراتی نشان می‌دهیم یک مسأله‌ی مقدار مرزی از مرتبه‌ی ششم دارای بی‌نهایت جواب می‌باشد. در واقع با بهره‌گیری از یک قضیه نقطه بحرانی، شرایطی کافی ارائه خواهیم کرد تا مسأله یک دنباله از جواب‌ها در یک فضای توابع مناسب داشته باشد. حالت‌های خاص و چندین نمونه از نتایج نیز بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: نقطه بحرانی، روش تغییراتی، مسائل مقدار مرزی.

رده‌بندی ریاضی: 34B15; 47J30; 35B38

۱ مقدمه

مدل‌سازی پدیده‌های مختلفی در فیزیک و مهندسی به معادله‌های دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی ششم به فرم کلی

$$u^{(6)}(x) = f(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(5)}) \quad a < x < b$$

ختم می‌شود. به‌عنوان مثال در اختر فیزیک، مطالعه رفتار لایه‌های همرفت با معادله‌های مرتبه ششم مدل می‌شود (مرجع [۷] را مشاهده نمایید). هم‌چنین حرکت مماسی تیرها و لوله‌هایی که محور مرکزی آن‌ها قوس دایره‌ای دارند توسط یک معادله‌ی مرتبه‌ی ششم توصیف می‌شود [۹]. در بررسی رفتار جبهه‌های فاز در موادی که در حال گذار بین حالت مایع و جامد هستند، معادله‌ای از مرتبه ششم ظاهر می‌شود [۳]. در نتیجه بررسی معادله‌های مرتبه‌ی ششم با شرایط مرزی مختلف بسیار مورد توجه بوده است. جهت مشاهده بخشی از پژوهش‌های

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir, (H. Ghezelseflou) ghezelseflouh@gmail.com
(R. Farokhzad Rostami) r_farokhzad@gonbad.ac.ir

صورت گرفته در زمینه مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی ششم می‌توان مقاله‌های [۲، ۳، ۵، ۸–۱۱] را نگریست.
ما در این مقاله یک مسأله‌ی مقدار مرزی به‌صورت زیر را مطالعه خواهیم کرد:

$$\begin{cases} u^{(۶)}(x) + ۳h(x)u^{(۵)}(x) + ۳(h^{۲}(x) + h'(x))u^{(۴)}(x) \\ +(h^{۳}(x) + ۳h(x)h'(x) + h''(x))u^{(۳)}(x) = -\lambda f(x,u) - \mu g(x,u) \quad x \in (a,b) \text{ اگر} \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰ \\ u^{(۳)}(b) = u^{(۴)}(b) = u^{(۵)}(b) = ۰ \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که $۰ \leqslant a < b$، μ پارامتر نامنفی، λ پارامتر مثبت، $f, g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع کاراتئودری [۲] و $h : [a,b] \to [۰, +\infty)$ یک تابع $C^{۲}$ می‌باشد.
در مهندسی سازه، این مساله برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی و خمشی تیرها استفاده می‌شود. به عبارتی، تیرهای بلند که تحت بارگذاری‌های طولی قرار می‌گیرند، ممکن است دچار خمش و ارتعاش شوند. مدل‌سازی این رفتار منجر به مساله مقدار مرزی فوق می‌شود. همچنین در طراحی پل‌ها، شناخت رفتار دینامیکی تیرهای اصلی پل بسیار مهم است. با این مساله پاسخ دینامیکی پل‌ها تحت بارهای متحرک (مانند عبور وسایل نقلیه) مطالعه می‌شود. تابع u تغییر شکل طولی تیر، تابع h ضریب سختی خمشی تیر، توابع غیرخطی f و g اثرات کشش، و پارامترهای λ و μ به ترتیب بارهای توزیع شده بر تیر (مانند وزن خود تیر، برف، باد) و بارهای متمرکز (مانند بار وارد شده از ستون‌ها) را نشان می‌دهند. در مساله فوق شرایط مرزی بیان می‌کند که تغییر شکل، چرخش و خمش تیر در نقطه a و نیروی برشی، گشتاور خمشی و شتاب برشی تیر در نقطه b صفر است.
روشی که برای بررسی معادله‌ی (۱.۱) به‌کار می‌بریم روش تغییراتی است. با توجه به این‌که به‌دست آوردن جواب صریح و دقیق از معادله‌ها در بیشتر مواقع امکان‌پذیر نیست، استفاده از روش تغییراتی از اهمیت و توجه زیادی برخوردار می‌باشد [۱–۳، ۶، ۱۰–۱۳]. در مقاله [۱۳] با بهره‌گیری از لم مسیرکوهی و ساختار تغییراتی، وجود جواب‌های نابدیهی برای مسأله‌ی زیر بررسی شده است:

$$\begin{cases} u^{(۴)}(x) + ۲h(x)u'''(x) + (h^{۲}(x) + h'(x))u''(x) = \lambda f(x, u(x)) \quad x \in [۰, ۱] \\ u(۰) = u'(۰) = u''(۰) = u'''(۱) - \mu g(u(۱)) = ۰ \end{cases} \tag{۲.۱}$$

که $\lambda > ۰$، $\mu \in \mathbb{R}$، $f : [۰,۱] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، $h \in C^{۱}([۰,۱])$ یک تابع نامنفی و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته می‌باشد.
همچنین در مقاله‌ی [۶]، با استفاده از قضایای نقاط بحرانی وجود یک، دو و سه جواب ضعیف برای مسأله‌ی (۲.۱) اثبات شده است.
در این مقاله با توجه به کاربرد معادله‌های مرتبه‌ی ششم و اهمیت روش تغییراتی، وجود یک دنباله از جواب‌ها را برای مسأله‌ی (۱.۱) اثبات خواهیم کرد. ساختار مقاله به این صورت می‌باشد که در بخش بعد فضای توابع و قضیه‌ی نقطه بحرانی لازم را مطرح کرده و چند نتیجه اولیه را اثبات خواهیم کرد. در بخش سوم قضیه وجود جواب همراه با اثبات بیان می‌شود و در بخش چهارم حالت‌های خاص و یک مثال از قضیه اصلی را بیان کرده و وجود یک دنباله از جواب‌های همگرا به صفر را نیز برای مساله اثبات می‌کنیم.

۲ ساختار تغییراتی و نتایج اولیه

در این بخش فضای توابع و تعاریف لازم، نتایج اولیه و روش اثبات نتایج اصلی مطرح خواهد شد. فرض کنیم $H^{۳}([a,b])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که u، u'، u'' به‌طور مطلق پیوسته بوده و $u''' \in L^{۲}([a,b])$. فضای توابع $X = \{u \in H^{۳}([a,b]), u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰\}$ با ضرب داخلی $\langle u, v\rangle := \int_a^b e^{H(x)} u'''(x) v'''(x) \mathrm{d}x$ یک فضای هیلبرت می‌باشد که

$$H(x) = \int_{۰}^{x} h(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \forall x \in [a,b].$$

نرم تولید شده توسط ضرب داخلی فوق برابر است با

$$\|u\|_H = (\int_a^b e^{H(x)} |u'''(x)|^{۲} \mathrm{d}x)^{\frac{۱}{۲}}.$$

[2] Caratheodory

نرم دیگری روی فضای X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|u\| := \left(\int_a^b |u'''(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

که با نرم $\|\cdot\|_H$ روی X معادل است. در واقع

$$\sqrt{e^{H_\circ}}\|u\| \leqslant \|u\|_H \leqslant \sqrt{e^{H^\circ}}\|u\| \tag{۱.۲}$$

به‌طوری‌که $H_\circ = \min_{x\in[a,b]} H(x)$ و $H^\circ = \max_{x\in[a,b]} H(x)$.

لم ۱.۲. فضای X به‌طور فشرده در $L^2([a,b])$ نشانده می‌شود و به‌ازای $u \in X$ نامساوی‌های زیر برقرارند.

الف) $\|u\|_2 \leqslant \frac{(b-a)^3}{4\sqrt{3}}\|u\|$،

ب) $\|u'\|_2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{2}}\|u\|$.

اثبات. برقراری نامساوی (الف) را نشان می‌دهیم و اثبات قسمت (ب) مشابه (الف) می‌باشد. با توجه به نامساوی هولدر [۳] داریم

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= \int_a^b |u(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x u'(s)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \left(\int_a^x |u'(s)|^2\mathrm{d}s\right)\left(\int_a^x 1\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b\int_s^b (x-a)|u'(s)|\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b |u'(s)|^2\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^2}{2}\right]\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b \left(\int_a^s u''(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^2}{2}\right]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_a^b\int_a^s |u''(\tau)|^2\left[\frac{(s-a)(b-a)^2}{2} - \frac{(s-a)^3}{2}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b (u''(\tau))^2\left[\frac{(b-a)^4}{8} - \frac{(\tau-a)^2(b-a)^2}{4} + \frac{(\tau-a)^4}{8}\right]\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \left(\int_a^b |u'''(\xi)|^2\mathrm{d}\tau\right)\int_a^b\left[\frac{(b-a)^4(\tau-a)}{8} - \frac{(\tau-a)^3(b-a)^2}{4} + \frac{(\tau-a)^5}{8}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{(b-a)^6}{48}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

□

لم ۲.۲. فضای X به‌طور فشرده در $C^1([a,b])$ نشانده می‌شود و به‌ازای $u \in X$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^1([a,b])} = \|u\|_\infty &:= \max\{\max_{x\in[a,b]}|u(x)|, \max_{x\in[a,b]}|u'(x)|\} \\
&\leqslant \max\{(b-a)^{\frac{5}{2}}, (b-a)^{\frac{3}{2}}\}\|u\|.
\end{aligned}$$

[3] Holder

اثبات. به‌ازای $x \in [a,b]$ و با استفاده از نامساوی هولدر مشاهده می‌شود:

$$|u'(x)| = |\int_a^x u''(s)\mathrm{d}s| \leqslant \int_a^b |u''(s)|\mathrm{d}s = \int_a^b |\int_a^s u'''(\xi)\mathrm{d}\xi| \leqslant (b-a)^{\frac{۳}{۲}}\|u\|$$

بنابراین

$$\max_{x\in[a,b]}|u'(x)| \leqslant (b-a)^{\frac{۳}{۲}}\|u\|. \qquad (۲.۲)$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲)، به‌ازای $x \in [a,b]$ می‌توان نوشت:

$$|u(x)| = |\int_a^x u'(s)\mathrm{d}s| \leqslant \int_a^b |u'(s)|\mathrm{d}s \leqslant (b-a)^{\frac{۵}{۲}}\|u\|.$$

در نتیجه

$$\max_{x\in[a,b]}|u(x)| \leqslant (b-a)^{\frac{۵}{۲}}\|u\|. \qquad (۳.۲)$$

از روابط (۲.۲) و (۳.۲) حکم ثابت می‌شود. □

تذکر ۳.۲. از رابطه‌ی (۱.۲) و لم‌های ۱.۲ و ۲.۲ نتیجه می‌شود به‌ازای $u \in X$

$$\|u\|_۲ \leqslant \frac{(b-a)^۳}{۴\sqrt{۳e^{H_۰}}}\|u\|_H, \quad \|u'\|_۲ \leqslant \frac{(b-a)^۲}{۲\sqrt{۲e^{H_۰}}}\|u\|_H$$

و

$$\|u\|_\infty \leqslant \frac{m}{\sqrt{e^{H_۰}}}\|u\|_H$$

که $m = \max\{(b-a)^{\frac{۵}{۲}}, (b-a)^{\frac{۳}{۲}}\}$.

تعریف ۴.۲. اگر $u \in X$ در رابطه‌ی زیر

$$\int_a^b e^{H(x)}u'''(x)v'''(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b e^{H(x)}f(x,u(x))\mathrm{d}x - \mu\int_a^b e^{H(x)}g(x,u(x))\mathrm{d}x = ۰$$

به‌ازای هر $v \in X$ صدق نماید، به u جواب ضعیف از معادله‌ی (۱.۱) می‌گویند.

تعریف ۵.۲. تابع $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را $L^۱$-کاراتئودری گویند هرگاه:

۱) نگاشت $x \mapsto f(x,\xi)$ به‌ازای هر $\xi \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد،

۲) نگاشت $\xi \mapsto f(x,\xi)$ تقریباً برای هر $x \in [a,b]$ پیوسته باشد،

۳) برای هر $\rho > ۰$ تابع $l_\rho \in L^۱([a,b])$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تقریباً هر $x \in [a,b]$

$$\sup_{|\xi|\leqslant\rho}|f(x,\xi)| \leqslant l_\rho(x).$$

متناظر با f و g، به‌ترتیب توابع $F, G : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x,t) := \int_۰^t f(x,\xi)\mathrm{d}\xi, \quad G(x,t) := \int_۰^t g(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

که $x \in [a,b]$ و $t \in \mathbb{R}$.

قضیه‌ی نقطه بحرانی زیر از مرجع [۴]، ابزار اصلی ما برای اثبات وجود جواب می‌باشد.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی و $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر گاتو [۴] باشد به‌طوری‌که Φ نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، پیوسته قوی و اجباری و Ψ نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای است. هم‌چنین برای هر $r > \inf\limits_X \Phi$ فرض می‌شود:

$$\varphi(r) := \inf_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r)} \frac{\left(\sup\limits_{v\in\Phi^{-1}(-\infty,r)} \Psi(v)\right) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)},$$

$$\gamma := \liminf_{r\to+\infty} \varphi(r), \quad \delta := \liminf_{r\to(\inf\limits_X \Phi)^+} \varphi(r).$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند:

الف) برای هر $r > \inf\limits_X \Phi$ و $\lambda \in (0, \frac{1}{\varphi(r)})$، تحدید تابع $I_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ به $\Phi^{-1}(-\infty, r)$ یک مینیمم سراسری می‌پذیرد که یک نقطه‌ی بحرانی (مینیمم موضعی) از I_λ در X است.

ب) اگر $\gamma < +\infty$، آن‌گاه برای هر $\lambda \in (0, \frac{1}{\gamma})$ یکی از حالت‌های زیر برقرار است: یا

ب۱) تابعک I_λ یک مینیمم سراسری دارد، یا

ب۲) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (مینیمم‌های موضعی) I_λ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = +\infty$.

پ) اگر $\delta < +\infty$، آن‌گاه برای هر $\lambda \in (0, \frac{1}{\delta})$ یکی از حالت‌های زیر برقرار می‌باشد: یا

پ۱) یک مینیمم سراسری از Φ وجود دارد که مینیمم موضعی I_λ است، یا

پ۲) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی دوبدو مجزا (مینیمم‌های موضعی) I_λ موجود است که همگرای ضعیف به مینیمم سراسری Φ می‌باشد.

۳ قضیه‌ی وجود جواب

در این بخش وجود یک دنباله بی‌کران از جواب‌ها برای مساله (۱.۱) اثبات می‌شود. با تعریف

$$A := \liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi} F(x,t)\mathrm{d}x}{\xi^2}$$

و

$$B := \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{a+\frac{1}{4}(b-a)}^{b-\frac{1}{4}(b-a)} F(x,\xi)\mathrm{d}x}{\xi^2}$$

قضیه‌ی اصلی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $f : [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع L^1-کاراتئودری است و

(F_1) برای هر $x \in [a+\frac{1}{4}(b-a), b-\frac{1}{4}(b-a)]$ و $t\in\mathbb{R}$، $F(x,t)\geqslant 0$،

(F_2) $A < \frac{e^{H_0}(b-a)^5}{1944 e^{H^0} m^2} B$.

[4] Gateaux

اگر قرار دهیم $\lambda_1 = \frac{972 e^{H^\circ}}{(b-a)^5 B}$ و $\lambda_2 = \frac{e^{H_\circ}}{2m^2 A}$، در این صورت برای هر $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ و برای هر تابع L^1-کاراتئودری $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که تابع

$$G(x,t) := \int_\circ^t f(x,\xi)\mathrm{d}\xi \quad \forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$$

نامنفی و صادق در شرط

$$g_\infty := \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant \xi} G(x,t)\mathrm{d}x}{\xi^2} < +\infty.$$

مساله (۱.۱) به‌ازای $\mu \in [\circ, \mu_{g,\lambda})$، دارای یک دنباله بی‌کران از جواب‌های ضعیف در X است که

$$\mu_{g,\lambda} := \frac{e^{H_\circ}}{2m^2 g_\infty}(1 - \lambda \frac{2m^2 A}{e^{H_\circ}}).$$

اثبات. می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی ۶.۲ قسمت (ب) حکم را ثابت کنیم. $\overline{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$ را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\mu_{g,\overline{\lambda}} = \frac{e^{H_\circ}}{2m^2 g_\infty}(1 - \overline{\lambda}\frac{2m^2 A}{e^{H_\circ}}) > \circ.$$

اکنون $\overline{\mu} \in (\circ, \mu_{g,\overline{\lambda}})$ را ثابت گرفته و به‌ازای $(x,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم

$$J(x,\xi) := F(x,\xi) + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} G(x,\xi).$$

به‌ازای $u \in X$، توابع $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_H^2, \quad \Psi(u) := \int_a^b J(x, u(x))\mathrm{d}x.$$

تابعک‌های Φ و Ψ در فرض‌های قضیه‌ی ۶.۲ صادق است. در واقع تابعک Φ مشتق‌پذیر گاتو و مشتق آن $\Phi'(u) \in X^*$ مساوی است با

$$\Phi'(u)(v) = \int_a^b e^{H(x)} u'''(x) v'''(x)\mathrm{d}x$$

به‌ازای $v \in X$. همچنین Φ نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، اجباری و پیوسته قوی است (با توجه به‌اینکه نرم این خواص را دارد بنابراین Φ نیز داراست). از طرفی چون X به‌طور فشرده در $C^1([a,b])$ نشانده می‌شود، بنابراین Ψ خوش‌تعریف، مشتق‌پذیر گاتو با مشتق فشرده است که

$$\Psi'(u)(v) = \int_a^b f(x,u(x))v(x)\mathrm{d}x + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} \int_a^b g(x,u(x))v(x)\mathrm{d}x$$

به‌ازای $v \in X$. ابتدا نشان می‌دهیم $\overline{\lambda} < \frac{1}{\gamma}$. بنابراین فرض کنید $\{\xi_n\}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant \xi_n} F(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^2} = A.$$

به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $r_n = \frac{e^{H_\circ}}{2m^2}\xi_n^2$. در این صورت برای هر $v \in X$ صادق در $\Phi(v) < r_n$، با توجه به تذکر ۳.۲ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}\frac{e^{H_\circ}}{m^2}\|v\|_\infty^2 < \frac{e^{H_\circ}}{2m^2}\xi_n^2,$$
$$\Rightarrow \|v\|_\infty < \xi_n.$$

چون $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$، بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \varphi(r_n) &= \inf_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r_n)} \frac{\left(\sup\limits_{v\in\Phi^{-1}(-\infty,r_n)} \Psi(v)\right) - \Psi(u)}{r_n - \Phi(u)} \\ &\leqslant \frac{\sup\limits_{v\in\Phi^{-1}(-\infty,r_n)} \Psi(v)}{r_n} \leqslant \frac{2m^2}{e^{H_0}} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi_n} J(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^2} \\ &\leqslant \frac{2m^2}{e^{H_0}} \left[\frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi_n} F(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^2} + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi_n} G(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^2} \right]. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

همچنین از فرض (F_2) و این‌که $g_\infty < +\infty$، مشاهده می‌کنیم $A < +\infty$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi_n} G(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^2} = g_\infty. \tag{۲.۳}$$

از روابط (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می‌گیریم

$$\gamma \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \varphi(r_n) \leqslant \frac{2m^2}{e^{H_0}}(A + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} g_\infty) < +\infty. \tag{۳.۳}$$

اکنون ثابت می‌کنیم قسمت (ب۱) از قضیه ۶.۲ برقرار نیست. در نتیجه قسمت (ب۲) حکم را اثبات می‌کند. برای این منظور از فرض $\overline{\mu} \in (0, \overline{\mu}_{g,\overline{\lambda}})$ شروع کرده و نتیجه می‌گیریم

$$\gamma \leqslant \frac{2m^2}{e^{H_0}}(A + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} g_\infty) < \frac{2m^2}{e^{H_0}} A + \frac{1 - \frac{2m^2}{e^{H_0}}\overline{\lambda}A}{\overline{\lambda}}.$$

بنابراین

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\frac{2m^2}{e^{H_0}} A + (1 - \frac{2m^2}{e^{H_0}}\overline{\lambda}A)/\overline{\lambda}} < \frac{1}{\gamma}.$$

چون $\frac{(b-a)^5}{972e^{H^0}} B < \frac{1}{\overline{\lambda}}$، دنباله‌ای مانند $\{\eta_n\}$ از اعداد مثبت و $\tau > 0$ وجود دارد که $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = +\infty$ و به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ

$$\frac{1}{\overline{\lambda}} < \tau < \frac{(b-a)^5}{972e^{H^0}} \frac{\int_{a+\frac{1}{3}(b-a)}^{b-\frac{1}{3}(b-a)} F(x,\eta_n)\mathrm{d}x}{\eta_n^2}. \tag{۴.۳}$$

به‌ازای $x \in [a, a + \frac{1}{3}(b-a)]$ تابع P_a را به‌صورت زیر تعریف کرده:

$$P_a(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

و به‌ازای $x \in [b - \frac{1}{3}(b-a), b]$ قرار می‌دهیم:

$$P_b(x) = \frac{1}{3} - \frac{x - [b - \frac{1}{3}(b-a)]}{b-a}.$$

همچنین به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$w_n(x) = \begin{cases} T(P_a(x))\eta_n & x \in [a, a + \frac{1}{3}(b-a)[\\ \eta_n & x \in [a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a)] \\ T(P_b(x))\eta_n & x \in]b - \frac{1}{3}(b-a), b] \end{cases}$$

که به‌ازای $x \in \mathbb{R}$

$$T(x) = ۱۴۵۸x^{۵} - ۱۲۱۵x^{۴} + ۲۷۰x^{۳}.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، به‌وضوح $w_n \in X$ و

$$\Phi(w_n) \leqslant \frac{۹۷۲e^{H^\circ}}{(b-a)^{۵}}\eta_n^{۲}. \tag{۵.۳}$$

از سویی دیگر فرض $(F_۱)$ و این‌که G نامنفی است، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\Psi(w_n) &= \int_a^b [F(x, w_n(x)) + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}G(x, w_n(x))]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{a+\frac{۱}{۴}(b-a)}^{b-\frac{۱}{۴}(b-a)} F(x, \eta_n)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

از رابطه‌های (۴.۳)–(۶.۳)، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ مشاهده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}I_{\overline{\lambda}}(w_n) &\leqslant \frac{۹۷۲e^{H^\circ}}{(b-a)^{۵}}\eta_n^{۲} - \overline{\lambda}\int_{a+\frac{۱}{۴}(b-a)}^{b-\frac{۱}{۴}(b-a)} F(x, \eta_n)\mathrm{d}x \\ &< \frac{۹۷۲e^{H^\circ}}{(b-a)^{۵}}\eta_n^{۲}(۱ - \overline{\lambda}\tau).\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

چون $\overline{\lambda}\tau > ۱$ و $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = +\infty$، رابطه‌ی (۷.۳) نتیجه می‌دهد $\lim_{n\to+\infty} I_{\overline{\lambda}}(w_n) = -\infty$. بنابراین $I_{\overline{\lambda}}$ از پایین کران‌دار نمی‌باشد. پس قسمت (ب۲) از قضیه‌ی ۶.۲ برقرار است. یعنی دنباله‌ای از نقاط بحرانی $I_{\overline{\lambda}}$، مانند $\{u_n\}$ وجود دارد که $\lim_{n\to+\infty}\|u_n\| = +\infty$ و حکم اثبات می‌شود. □

۴ نتایج قابل توجه

در این بخش دو حالت خاص و یک مثال از قضیه‌ی ۱.۳ را بیان کرده و در پایان وجود یک دنباله از جواب‌های همگرا به صفر را برای مساله (۱.۱) اثبات خواهیم کرد.

تذکر ۱.۴. قضیه‌ی قبل به‌ازای $\mu = ۰$ برقرار است. یعنی به‌ازای $\lambda \in]\frac{۹۷۲e^{H^\circ}}{(b-a)^{۵}B}, \frac{e^{H_\circ}}{۲m^{۲}A}[$ مسأله‌ی زیر

$$\begin{cases} u^{(۶)} + ۳hu^{(۵)} + ۳(h^{۲} + h')u^{(۴)} + (h^{۳} + ۳hh' + h'')u^{(۳)} = -\lambda f(x, u) & a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰ \\ u^{(۳)}(b) = u^{(۴)}(b) = u^{(۵)}(b) = ۰ \end{cases}$$

دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف در X است.

نتیجه ۲.۴. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۳، به‌ازای $\lambda \in]\frac{۹۷۲}{(b-a)^{۵}B}, \frac{۱}{۲m^{۲}A}[$ و $\mu \in [۰, \mu_{g,\lambda})$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} -u^{(۶)}(x) = \lambda f(x, u(x)) + \mu g(x, u(x)) & a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = ۰ \\ u^{(۳)}(b) = u^{(۴)}(b) = u^{(۵)}(b) = ۰ \end{cases} \tag{۱.۴}$$

دارای یک دنباله‌ای بی‌کران از جواب‌های ضعیف در X است.

اکنون یک مثال را جهت درک بهتر قضیه‌ی ۱.۳ بیان می‌کنیم.

مثال ۳.۴. به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم

$$a_n = \frac{n!(n+۲)! - ۱}{۲(n+۱)!}, \quad b_n = \frac{n!(n+۲)! + ۱}{۲(n+۱)!}$$

و تابع نامنفی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{۳۲(n+۱)!^۲[(n+۱)!^۲ - n!^۲]e^۳}{\pi} \sqrt{\frac{۱}{۱۶(n+۱)!^۲} - (\xi - \frac{n!(n+۲)}{۲})} & \xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \\ \circ & \text{سایر نقاط.} \end{cases}$$

با تغییر متغیر

$$\begin{cases} \xi - \frac{n!(n+۲)}{۲} = \frac{۱}{۴(n+۱)!} \sin\theta \\ \mathrm{d}\xi = \frac{۱}{۴(n+۱)!} \cos\theta \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

و محاسبات ساده نتیجه می‌گیریم

$$\int_{a_n}^{b_n} \sqrt{\frac{۱}{۱۶(n+۱)!^۲} - (\xi - \frac{n!(n+۲)}{۲})^۲}\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{۳۲(n+۱)!^۲}.$$

بنابراین به‌ازای $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{n!}^{(n+۱)!} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t = [(n+۱)!^۲ - n!^۲]e^۳.$$

پس مشاهده می‌کنیم

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(a_n)}{a_n^۲} = \circ, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{F(b_n)}{b_n^۲} = ۴e^۳ \tag{۲.۴}$$

که $F(t) = \int_\circ^t f(\xi)\mathrm{d}\xi$ به‌ازای $t \in \mathbb{R}$. از (۲.۴) نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^۲} = \circ, \quad \lim_{\xi\to+\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^۲} = ۴e^۳.$$

طبق قضیه ۱.۳، به‌ازای $\lambda \in (\frac{۹۷۲}{\sqrt[۳]{۹}}, +\infty)$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} u^{(۶)} + ۹x^۲u^{(۵)} + ۹(۳x^۴ + ۲x)u^{(۴)} + ۳(۹x^۶ + ۱۸x^۳ + ۲)u^{(۳)} = -\lambda f(u) \\ u(\circ) = u'(\circ) = u''(\circ) = \circ \\ u^{(۳)}(\sqrt[۳]{۳}) = u^{(۴)}(\sqrt[۳]{۳}) = u^{(۵)}(\sqrt[۳]{۳}) = \circ \end{cases}$$

دارای یک دنباله‌ی بی‌کران از جواب‌های ضعیف می‌باشد.

در پایان می‌خواهیم شرایطی را ارائه دهیم که مطابق قسمت (پ) از قضیه‌ی ۶.۲، مسأله‌ی (۱.۱) دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف را در X دارا بوده و این دنباله به صفر همگرای قوی باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم

$$\tilde{A} := \liminf_{\xi\to\circ^+} \frac{\int_a^b \sup_{|t|\leqslant\xi} F(x,t)\mathrm{d}x}{\xi^۲}$$

$$\tilde{B} := \limsup_{\xi\to\circ^+} \frac{\int_{a+\frac{۱}{۴}(b-a)}^{b-\frac{۱}{۴}(b-a)} F(x,\xi)\mathrm{d}x}{\xi^۲}.$$

قضیه ۴.۴. فرض کنیم شرط $(F_۱)$ از قضیه ۱.۳ برقرار بوده و

$$\tilde{A} < \frac{e^{H_\circ}(b-a)^۵}{۱۹۴۴e^{H^\circ}m^۲}\tilde{B}. \tag{۳.۴}$$

اگر قرار دهیم $\lambda_۳ = \frac{۹۷۲e^{H^\circ}}{(b-a)^۵\tilde{B}}$ و $\lambda_۴ = \frac{e^{H_\circ}}{۲m^۲\tilde{A}}$، در این صورت برای هر $\lambda \in (\lambda_۳, \lambda_۴)$ و برای هر تابع $L^۱$-کاراتئودری $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که تابع

$$G(x,t) := \int_\circ^t g(x,\xi)d\xi$$

نامنفی و صادق در شرط

$$g_\circ := \limsup_{\xi \to \circ^+} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi} G(x,t)\mathrm{d}x}{\xi^۲} < +\infty,$$

مسأله‌ی (۱.۱) به‌ازای

$$\mu \in [\circ, \frac{e^{H_\circ}}{۲m^۲g_\circ}(۱ - \lambda\frac{۲m^۲\tilde{A}}{e^{H_\circ}})[$$

دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف در X است که به صفر همگرای قوی است.

اثبات. همان‌طور که قبلاً گفته شد با استفاده از قسمت (پ) قضیه‌ی ۶.۲، حکم را ثابت می‌کنیم. $\tilde{\lambda} \in (\lambda_۳, \lambda_۴)$ را ثابت در نظر گرفته و بنابراین

$$\tilde{\mu}_{g,\lambda} := \frac{e^{H_\circ}}{۲m^۲g_\circ}(۱ - \tilde{\lambda}\frac{۲m^۲\tilde{A}}{e^{H_\circ}}) > \circ.$$

همچنین برای $\tilde{\mu}$ ثابت در بازه‌ی $[\circ, \tilde{\mu}_{g,\tilde{\lambda}})$، به‌ازای $(x,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$J(x,\xi) := F(x,\xi) + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}}G(x,\xi).$$

مانند اثبات قضیه‌ی ۱.۳ توابع Φ، Ψ و $I_{\tilde{\lambda}}$ را تعریف نموده و ابتدا ثابت می‌کنیم $\tilde{\lambda} < \frac{۱}{\delta}$. دنباله‌ی $\{\xi_n\}$ از اعداد مثبت را طوری در نظر می‌گیریم که $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = \circ$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_a^b \sup\limits_{|t|\leqslant\xi_n} F(x,t)\mathrm{d}x}{\xi_n^۲} = \tilde{A}.$$

چون $\inf\limits_X \Phi = \circ$، بنابراین $\delta = \liminf\limits_{r\to\circ^+} \varphi(r)$ و $\delta < +\infty$. از این‌که $\tilde{\mu} \in [\circ, \tilde{\mu}_{g,\tilde{\lambda}})$، می‌توان نوشت

$$\delta \leqslant \frac{۲m^۲}{e^{H_\circ}}(\tilde{A} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}}g_\circ) < \frac{۲m^۲}{e^{H_\circ}}\tilde{A} + \frac{۱ - \frac{۲m^۲}{e^{H_\circ}}\tilde{\lambda}\tilde{A}}{\tilde{\lambda}}.$$

در نتیجه

$$\tilde{\lambda} = \frac{۱}{\frac{۲m^۲}{e^{H_\circ}}\tilde{A} + (۱ - \frac{۲m^۲}{e^{H_\circ}}\tilde{\lambda}\tilde{A})/\tilde{\lambda}} < \frac{۱}{\delta}.$$

ثابت می‌کنیم $I_{\tilde{\lambda}}$ در صفر مینیمم موضعی ندارد. از آنجاکه

$$\frac{۱}{\tilde{\lambda}} < \frac{(b-a)^۵}{۹۷۲e^{H^\circ}}\tilde{B}$$

دنباله‌ای از اعداد مثبت مانند $\{\eta_n\}$ و عدد مثبت τ وجود دارد که $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = \circ$ و

$$\frac{۱}{\tilde{\lambda}} < \tau < \frac{(b-a)^۵}{۹۷۲e^{H^\circ}} \frac{\int_{a+\frac{۱}{۴}(b-a)}^{b-\frac{۱}{۴}(b-a)} F(x,\eta_n)\mathrm{d}x}{\eta_n^۲}$$

به‌ازای عدد طبیعی n به‌قدر کافی بزرگ. برای $n \in \mathbb{N}$، w_n را مانند اثبات قضیه ۱.۳ تعریف می‌کنیم و داریم:

$$I_{\tilde{\lambda}}(w_n) = \Phi(w_n) - \tilde{\lambda}\Psi(w_n) \leqslant \frac{972 e^{H^0}}{(b-a)^5}\eta_n^2(1-\tilde{\lambda}\tau) < 0.$$

چون

$$\lim_{n\to+\infty} I_{\tilde{\lambda}}(w_n) = I_{\tilde{\lambda}}(0) = 0$$

صفر مینیمم موضعی از $I_{\tilde{\lambda}}$ نمی‌باشد. با توجه به این‌که صفر مینیمم سراسری تابعک Φ است، نتیجه می‌گیریم $I_{\tilde{\lambda}}$ مینیمم موضعی در مینیمم سراسری Φ ندارد. بنابراین طبق قسمت (پ) از قضیه‌ی ۶.۲ دنباله‌ی $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی $I_{\tilde{\lambda}}$ در X وجود دارد که به صفر همگرای ضعیف است. هم‌چنین چون X به‌طور فشرده در $C^1([a,b])$ نشانده می‌شود، دنباله‌ی $\{u_n\}$ به صفر همگرای قوی است و اثبات تمام می‌باشد. $\square$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مسأله‌ی مقدار مرزی از مرتبه‌ی ششم با روش تغییراتی بررسی شد. در واقع تحت فرض‌های مناسب، بازه‌هایی را برای پارامترهای کنترلی مسأله $\{\mu, \lambda\}$ ارائه کردیم که به‌ازای مقادیر معین از آن‌ها مسأله دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف بی‌کران یا همگرا به صفر است. خوانندگان محترم و علاقمند می‌توانند از مطالب بیان شده در این مقاله بهره برده و مسأله را با سایر روش‌ها یا قضایا بررسی نمایند.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داورهای محترم جهت مطالعه دقیق مقاله و ارائه اصلاحات و پیشنهادهای ارزشمند، صمیمانه قدردانی می‌نمایند.

فهرست منابع

[1] Abdolrazaghi, F., Razani, A. and Mirzaei, R., 2020. Multiple weak solutions for a kind of time-dependent equation involving singularity, *Filomat*, 34(13), pp.4567–4574. doi: 10.2298/FIL2013567A

[2] Bonanno, G., Candito, P. and Oregan, D., 2021. Existence of nontrivial solutions for sixth-order differential equations, *Mathematics*, 9(16), 1852. doi: 10.3390/math9161852

[3] Bonanno, G. and Livrea, R., 2021. A sequence of positive solutions for sixth-order ordinary nonlinear differential problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 20, pp.1–17. doi: 10.14232/ejqtde.2021.1.20

[4] Bonanno, G. and Molica Bisci, G., 2009. Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities, *Bound. Value Probl.*, 2009, pp.1–20. doi: 10.1155/2009/670675

[5] Chaparova, J.V., Peletier, L.A. and Tersian, S.A., 2004. Existence and nonexistence of nontrivial solutions of semilinear sixth-order ordinary differential equations, *Appl. Math. Lett.*, 17(10), pp.1207–1212. doi: 10.1016/j.aml.2003.05.014

[6] Ghobadi, A. and Heidarkhani, S., 2023. Variational approach for an elastic beam equation with local nonlinearities, *Ann. Polon. Math.*, 130, pp.201–222. doi: 10.4064/ap220519-20-10

[7] Glatzmaier, G.A., 1985. Numerical simulations of stellar convective dynamics iii: at the base of the convection zone, *Astrophys J.*, 31(1-2), pp.137–150. doi: 10.1080/03091928508219267

[8] Martinez, A. L. M., Pendeza Martinez, C. A., Bressan, G. M., Souza, R. M. and Meier, E. W., 2021. Multiple solutions for a sixth order boundary value problem, *Trends in comput. Appl. Math.*, 22(1), pp.1–12. doi: 10.5540/tcam.2021.022.01.00001

[9] Moller, M. and Zinsou, B., 2013. Sixth order diffrential operators with eigenvalue dependent boundary conditions, *Appl. Anal. Discret. Math.*, 7(2), pp.378–389. doi: 10.2298/AADM130608010M

[10] Shokooh, S., 2023. Existence of solutions for a sixth-order nonlinear equation, *Rend. Circ. Mat. Palermo(2)*, 72, pp.4251–4271. doi: 10.1007/s12215-023-00901-8

[11] Shokooh, S., 2023. Variational techniques for a system of sturm-liouville equations, *J. Elliptic Parabol. Equ.*, 9, pp.595–610. doi: 10.1007/s41808-023-00217-9

[12] Shokooh, S., 2020. On a model of nonlinear differential equation with variable exponent by variational method, *Journal of Advanced Mathmatical Modeling*, 10(2), pp.453–472. doi: 10.22055/JAMM.2020.31804.1784

[13] Xia, M., Zhang, X., Kang, D. and Liu, C., 2022. Existence and concentration of nontrivial solutions for an elastic beam equation with local nonlinearity, *AIMS Mathematics*, 7(1), pp.579–605. doi: 10.3934/math.2022037

On the existence of solutions for a sixth-order boundary value problem

Saeid Shokooh[(1)] [5] Hadis Ghezelseflou[(1)] and Razieh Farokhzad Rostami[(1)]

[(1)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran.

Communicated by: Morteza Fotouhi

Received: 16 February 2024 Accepted:23 June 2024

Abstract: In this paper, by employing the variational method, we show that a boundary value problem of sixth order has infinitely many solutions. In fact, via a critical point theorem, we will present sufficient conditions such that the problem has a sequence of solutions in a suitable function space. Specific cases and an example of results are also stated.

Keywords: Critical point, Variational method, Boundary value problems.

[5] Corresponding author.

E-mail addresses: (S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir, (H. Ghezelseflou) ghezelseflouh@gmail.com (R. Farokhzad Rostami) r_farokhzad@gonbad.ac.ir.