مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۵۸-۷۰

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2024.45249.2244

عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته از زیرفضای پایای مینیمال موبیوس به nامین فضای وزن‌دار

داریوش مولایی[(۱)]، **سپیده نصراصفهانی**[(۲)]، **کمال خلیل پور**[(۳)] و **علی ابراهیمی**[(۳)] [۱]

[(۱)] دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه، ارومیه، ایران
[(۲)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
[(۳)] دانشگاه آزاد اسلامی واحد مهاباد، مهاباد، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۸

چکیده:
در این مقاله، ابتدا کرانداری عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیمیافته از زیرفضای پایای مینیمال موبیوس به nامین فضای وزن‌دار را مورد مطالعه قرار داده و شرایط معادلی برای کرانداری آن بر حسب چندجمله‌ای‌های بِل پیدا خواهد شد. پس از آن تخمین‌هایی برای نرم اساسی عملگر مذکور ارائه و سپس با استفاده از این تخمین‌ها شرایط معادلی برای فشردگی آن عملگر ارائه خواهد شد.

واژه‌هاي كليدي:
نرم اساسی، زیرفضای مینیمال موبیوس، nامین فضای وزن‌دار، فضای از نوع بلاخ، فضای از نوع زیگموند.

رده‌بندی ریاضی: 30H20; 46E40; 47B38

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنیم $\mathbb{D}$ گوی واحد باز در صفحه مختلط و $H(\mathbb{D})$ فضای همه توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد. هر تابع پیوسته و مثبت روی $\mathbb{D}$ را یک وزن می‌نامند.

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(S. Nasresfahani) sepide.nasr@gmail.com, (D. Molaei) Daryoush.Molaei@iau.ac.ir
(A. Ebrahimi) ebrahimi.ali2719@gmail.com, (K. Khalilpour) kamal.khalilpour@iau.ac.ir

تعریف ۱.۱. فرض کنیم μ یک وزن و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. nامین فضای وزن‌دار که با W_μ^n نشان داده می‌شود از تمام توابع $f \in H(\mathbb{D})$ تشکیل شده است به‌طوری‌که در شرط زیر صدق کنند

$$\|f\|_{n,\mu} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)| < \infty.$$

این فضا با نرم

$$\|f\|_{W_\mu^n} = \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(0)| + \|f\|_{n,\mu},$$

یک فضای باناخ می‌باشد.

nامین فضای وزن‌دار کوچک $W_{\mu,0}^n$، یک زیرفضا بسته از W_μ^n می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in W_{\mu,0}^n$ داریم

$$\|f\|_{n,\mu} = \lim_{|z|\to 1} \mu(z)|f^{(n)}(z)|.$$

nامین فضای وزن‌دار اولین بار توسط استویچ در [۸] تعریف شد. این فضا کلاس وسیعی از توابع را شامل می‌شود که در زیر به چند مورد اشاره خواهیم کرد.
فرض کنید $\alpha > 0$، دراین‌صورت $\mathcal{B}^\alpha = W^1_{(1-|z|^2)^\alpha}$ (فضای از نوع بلاخ)، $\mathcal{Z}^\alpha = W^2_{(1-|z|^2)^\alpha}$ (فضای از نوع زیگموند) و همچنین $W^1_{(1-|z|^2)^\alpha \log \frac{2}{1-|z|^2}}$ فضای بلاخ لگاریتمی است. $H_\mu = W_\mu^0$ (فضای از نوع وزن‌دار)، $H^\infty = W_1^0$ (فضای توابع تحلیلی کراندار)، $\mathcal{B} = W_\mu^1$ (فضای بلاخ وزن‌دار) و $\mathcal{Z}_\mu = W_\mu^2$ (فضای زیگموند وزن‌دار) می‌باشد. به طریق مشابه فضای از نوع بلاخ کوچک و از نوع زیگموند کوچک با استفاده از $W_{\mu,0}^n$ به‌دست خواهند آمد. اطلاعات بیشتر در مورد فضای از نوع وزن‌دار، فضای از نوع بلاخ، فضای از نوع زیگموند و nامین فضای وزن‌دار، در مقالات [۱–۳، ۶، ۸] قابل دسترسی می‌باشد.
فرض کنید $Aut(\mathbb{D})$ گروه نگاشت های موبیوس روی $\mathbb{D}$ باشد. واضح است که هر عضو $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ به‌صورت

$$\varphi(z) = \exp^{i\theta} \sigma_a(z), \quad \sigma_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z},$$

می‌باشد که در آن $a \in \mathbb{D}$ و θ عددی حقیقی است.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $X \subset H(\mathbb{D})$ و $\|\cdot\|_X$ یک نیم‌نرم روی X باشد. دراین‌صورت X را یک زیرفضای پایای موبیوس نامند هرگاه برای هر $f \in X$ و هر $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ داشته باشیم

$$f \circ \varphi \in X, \quad \|f \circ \varphi\|_X = \|f\|_X.$$

همچنین، فضای بسوف از مرتبه یک که با B_1 نشان داده می‌شود شامل تمام توابعی مانند f می‌باشد که دارای نمایشی به‌صورت زیر هستند

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{a_k}(z), \quad a_k \in \mathbb{D}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

فضای B_1 با نرم زیر یک فضای باناخ است

$$\|f\|_{B_1} = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| : \ f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{a_k}(z) \Big\}.$$

واضح است که هر زیرفضای پایای موبیوس شامل $B_۱$ می‌باشد، از این‌رو $B_۱$ را زیرفضای پایای مینیمال موبیوس می‌نامند. برای کسب اطلاعات بیشتر منبع [۴] را بنگرید. از طرفی در [۷] ثابت شده است که فضای بلاخ $\mathcal{B}$، زیرفضای پایای ماکزیمال موبیوس می‌باشد.

مجموعه تمام توابع تحلیلی از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ را با $S(\mathbb{D})$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $\varphi \in S(\mathbb{D})$ و $u \in H(\mathbb{D})$ و m یک عدد صحیح نامنفی باشد. عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته القا شده توسط φ و u را با $D^m_{\varphi,u}$ نشان می‌دهند هرگاه

$$(D^m_{\varphi,u}f)(z) = u(z)f^{(m)}\Big(\varphi(z)\Big), \quad z \in \mathbb{D}.$$

این عملگر اولین بار توسط ژو تعریف شده است. اطلاعات بیشتر در مورد این عملگر در منابع [۱۳، ۱۴] قابل دسترسی می‌باشد.

تعریف ۴.۱. فرض کنید n و k دو عدد صحیح نامنفی با شرط $k \leq n$ باشند. چندجمله‌ای بِل جزئی kام وابسته به n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{n,k}(x_۱, x_۲, ..., x_{n-k+۱}) = \sum \frac{n!}{\prod_{i=۱}^{n-k+۱}(j_i)!} \prod_{i=۱}^{n-k+۱} \left(\frac{x_i}{(i)!}\right)^{j_i},$$

که در آن j_i ها اعداد حقیقی نامنفی هستند و در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} &j_۱ + j_۲ + ... + j_{n-k+۱} = k, \\ &j_۱ + ۲j_۲ + ... + (n-k+۱)j_{n-k+۱} = n \end{aligned}$$

و اگر چنین اعدادی موجود نباشند، آنگاه

$$B_{n,k}(x_۱, x_۲, ..., x_{n-k+۱}) = ۰.$$

به عنوان مثال،

$$\begin{array}{rr} B_{۰,۰}(x_۱) = ۱ & B_{۱,۱}(x_۱) = x_۱ \\ B_{۱,۰}(x_۱, x_۲) = ۰ & B_{n,n}(x_۱) = x_۱^n \\ B_{n,۰}(x_۱, x_۲, ..., x_{n+۱}) = ۰ & B_{n,۱}(x_۱, ..., x_n) = x_n. \end{array}$$

برای اطلاعات جامع در مورد چندجمله‌ای بِل به [۵] مراجعه شود.
لم پر کاربرد زیر توسط استویچ در [۸] ثابت شده است.

لم ۵.۱. فرض کنید g, f و u توابع مشتق پذیر از مرتبه n باشند. دراین‌صورت

$$\Big(u(z)f(g(z))\Big)^{(n)} = \sum_{k=۰}^{n} f^{(k)}(g(z)) \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} u^{(n-l)}(z) B_{l,k}(g'(z), ..., g^{(l-k+۱)}(z)). \qquad (۱.۱)$$

کرانداری، فشردگی و تخمین نرم اساسی عملگر $D^m_{\varphi,u}$ روی برخی از فضاهای توابع تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا شرایط معادلی برای کرانداری عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_۱ \to W^n_\mu$ پیدا می کنیم. پس از آن تخمین‌هایی برای نرم اساسی عملگر مذکور ارائه و اثبات خواهیم کرد. سپس با استفاده از این تخمین‌ها شرایط معادلی برای فشردگی عملگر مذکور ارائه می‌دهیم. همچنین معادل بودن کرانداری و فشردگی عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_۱ \to W^n_\mu$ با کرانداری و فشردگی عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B} \to W^n_\mu$ به عنوان نتایج، ارائه خواهد شد.
اشارات: فرض کنید A و B دو عدد باشند. منظور از نماد $A \preceq B$، یعنی ثابت مثبتی مانند C موجود است به‌طوری‌که $A \leq CB$. همچنین $A \approx B$ یعنی $A \preceq B \preceq A$.

۲ کرانداری

در این بخش کرانداری عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته از زیرفضای پایای مینیمال موبیوس به nامین فضای وزن‌دار بررسی خواهد شد. به‌همین منظور ابتدا چند لم کاربردی را بیان خواهیم کرد.

لم ۱.۲. [۱۴] فرض کنید

$$f_{j,a}(z)=\Big(\frac{1-|a|^2}{1-\overline{a}z}\Big)^j;\quad j\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{D}.$$

دراین‌صورت

$$f_{j,a}(z)\in\mathcal{B}_1,\qquad \sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}}\|f_{j,a}\|_{\mathcal{B}_1}<\infty.$$

همچنین اگر $|a|\to 1$، آنگاه $f_{j,a}$ روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ به طور یکنواخت به صفر همگرا می‌باشند.

با جایگذاری $\alpha=1$ در لم ۱.۲ مقاله [۳] لم زیر حاصل خواهد شد.

لم ۲.۲. فرض کنید $m\in\mathbb{N}$ و $0\neq a\in\mathbb{D}$، دراین‌صورت به‌ازای هر $i\in\{0,1,2,\dots,n\}$ تابع $g_{i,a}\in\mathcal{B}_1$ موجود است به‌طوری‌که

$$g_{j,a}^{(m+k)}(a)=\frac{\delta_{ik}\overline{a}^{m+k}}{(1-|a|^2)^{m+k}},$$

که در آن $\delta_{i,k}$ دلتای کرونکر است. همچنین

$$g_{i,a}(z)=\sum_{j=1}^{n+1}c_j^i f_{j,a}(z),$$

که در آن ضرایب c_j^i مستقل از a هستند.

با توجه به تعریف نرم زیرفضای پایای مینیمال موبیوس، واضح است که به‌ازای هر $f\in\mathcal{B}_1$، داریم

$$\|f\|_\infty<\|f\|_{\mathcal{B}_1}.$$

از این‌رو بنابر گزاره ۵.۱.۲، [۱۱] و گزاره ۸ [۱۲] لم زیر برقرار است.

لم ۳.۲. فرض کنید k عدد صحیح نامنفی دلخواهی باشد. دراین‌صورت ثابت C چنان موجود است که برای هر $f\in\mathcal{B}_1$،

$$(1-|z|^2)^k|f^{(k)}(z)|<C\|f\|_{\mathcal{B}_1}.$$

در این مقاله برای سادگی محاسبات قرار می‌دهیم

$$I_{k,\varphi}^{n,u}(z)=\sum_{l=k}^{n}\binom{n}{l}u^{(n-l)}(z)B_{l,k}(\varphi'(z),\dots,\varphi^{(l-k+1)}(z)).$$

قضیه ۴.۲. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی، $u\in H(\mathbb{D})$ و همچنین μ یک وزن باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ کراندار است.
ب) اگر

$$f_{j,a}(z)=\Big(\frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}z}\Big)^j,$$

آنگاه

$$\max\Big\{\sup\|D^m_{\varphi,u}f_{j+1,a}\|_{W^n_\mu},\sup\mu(z)|I^{n,u}_{j,\varphi}(z)|\Big\}^n_{j=0}<\infty.$$

ج) برای هر $j\in\{0,1,2,\dots,n\}$ داریم

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{j,\varphi}(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+j}}<\infty.$$

اثبات. الف$\Leftarrow$ ب. فرض کنید (الف) برقرار باشد. دراین‌صورت بنابر لم ۱.۲، به‌ازای هر $j\in\{0,1,2,\dots,n\}$ داریم

$$\begin{aligned}\|D^m_{\varphi,u}f_{j+1,a}\|_{W^n_\mu}&\le\|D^m_{\varphi,u}\|\|f_{j+1,a}\|_{\mathcal{B}_1}\\&\le\|D^m_{\varphi,u}\|\sup_{j\in\{0,1,2,\dots,n\}}\|f_{j+1,a}\|_{\mathcal{B}_1}<\infty.\end{aligned}$$

واضح است که به‌ازای هر عدد طبیعی دلخواه k، تابع $P_k(z)=z^k$ در $\mathcal{B}_1$ قرار دارد. ازاین‌رو بنابر لم ۱.۱، داریم

$$D^m_{\varphi,u}P_m(z)=m!I^{n,u}_{0,\varphi}(z).$$

بنابراین

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|I^{n,u}_{0,\varphi}(z)|\le\frac{1}{m!}\|D^m_{\varphi,u}P_m\|_{W^n_\mu}<\infty.$$

اکنون فرض کنید به‌ازای هر $0\le j\le n-1$ رابطه

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|I^{n,\mu}_{j,\varphi}(z)|<\infty,$$

برقرار باشد. نشان می‌دهیم که

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|I^{n,u}_{j+1,\varphi}(z)|<\infty.$$

از طرفی می‌دانیم که رابطه زیر برقرار است

$$(D^m_{\varphi,u}P_{m+j+1}(z))^{(n)}=\sum_{i=0}^{j+1}\frac{(m+j+1)!}{(j+1-i)!}\varphi^{(j+1-i)}(z)I^{n,u}_{i,\varphi}(z).$$

اما $\|\varphi\|_\infty\le 1$، ازاین‌رو با توجه به رابطه قبل و نامساوی مثلثی داریم:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|I^{n,u}_{j+1,\varphi}(z)|<\infty.$$

ب $\Leftarrow$ ج. فرض کنید $a \in \mathbb{D}$ چنان باشد که $\varphi(a) \neq \circ$. دراین‌صورت بنابر لم‌های ۱.۱ و ۲.۲، به‌ازای هر $i \in \{\circ, ۱, ۲, .., n\}$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\mu(a)|\varphi(a)|^{m+i}|I_{i,\varphi}^{n,u}(a)|}{(۱-|\varphi(a)|^{۲})^{m+i}} &\leq \|D_{\varphi,u}^{m} g_{i,a}\|_{W^n}\\ &\leq \sum_{j=۱}^{n+۱} |c_j^i| \|D_{\varphi,u}^{m} f_{j,a}\|_{W^n},\end{aligned}$$

با توجه به رابطه قبل

$$\sup_{|\varphi(a)|>\frac{۱}{۲}} \frac{\mu(a)|I_{i,\varphi}^{n,u}(a)|}{(۱-|\varphi(a)|^{۲})^{m+i}} \preceq \sum_{j=۱}^{n+۱} |c_j^i| \sup_{a\in\mathbb{D}} \|D_{\varphi,u}^{m} f_{j,a}\|_{W^n} < \infty.$$

همچنین بنابر فرض داریم

$$\sup_{|\varphi(a)|\leq\frac{۱}{۲}} \frac{\mu(a)|I_{i,\varphi}^{n,u}(a)|}{(۱-|\varphi(a)|^{۲})^{m+i}} \leq \left(\frac{۴}{۳}\right)^{m+i} \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(a)|I_{i,\varphi}^{n,u}(a)| < \infty.$$

ج $\Leftarrow$ الف. بنابر لم‌های ۱.۱ و ۳.۲، به‌ازای هر $f \in \mathcal{B}_۱$ داریم

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)\left|\left(D_{\varphi,u}^{m} f\right)^{(n)}(z)\right| &\leq \sum_{i=\circ}^{n} \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)\left|f^{(m+i)}\left(\varphi(z)\right)\right|\left|I_{i,\varphi}^{n,u}(z)\right|\\ &= \sum_{i=\circ}^{n} \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)(۱-|\varphi(z)|^{۲})^{m+i}\left|f^{(m+i)}(\varphi(z))\right| \frac{|I_{i,\varphi}^{n,u}(z)|}{(۱-|\varphi(z)|^{۲})^{m+i}}\\ &\preceq \|f\|_{\mathcal{B}_۱} \sum_{i=\circ}^{n} \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\mu(z)\left|I_{i,\varphi}^{n,u}(z)\right|}{(۱-|\varphi(z)|^{۲})^{m+i}},\end{aligned}$$

از طرفی برای هر $k < n$ داریم

$$\left|\left(D_{\varphi,u}^{m} f\right)^{(k)}(\circ)\right| \preceq \|f\|_{\mathcal{B}_۱} \sum_{\circ}^{n} \frac{\left|I_{i,\varphi}^{n,u}(\circ)\right|}{(۱-|\varphi(\circ)|^{۲})^{m+i}}. \qquad (۱.۲)$$

روابط بالا، کرانداری عملگر $D_{\varphi,u}^{m} : \mathcal{B}_۱ \to W_\mu^n$ را نتیجه می‌دهد. $\square$

با توجه به قضیه قبل و قضیه ۱.۲ [۳] نتیجه زیر برقرار است.

نتیجه ۵.۲. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند، $u \in H(\mathbb{D})$ و $\varphi \in S(\mathbb{D})$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:
الف) عملگر $D_{\varphi,u}^{m} : \mathcal{B}_۱ \to W_\mu^n$ کراندار است.
ب) عملگر $D_{\varphi,u}^{m} : \mathcal{B} \to W_\mu^n$ کراندار است.
ج) عملگر $D_{\varphi,u}^{m} : \mathcal{B}_\circ \to W_\mu^n$ کراندار است.
د) عملگر $D_{\varphi,u}^{m} : H^\infty \to W_\mu^n$ کراندار است.

۳ نرم اساسی

در این بخش تخمین‌هایی برای نرم اساسی عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_۱\to W^n_\mu$ پیدا خواهیم کرد و پس از آن شرایط معادلی برای فشردگی عملگر مذکور ارائه می‌کنیم.
فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. نرم اساسی عملگر کراندار $T:X\to Y$ که با $\|T\|_{e,X\to Y}$ نشان داده می‌شود، عبارتست از

$$\inf_K \|T-K\|_{X\to Y}, \tag{۱.۳}$$

که در آن K عملگر فشرده از X به Y است. بنابر این تعریف، عملگر T فشرده است اگر و تنها اگر $\|T\|_{e,X\to Y}=۰$.
با توجه به تعریف زیرفضای پایای مینیمال موبیوس، هر عضو دلخواه از آن را می‌توان چنان توسیع داد که روی مرز $\mathbb{D}$، نیز پیوسته باشد و از طرفی برای هر $f\in\mathcal{B}_۱$، $\|f\|_\infty\le\|f\|_{\mathcal{B}_۱}$. پس $\mathcal{B}_۱$ زیرمجموعه جبر دیسک است.

لم ۱.۳. [۱۵] هر دنباله کراندار در $\mathcal{B}_۱$ دارای زیر دنباله‌ای است که روی $\overline{\mathbb{D}}$ به طور یکنواخت به تابعی در $\mathcal{B}_۱$ همگرا باشد.

لم ۲.۳. [۱۰] گیریم X و Y دو فضای باناخ از توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشند. فرض کنید
الف) هر تابعک خطی ارزیاب δ_z روی فضای Y کراندار است،
ب) گوی واحد بسته X، در توپولوژی همگرایی فشرده، فشرده است،
ج) اگر X و Y به توپولوژی همگرایی فشرده مجهز شوند، آنگاه عمگر $T:X\to Y$ پیوسته است.
دراین‌صورت عملگر $T:X\to Y$ فشرده است، اگر و تنها اگر برای هر دنباله دلخواه و کراندار $\{f_k\}_{k=۱}^\infty$ در X، که در توپولوژی همگرایی فشرده، همگرا به صفر است، داشته باشیم

$$\lim_{k\to\infty}\|Tf_k\|=۰.$$

قضیه ۳.۳. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند، $u\in H(\mathbb{D})$، $\varphi\in S(\mathbb{D})$ و عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_۱\to W^n_\mu$ کراندار باشد. اگر

$$E_i=\limsup_{|a|\to ۱}\|D^m_{\varphi,u}f_{i,a}\|,$$
$$F_i=\limsup_{|\varphi(z)|\to ۱}\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)}{(۱-|\varphi(z)|^۲)^{m+i}},$$

آنگاه

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_۱\to W^n_\mu}\approx\max\{E_i\}_{i=۱}^{n+۱}\approx\max\{F_i\}_{i=۰}^n.$$

اثبات. به‌ازای هر $i\in\{۱,۲,\dots,n+۱\}$ و هر زیرمجموعه فشرده مانند $A\subset\mathbb{D}$ برای تابع $f_{i,a}(z)=\left(\frac{۱-|a|^۲}{۱-\bar{a}z}\right)^i$ روی A داریم

$$\begin{aligned}|f_{i,a}(z)|=\left|\frac{۱-|a|^۲}{۱-\bar{a}z}\right|^i&\le\frac{(۱-|a|^۲)^i}{(۱-|z|)^i}\\&\le(۱-|a|^۲)^i\max_{z\in A}\frac{۱}{(۱-|z|)^i}.\end{aligned}$$

پس تابع $f_{i,a}(z)$ روی زیر مجموعه های فشرده از $\mathbb{D}$ با شرط $|a|\to ۱$ به‌طور یکنواخت به صفر همگراست.
بنابر لم ۲.۳، برای هر عملگر فشرده مانند $K:\mathcal{B}_۱\to W^n_\mu$، داریم

$$\lim_{|a|\to ۱}\|Kf_{i,a}\|_{W^n_\mu}=۰. \tag{۲.۳}$$

ازاین‌رو بنابر تعریف نرم عملگری، بکارگیری نابرابری مثلثی و استفاده از رابطه (۲.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|D^m_{\varphi,u}-K\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu} &\succeq \limsup_{|a|\to 1}\left\|\Big(D^m_{\varphi,u}-K\Big)f_{i,a}\right\|_{W^n_\mu}\\ &\geq \limsup_{|a|\to 1}\|D^m_{\varphi,u}f_{i,a}\|_{W^n_\mu}-\limsup\|Kf_{i,a}\|_{W^n_\mu}=E_i,\end{aligned}$$

با توجه به تعریف نرم اساسی،

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}=\inf_K\|D^m_{\varphi,u}-K\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\succeq\max\{E_i\}_{i=1}^{n+1}.$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\succeq\max\{F_i\}_{i=0}^{n}.$$

فرض کنید $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دلخواه در $\mathbb{D}$ باشد به‌طوری‌که $\lim_{j\to\infty}|\varphi(z_j)|=1$. بنابر فرض، عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ کراندار می‌باشد پس برای هر عملگر فشرده مانند $K:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ و هر $0\leq i\leq n$، بنابر لم‌های ۲.۲ و ۲.۳ داریم

$$\begin{aligned}\|D^m_{\varphi,u}-K\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu} &\succeq \limsup_{j\to\infty}\|D^m_{\varphi,u}f_{i,\varphi(z_j)}\|_{W^n_\mu}-\limsup_{j\to\infty}\|Kf_{i,\varphi(z_j)}\|_{W^n_\mu}\\ &\succeq \limsup_{j\to\infty}\frac{\mu(z_j)|\varphi(z_j)|^{m+i}|I^{n,u}_{i,\varphi}(z_j)|}{(1-|\varphi(z_j)|^2)^{m+i}}\\ &= \limsup_{|\varphi(z_j)|\to 1}\frac{\mu(z_j)\overbrace{|\varphi(z_j)|^{m+i}}^{1}|I^{n,u}_{i,\varphi}(z_j)|}{(1-|\varphi(z_j)|^2)^{m+i}}=F_i.\end{aligned}$$

با توجه به تعریف نرم اساسی،

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\succeq\max\{F_i\}_{i=0}^{n}.$$

حال باید نشان دهیم

$$\begin{aligned}\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}&\preceq\max\{E_i\}_{i=1}^{n+1},\\ \|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}&\preceq\max\{F_i\}_{i=0}^{n}.\end{aligned}$$

از طرفی، بنابر لم ۳.۷ [۹]، عملگر خطی و کراندار $K_r:\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1$ برای هر $r\in(0,1)$ با ضابطه

$$(K_rf)(z)=f_r(z)=f(rz)$$

فشرده است و همچنین $\|K_r\|_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1}\leq 1$. اکنون فرض کنید $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله دلخواه از بازه $(0,1)$ باشد که $\lim_{j\to\infty}r_j=1$. می‌دانیم که عملگر $D^m_{\varphi,u}K_{r_j}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ فشرده است، ازاین‌رو بنابر تعریف نرم اساسی خواهیم داشت

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\leq\limsup_{j\to\infty}\|D^m_{\varphi,u}-D^m_{\varphi,u}K_{r_j}\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}.$$

با توجه به رابطه فوق، اگر نشان دهیم

$$\limsup_{j\to\infty}\|D^m_{\varphi,u}(I-K_{r_j})\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\preceq\min\{\max\{E_i\}_{i=1}^{n+1},\max\{F_i\}_{i=0}^{n}\}$$

حکم اثبات شده است.
برای هر عضو دلخواهی از گوی واحد فضای $\mathcal{B}_1$ مانند f داریم

$$\begin{aligned}\|D^m_{\varphi,u}(I-K_{r_j})f\|_{W^n_\mu} &\leq \sum_{s=0}^{n-1}\underbrace{\Big|\sum_{i=0}^{s}(f^{(m+i)}-f^{(m+i)}_{r_j})(\varphi(0))I^{s,u}_{i,\varphi}(0)\Big|}_{M_i}\\ &+\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\sup_{|\varphi(z)|\leq r_N}\mu(z)\Big|(\Big(f-f_{r_j}\Big)^{(m+i)}(\varphi(z))\Big||I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}_{H_i}\\ &+\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\sup_{|\varphi(z)|>r_N}\mu(z)\Big|(\Big(f-f_{r_j}\Big)^{(m+i)}(\varphi(z))\Big||I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}_{V_i}\end{aligned}$$

که در آن عدد طبیعی N چنان موجود است که به‌ازای هر $j\geq N$ داشته باشیم $r_j>\frac{3}{4}$. آشکار است که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی k، دنباله $\Big(f-f_{r_j}\Big)^{(k)}$ در توپولوژی همگرایی فشرده، همگرا به صفر می‌باشد. پس بنابر لم ۱.۲ و ۲.۲، برای هر $0\leq i\leq n$ داریم

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty}H_i &\leq \limsup_{|\varphi(z)|\leq r_N}\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}}(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}\Big|\Big(f-f_{r_j}\Big)^{(m+i)}(\varphi(z))\Big|\\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{\mu(z)\Big|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)\Big|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}}\limsup_{|\varphi(z)|\leq r_N}\Big|\Big(f-f_{r_j}\Big)^{(m+i)}(\varphi(z))\Big|=0.\end{aligned}$$

ازاین‌رو $\limsup_{j\to\infty}H_i=0$.
از طرفی چون $\{\varphi(0)\}$ یک زیر مجموعه فشرده از $\mathbb{D}$ است پس برای هر $0\leq i\leq n$،

$$\limsup_{j\to\infty}M_j=0.$$

اما هر V_i را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$V_i\leq\underbrace{\sup_{|\varphi(z)|>r_N}\mu(z)|f^{(m+i)}(\varphi(z))||I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}_{V_{i,1}}+\underbrace{\sup_{|\varphi(z)|>r_N}\mu(z)\Big|\Big(f_{r_j}\Big)^{(m+i)}(\varphi(z))\Big||I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}_{V_{i,2}}$$

بنابر لم‌های ۲.۲ و ۳.۲، برای هر $0\leq i\leq n$ داریم

$$\begin{aligned}V_{i,1} &\leq \sup_{|\varphi(z)|>r_N}\mu(z)\frac{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}|f^{(m+i)}(\varphi(z)|}{|\varphi(z)|^i}\frac{|\varphi(z)|^i|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}}\\ &\preceq \|f\|_{\mathcal{B}_1}\sup_{|\varphi(z)|>r_N}\|D^m_{\varphi,u}g_{i,\varphi(z)}\|_{W^n_\mu}\\ &\preceq \sum_{j=1}^{n+1}|c^i_j|\sup_{|a|>r_N}\|D^m_{\varphi,u}f_{j,a}\|_{W^n_\mu}.\end{aligned}$$

با توجه به رابطه بالا

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty}V_{i,1} &\preceq \sum_{j=1}^{n+1}\limsup_{|a|\to1}\|D^m_{\varphi,u}f_{j,a}\|_{W^u_\mu}\\ &\preceq \max\{E_i\}_{i=1}^{n+1},\end{aligned}$$

$$\limsup_{j\to\infty} V_{i,1} \le \limsup_{|\varphi(z)|\to 1}(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}|f^{(m+i)}(\varphi(z))|\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}}$$
$$\preceq \|f\|_{\mathcal{B}_1}\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}} = F_i.$$

بنابراین

$$\limsup_{j\to\infty} V_{i,1} \preceq \max\{F_i\}_{i=0}^{n},$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود

$$\limsup_{j\to\infty} V_{i,2} \preceq \max\{E_i\}_{i=1}^{n+1},$$
$$\limsup_{j\to\infty} V_{i,2} \preceq \max\{F_i\}_{i=0}^{n}.$$

با توجه به روابط بالا و تعریف نرم اساسی داریم

$$\limsup_{j\to\infty}\|D^m_{\varphi,u}(I-K_{r_j})\|_{\mathcal{B}_1\to W^n_\mu} = \limsup_{j\to\infty}\sup_{\|f\|_{\mathcal{B}_1}\le 1}\|D^m_{\varphi,u}(I-K_{r_j})f\|_{W^n_\mu}$$
$$\preceq \min\{\max\{E_i\}_{i=1}^{n+1}, \max\{F_i\}_{i=0}^{n}\}.$$

□

قضیه ۳.۳، تخمین‌هایی برای نرم اساسی عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ ارائه می دهد، لذا به‌عنوان یک نتیجه شرایط معادلی را برای فشردگی عملگر مذکور ارائه خواهیم داد.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند، $u\in H(\mathbb{D})$ و $\varphi\in S(\mathbb{D})$. همچنین فرض کنید عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ کراندار باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:
الف) عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ فشرده است.
ب) اگر $f_{i,a}(z)\left(\frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}z}\right)^i$، آنگاه برای هر $1\le i\le n+1$ داریم

$$\limsup_{|a|\to 1}\|D^m_{\varphi,u}f_{i,a}\|_{W^n_\mu} = 0.$$

ج) به‌ازای هر $0\le i\le n$ داریم

$$\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu(z)|I^{n,u}_{i,\varphi}(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{m+i}} = 0. \qquad (۳.۳)$$

با توجه به قضیه ۳.۳ و استفاده از قضیه ۳.۱ [۳]، نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند، $u\in H(\mathbb{D})$ و $\varphi\in S(\mathbb{D})$. همچنین فرض کنید عملگر $D^m_{\varphi,u}:\mathcal{B}_1\to W^n_\mu$ کراندار باشد. دراین‌صورت

$$\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_1\to W^n_\mu}\approx\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}\to W^n_\mu}\approx\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_0\to W^n_\mu}\approx\|D^m_{\varphi,u}\|_{e,H^\infty\to W^n_\mu}.$$

حال با استفاده از نتیجه بالا، نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

نتیجه ۶.۳. هرگاه m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند، $u \in H(\mathbb{D})$ و $\varphi \in S(\mathbb{D})$. همچنین فرض کنید عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_1 \to W^n_\mu$ کراندار باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:
الف) عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_1 \to W^n_\mu$ فشرده است.
ب) عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B} \to W^n_\mu$ فشرده است.
ج) عملگر $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_0 \to W^n_\mu$ فشرده است.
د) عملگر $D^m_{\varphi,u} : H^\infty \to W^n_\mu$ فشرده است.

تذکر: با انتخاب $n = 1, 2$ و $\mu(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ قضایا و نتایج به‌دست آمده در این مقاله در حالت خاص، برای عملگرهای $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}^\alpha$ و $D^m_{\varphi,u} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{Z}^\alpha$ حاصل خواهند شد.

فهرست منابع

[۱] عباسی، ابراهیم، نصراصفهانی، سپیده و خلیل پور، کمال. ۱۴۰۰. عملگر استویچ شارما از فضاي بسوف به فضاي زیگموند. مجله مدلسازي پیشرفته ریاضي، ۳(۱۱)، صص. ۵۷۳-۵۸۴.
DOI: ۱۹۳۰.۳۷۳۶۹.۲۰۲۱.JAMM/۲۲۰۵۵.۱۰

[2] Abbasi, E. Vaezi, H. and Li, S., 2019. Essential norm of weighted composition operators from H^∞ to nth weighted type spaces. *Mediterr. J. Math.*, 16, pp. 133. doi.org/10.1007/s00009-019-1409-8

[3] Abbasi, E. and Vaezi, H., 2020. Estimates of essential norm of generalized weighted composition operators from Bloch type spaces to nth weighted type spaces. *Math. Slovaca*, 70(1), pp. 71-80. doi.org/10.1515/ms-2017-0332

[4] Arazy, J. Fisher, S. and Peetre, J., 1986. Möbius invariant function spaces. *J. Reine angew. Math.*, 363, pp. 110-145. doi.org/10.1515/crll.1985.363.110

[5] Comter, L., 1974. Advanced Combinatiories. D. Reidel, Dordrecht.

[6] Hassanlou, M. Abbasi, E. Kanani Arpatapeh, M. and Nasresfahani, S., 2023. Product type operators between Minimal Möbius invariant spaces and Zygmund type spaces. *Sahand Commun. Math. Anal.*, 20(3), pp. 69-80. doi.org/10.22130/scma.2023.560164.1163

[7] Rubel, L., 1979. An extremal property of the Bloch space. *Proc. Am. Math. Soc.*, 75(1), pp. 45-49. doi.org/10.2307/2042668

[8] Stevic, S., 2010. Weighted differentiation composition operators from H^∞ and Bloch spaces to nth weighted-type spaces on the unit disk. *J. Appl. Math. Comput.*, 216 (12), pp. 3634-3641. doi.org/10.1016/j.amc.2010.05.014

[9] Tjani, M., 2003. Compact composition operators on Besov spaces. *Trans. Amer. Math Soc.*, 355, pp. 4683-4698. S 0002-9947-(03)03354-3

[10] Tjani, M., 1996. Compact composition operators on some Möbius invariant Banach space. Ph. D. thesis, Michigan State university, Michigan.

[11] Zhu, K., 2007. Operator Theory in Function Spaces. second ed., Mathematical surveys and Monographs, 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[12] Zhu, K., 1993. Bloch type space of analytic functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 23(3), pp. 1143-1177. doi: 1216/rmjm/1181072549

[13] Zhu, X., 2007. Products of differentiation, composition and multiplication from Bergman type spaces to Bers type spaces. *Integ. Trans. Spec. Funct.*, 18(3), pp. 223-231. doi.org/10.1080/10652460701210250

[14] Zhu, X. Abbasi, E. and Ebrahimi, A., 2021. A class of operator-related composition operators from the Besov spaces into the Bloch space. *Bulletin of the iranian mathematical society*, 47, 171–184. doi.org/10.1007/s41980-020-00374-w

[15] Zhu, X., (2020). Weighted composition operators from the minimal Möbius invariant space into nth weighted-type spaces, *Ann. Func. Anal.*, 2, 379–390. doi.org/10.1007/s43034-019-00010-7

Generalized weighted composition operators from minimal Möbius invariant spaces into nth weighted spaces

Daryoush Molaei[(1)], Sepideh Nasresfahani[(2)], Kamal Khalilpour [(3)] and Ali Ebrahimi[(3)] [2]

[(1)] Department of Mathematics, Urmia Branch, Islamic Azad University, Urmia, Iran.
[(2)] Department of Mathematics, University of Isfahan, Isfahan , Iran.
[(3)]Department of Mathematics, Mahabad Branch, Islamic Azad University, Mahabad, Iran.

Communicated by: Amir Hoseyn Sanatpour

Received: 7 January 2024 Accepted: 8 September 2024

Abstract: In this paper, we first study the boundedness of generalized weighted composition operators from minimal Möbius invariant subspace to the nth weighted type space. Then, we obtain equivalence conditions for its boundedness by using the Bell polynomials. We also find some estimates for the essential norm of this operator and use them to present equivalence conditions for the compactness of such an operator.

Keywords: Essential norm, Minimal Möbius invariant subspace, nth weighted type space, Bloch type space, Zygmund type space

[2]Corresponding author.
(D. Molaei) Daryoush.Molaei@iau.ac.ir, (S. Nasresfahani) sepide.nasr@gmail.com
(K. Khalilpour) kamal.khalilpour@iau.ac.ir, (A. Ebrahimi) ebrahimi.ali2719@gmail.com