مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۷۱-۸۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.45081.2211

# برآورد آستانه بیزی موجکی ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر تحت تابع زیان تعادل

زیبا بتوندی (۱)، محمود افشاری (۱) [۱] و حمید کرمی کبیر (۱)

(۱) گروه آمار، دانشکده مهندسی سیستمهای هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر، ایران

دبیر مسئول: حمزه ترابی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۶

چکیده: فرض کنید $\mathbf{X}$ یک ماتریس تصادفی $p \times m$ با توزیع نرمال ماتریس‌متغیر با ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi}$ باشد، که در آن $\boldsymbol{\Sigma}$ و $\boldsymbol{\Psi}$ ماتریس‌های کوواریانس معین مثبت معلوم هستند. در این مقاله برآورد بیزی موجکی ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ تحت تابع زیان تعادل درجه دو و بر اساس توزیع پیشین نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\circ, \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا با استفاده از برآوردگر بیز به‌عنوان برآوردگر هدف در تابع زیان تعادل و براساس روش تعیین آستانه مخاطره ناااریب اشتاین، آستانه بیزی موجکی به‌دست می‌آید. سپس با به‌کارگیری آستانه پیشنهادی، برآوردگر بیزی موجکی ماتریس میانگین حاصل می‌شود. در پایان با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی عملکرد برآوردگر معرفی شده بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی و مثال کاربردی بیانگر برتری برآوردگر بیزی موجکی نسبت به چهار برآوردگر موجکی کلاسیک است.

واژه‌های کلیدی: آستانه نرم، برآوردگر بیزی موجکی، برآورد مخاطره نااریب اشتاین، توزیع نرمال ماتریس‌متغیر، ماتریس میانگین.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

## ۱ مقدمه

بیان خصوصیات بسیاری از پدیده‌ها در دنیای واقعی متاثر از چندین متغیر یا ویژگی می‌باشد و در پردازش داده‌های مربوطه یک فرآیند مهم توصیف روابط احتمالی بین این متغیرها می‌باشد. با توجه ویژگی ذاتی این نوع داده‌ها برای نمایش آن‌ها می‌توان از بردارها یا ماتریس‌های تصادفی کمک گرفت، به عبارتی می‌توان گفت این داده‌ها از الگوهای چندمتغیره یا ماتریس‌متغیر پیروی می‌کنند. ماتریس تصادفی ماتریسی است که در آن برخی یا همه عناصر متغیرهای تصادفی هستند. برآورد پارامتر توزیع‌های ماتریس‌متغیر به دلیل لزوم درک روابط تعداد زیادی

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Z.Batvandi) zibavandi@mehr.pgu.ac.ir, (M.Afshari) afshar@pgu.ac.ir
(H.Karamikabir) h_karamikabir@pgu.ac.ir

متغیر که تحلیل‌ها را به‌طور ذاتی مشکل می‌سازد و همچنین پیچیدگی محاسبات ماتریسی و نیاز به اطلاعات جبرخطی کمتر مورد توجه و بررسی قرار گرفته است لذا برآورد پارامترهای این نوع توزیع‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای است. توزیع نرمال پرکاربردترین توزیع‌های آماری است چرا که بسیاری از داده‌های واقعی یا توزیع نرمال دارند یا می‌توانند بر اساس قضیه حد مرکزی نرمال فرض شوند. توزیع نرمال ماتریس‌متغیر تعمیمی از توزیع نرمال چندمتغیره می‌باشد که مانند توزیع نرمال چندمتغیره بعلت قابلیت‌های محاسباتی و اینکه بسیاری از مشاهدات به طور مجانبی دارای توزیع نرمال هستند مورد توجه است.

تبدیل نوعی نگاشت است که فضای ورودی که معمولاً یک فضای تابعی یا یک سیگنال است را به یک فضای خروجی (مثلا فرکانس) انتقال می‌دهد. علت استفاده از تبدیلات ایجاد فضای جدید جهت حل آسان‌تر یک مسئله می‌باشد. در قرن ۱۹ میلادی فوریه ریاضیدان فرانسوی نشان داد که هر تابع تناوبی می‌تواند به صورت مجموع توابع نمایی مختلط (توابع سینوس،کسینوس) نمایش داده شود. یک ضعف تبدیل فوریه این است که حوزه‌ی عملکرد آن موضعی نیست و پس از انجام تبدیل اطلاعات زمان از بین می‌رود به‌عبارتی وضوح زمانی آن صفر است. از طرفی تبدیل فوریه بر روی سیگنال‌های غیر ایستا مانند سیگنال‌های صوتی عملکرد خوبی ندارد. همچنین در توابعی (یا سیگنال) که در برخی زمان‌ها تغییرات ناگهانی و شدید دارند تبدیل فوریه این بخش از تابع را به‌خوبی نمایش نمی‌دهد زیرا باید تعداد بسیار زیادی از توابع پایه سینوسی مورد استفاده قرار گیرد تا تبدیل فوریه بتواند آن را نمایش دهد. برای برطرف کردن ضعف‌های تبدیل فوریه محققین تبدیلات موجک را معرفی و ارائه کردند. موجک‌ها برای تحلیل پدیده‌های گذرا که در بسیاری از نقاط دامنه خود صفر هستند یا برای تحلیل توابعی که در بعضی از زمان‌ها تغییرات سریع دارند به‌کار می‌روند. همچنین موجک‌ها در نقاطی که مشتق تابع وجود ندارد یا تابع ناپیوسته است نسبت به فوریه عملکرد بهتر و سرعت همگرایی بالاتری دارند. موجک‌ها امکان تحلیل توابع غیرپایا را نیز فراهم می‌کنند.

توجه جوامع آماری زمانی به موجک‌ها جلب شد که مالات [۲۳] رابطه بین موجک‌ها و پردازش سیگنال را نشان داد. اولین بار موجک‌ها را داناهو و جانستون [۶] در تحقیقات آماری به‌کار بردند. داناهو و جانستون [۶] نشان دادند آستانه‌های موجکی خواص بهینه آماری مطلوبی دارند. مطالعه نظری موجک‌ها و کاربردشان در آمار به‌عنوان یک روش برای برآوردگرهای ناپارامتری تابع توسط میر [۲۴] و کرکیاچاریان [۲۱] مورد بررسی قرارگرفته است. هال و پاتیل [۱۳] برآوردگرهای موجکی توابع چگالی و تابع بقا را معرفی کردند. آنتونیادیس و همکاران [۲] برآوردگر موجکی تابع چگالی و تابع خطر را برای داده‌های سانسور شده راست بررسی کردند. افشاری [۱]، دوستی و همکاران [۸] و چائوبی و همکاران [۳] مطالعاتی در رابطه با برآوردگر تابع چگالی و مشتق تابع چگالی و تابع رگرسیون تصادفی برای متغیرهای تصادفی آمیخته انجام داده و نرخ همگرایی برآوردگرها و همچنین توزیع مجانبی ضرایب موجکی را ارائه کردند. کرمی‌کبیر و همکاران [۱۶] آستانه موجکی برآوردگرهای مخاطره نااریب اشتاین برای بردار میانگین محدود شده توزیع نرمال چندمتغیره با ماتریس کوواریانس مجهول را بر اساس تابع زیان تعادل وزنی درجه دو مورد مطالعه قرار دادند. در زمینه برآورد پارامتر مکان توسط روش‌های موجک می‌توان به کرمی‌کبیر و افشاری [۱۸] و [۲۰] مراجعه کرد. برای اطلاع از جزئیات بیشتر در رابطه با کاربرد موجک‌ها در آمار به ویداکوییک [۲۹] مراجعه نمائید.

اتصال مدل‌سازیهای بیزی و موجک‌ها زمینه‌های هیجان انگیز جدیدی را برای تحقیقات این دو حوزه با پتانسیل قابل توجه در حوزه مسائل کاربردی ایجاد کرد. هوآنگ [۱۴] به بررسی موجک انقباضی در توزیع نرمال چندمتغیره تحت تابع زیان نمایی خطی جهت یافتن نوع خاصی از برآوردگر نرم موجکی پارامتر مکان با استفاده از برآوردگر بیز تعمیم‌یافته پرداخت که این برآوردگر دارای خواص بهینه مجاز و مینیماکس نیز بود. تورەزاده و آرشی [۲۷] مقاله هوآنگ را برای توزیع نرمال چندمتغیره آمیخته مقیاس تعمیم دادند. کرمی‌کبیر و افشاری [۱۵] برآوردگر بیز تعمیم‌یافته انقباضی موجکی پارامترهای خانواده توزیع بیضوی را تحت تابع زیان خطی نمایی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین کرمی‌کبیر و افشاری [۱۷] برآورد بردار پارامتر مکان را با رویکرد بیزی موجکی در خانواده توزیع‌های کروی بر اساس تابع زیان تعادل مورد مطالعه و تحقیق قرار دادند و توانستند یک برآوردگر مجاز و مینیماکس برای پارامتر مکان ارائه دهند.

موجک انقباضی یک روش ناپارامتری برای به‌دست آوردن یک برآورد غیرخطی از یک تابع معین است. داناهو و جانستون [۵] این استراتژی را ارائه کردند به‌طوری‌که می‌توان نوفه [2] را تا حد زیادی سرکوب کرد و در عین حال اطلاعات منحصر به فرد داده‌های اصلی را به‌خوبی حفظ کرد. این روش به انتخاب آستانه و تابع آستانه بستگی دارد. آستانه مقداری است که بر اساس آن ضرایب موجکی به دو دسته ضرایب کم‌اهمیت و پراهمیت تقسیم می‌شوند، به این‌صورت که اگر ضریب موجکی بیشتر از مقدار آستانه باشد متعلق به دسته ضرایب پراهمیت و در غیر این صورت جزو دسته ضرایب کم‌اهمیت خواهد بود. بیشتر اطلاعات موجود در سیگنال در ضرایب پراهمیت قرار می‌گیرند درحالی‌که ضرایب کم‌اهمیت اطلاعات کمی از سیگنال را به همراه نوفه در بر دارند. روش‌های متفاوتی برای تعیین مقدار آستانه ارائه شده است که ازجمله آن‌ها می‌توان به روش‌های آستانه جهانی، آستانه اعتبار سنجی متقابل و آستانه برآوردگر مخاطره نااریب اشتاین اشاره کرد. برای دستیابی به برآورد بهتر توابع، توابع آستانه مختلفی از قبیل تابع آستانه نرم و سخت ارائه شده‌اند. تابع آستانه نرم توسط داناهو و جانستون [۶] ارائه شده است. این تابع ضرایب کم‌اهمیت را صفر و ضرایب پراهمیت را به‌اندازه مقدار آستانه می‌کاهد. تابع آستانه نرم با آستانه $\lambda$ به‌صورت زیر است:

$$Soft(x,\lambda) = sgn(x)max(0,|x|-\lambda).$$

که منظور از $sgn$ تابع علامت می‌باشد.

لازم به ذکر است برای یک دامنه وسیعی از توابع زیان و برای کلاسی از توابع کلی؛ برآورد موجک انقباضی دارای ریسکی نزدیک به ریسک مینیماکس است [۷]. مدل داده‌های نوفه‌دار $\mathbf{X} = \mathbf{\Theta} + \epsilon$ را درنظر بگیرید که در آن مقدار واقعی پارامتر $\mathbf{\Theta}$ شامل نوفه $\epsilon$ باشد.

[2] Noise

با بکارگیری موجک انقباضی سعی در حذف نوفه از $\mathbf{X}$ جهت دستیابی به $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ بعنوان برآوردگر پارامتر $\boldsymbol{\Theta}$ می‌گردد. مراحل موجک انقباضی نرم به اختصار به‌صورت زیر است.

۱. فرض کنید $x_i$ها، داده‌های آلوده به نوفه باشند. با فرض این‌که ماتریس تبدیل موجکی گسسته $\boldsymbol{W}$ و تابع مشاهدات به‌صورت $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\epsilon}$ باشد، ضرایب موجکی از تبدیل موجکی $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{W}\mathbf{X} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\epsilon}$ به‌دست می‌آیند.

۲. با استفاده از مقدار آستانه، ضرایب پراهمیت و ضرایب کم‌اهمیت تعیین می‌شوند. سپس براساس تابع آستانه نرم ضرایب اصلاح می‌شوند.

۳. از ضرایب موجکی اصلاح شده حاصل از مرحله قبل تبدیل موجک معکوس گرفته می‌شود. داده‌های حاصل، بهسازی شده‌اند.

برآوردگری که با استفاده از روش موجک انقباضی پارامتر را برآورد می‌کند، برآوردگر موجکی انقباضی نامیده می‌شود. در صورتی که این برآوردگر از تابع آستانه نرم با آستانه دلخواه $\lambda > ۰$ استفاده کند، به آن برآوردگر موجکی انقباضی نرم [۳] گویند. اگر $\mathbf{X}$ یک ماتریس تصادفی $p \times m$ باشد و $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \delta_{۱۱}(x) & \delta_{۱۲}(x) & \cdots & \delta_{۱m}(x) \\ \delta_{۲۱}(x) & \delta_{۲۲}(x) & \cdots & \delta_{۲m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{p۱}(x) & \delta_{p۲}(x) & \cdots & \delta_{pm}(x) \end{bmatrix}$ برآوردگر ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_{۱۱} & \theta_{۱۲} & \cdots & \theta_{۱m} \\ \theta_{۲۱} & \theta_{۲۲} & \cdots & \theta_{۲m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{p۱} & \theta_{p۲} & \cdots & \theta_{pm} \end{bmatrix}$ باشد، برآوردگر موجکی انقباضی نرم $\theta_{ij}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\delta_{ij}^{Soft}(x) = (x_{ij} - sgn(x_{ij})\lambda)I(|x_{ij}| > \lambda), \quad \lambda \geq ۰ \quad i = ۱\cdots p \;\; j = ۱\cdots m. \tag{۱.۱}$$

بنابراین برآوردگر موجکی انقباضی نرم ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ را می‌توان به‌شرح زیر نوشت.

$$\boldsymbol{\delta}^{soft}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X}),$$

که در آن

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = [g(X_{ij})], \quad i = ۱, \ldots, p \;\; j = ۱, \ldots, m, \tag{۲.۱}$$

و

$$g(X_{ij}) = -\lambda sgn(X_{ij})I(X_{ij} > \lambda) - X_{ij}I(|X_{ij}| \leq \lambda). \tag{۳.۱}$$

**لم ۱.۱.** اشتاین نشان داد اگر متغیر $X$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آن‌گاه به ازای تمام توابع پیوسته $g : R \rightarrow R$ به‌طوری‌که $E|g'| < \infty$، رابطه زیر برقرار است.

$$E[g'(X)] = E[Xg(X)]. \tag{۴.۱}$$

که در آن $g'(X)$ مشتق تابع $g(X)$ است. اگر $X$ دارای توزیع نرمال $X \sim N_p(\theta, \sigma^۲ I_p)$ و $g : R^p \rightarrow R^p$ باشد، به‌طوری‌که $\sigma^۲$ معلوم است، آن‌گاه لم ۱.۱ به‌صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

$$E\left[(X-\theta)^T g(X)\right] = \sigma^۲ E[\nabla \cdot g(X)].$$

که در آن $\nabla \cdot g(X)$ معرف عملگر واگرایی [۴] نسبت به متغیر $X$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla \cdot g(X) = \sum_{i=۱}^{p} \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(X).$$

[3] Soft shrinkage wavelet estimator
[4] Divergence

داناهو و جانستون [۶] تکنیک تعیین آستانه مخاطره ناریب اشتاین را با به‌حداقل رساندن برآوردگر مخاطره ناریب اشتاین معرفی کردند. فرض کنید $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^T$ و $X_i \sim N(\theta_i, 1), i = 1, \ldots, p$ و بردار $\delta(X)$ برآوردگر بردار میانگین $\theta$ باشد. اگر تابع $g(X) = (g(X_1), g(X_2), \ldots, (X_p))$ در برآوردگر انقباضی $\delta(X) = X + g(X)$ مشتق‌پذیر ضعیف باشد [۲۶]، آن‌گاه به ازای $\sigma^2 = 1$ در تابع زیان درجه دوم، با استفاده از تعمیم لم ۱.۱ مخاطره زیر را داریم.

$$R(\theta, \delta(X)) = E_\theta\left(\|\delta(X) - \theta\|^2\right) = p + E_\theta\left(\|g(X)\|^2\right) + E_\theta\left(2\nabla \cdot g(X)\right). \tag{۵.۱}$$

حال فرض کنید تابع $g(X) = (g(X_1), g(X_2), \ldots, g(X_p))$، که $g(X_i)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g(X_i) = \begin{cases} \lambda & X_i < -\lambda, \\ -X_i & |X_i| \leq \lambda, \\ -\lambda & X_i > \lambda. \end{cases}$$

باشد، در این حالت برآوردگر موجکی انقباضی نرم به شکل $X + g(X)$ است. به‌دلیل این‌که $\delta(X)$ مشتق‌پذیر ضعیف است با استفاده از تعمیم لم ۱.۱ برای مخاطره‌ی (۵.۱) عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$SURE(X, \lambda) = p - 2\sum_{i=1}^{p} I(|X_i| \leq \lambda) + \sum_{i=1}^{p}(|X_i| \wedge \lambda)^2, \tag{۶.۱}$$

که در آن $|X_i| \wedge \lambda = min(|X_i|, \lambda)$ است و یک برآورد ناریب برای مخاطره :

$$R(\theta, \delta(X)) = E_\theta\left(\|\delta^{soft}(X) - \theta\|^2\right) = E_\theta\left[SURE\left(X, \lambda\right)\right]. \tag{۷.۱}$$

برای به‌دست آوردن یک آستانه جدید، می‌توان از برآوردگر ناریب مخاطره $SURE(X, \lambda)$ در (۶.۱) به‌صورت زیر استفاده کرد.

$$\lambda^{sure} = \arg\min_{0 \leq \lambda \leq \lambda^U} SURE\left(X, \lambda\right),$$

به‌طوری‌که اگر $\mathscr{X}$ و $\mathscr{Y}$ دو مجموعه دلخواه باشند و تابع دلخواه $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ تعریف شده باشد. در این صورت مقدار $\arg\min$ تابع $f(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\arg\min_{x \in \mathscr{X}} f(x) = \{x | \forall y \in \mathscr{X} : \ f(y) \geq f(x)\}.$$

جهت برآورد بهینه پارامترهای مجهول روش‌های مختلفی از قبیل حداکثر درستنمایی، رویکردهای بیزی، موجک انقباضی و غیره ارائه شده است. تکنیک برآورد بیز یک روش مبتنی بر تابع زیان است. یکی از انواع توابع زیان، تابع زیان تعادل است. این تابع زیان به‌طور همزمان دو معیار نیکویی برازش $(\delta(X) - \delta_0(X))$ و خطای برآورد $(\delta(X) - \theta)$ را درنظر می‌گیرد. در این مقاله از تابع زیان تعادل درجه دو جهت برآورد ماتریس مکان $\boldsymbol{\Theta}$ استفاده شده است.

$$L_{QB}(\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\Theta}) = \omega\, tr(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0)^T(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0) + (1 - \omega)\, tr(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\Theta})^T(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\Theta}), \tag{۸.۱}$$

به‌طوری‌که $0 \leq \omega < 1$.

برآورد ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس‌متغیر در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران بوده است. زین‌الدینی و همکاران [۳۱] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر را براساس دو تابع زیان متعادل و کلاسیک مختلف مورد مطالعه قرار دادند. تابع زیان اول یک تابع زیان تعادلی بود که بسط یافته تابع زیان بکار گرفته شده توسط اصغرزاده و فارسی پور است. زین‌الدینی و همکاران این تابع زیان را درحالت ماتریسی جهت برآورد مینیماکس ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر مورد استفاده قرار دادند. این تابع زیان را می‌توان همچنین بسطی از تابع زیان تعادل زلنر درنظر گرفت. آن‌ها براساس این تابع زیان کلاسی از برآوردگرهای بیز تجربی ارائه کردند که بر برآوردگر حداکثر احتمال غلبه می‌کنند. همچنین آن‌ها کلاسی از برآوردگرهای مینیماکس با استفاده تکنیک اشتاین به‌دست آوردند. زین‌الدینی و همکاران براساس تابع زیان درجه‌دوم نیز کلاسی از برآوردگرهای مینیماکس ماتریس میانگین که بر برآوردگر حداکثر احتمال برتری دارد را معرفی کردند. زین الدینی و همکاران [۳۰] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر تحت تابع زیان تعادل با واریانس مجهول را ارائه دادند. آن‌ها بسط چندمتغیره تابع زیان مطرح شده توسط چانگ و چانسو [۴] را در این تحقیق مورد استفاده قرار دادند و دامنه‌ای از برآوردگرهای بهینه بیز تعمیم‌یافته مینیماکس را برای ماتریس میانگین معرفی کردند. تسوکوما [۲۸] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر با کواریانس

مجهول تحت تابع زیان درجه دو پایا را مورد مطالعه و تحقیق قرار داد. بر اساس روش بیز تعمیم‌یافته سلسله مراتبی برآوردگر بیز تعمیم‌یافته ماتریس میانگین معرفی شد که یک برآوردگر پایا انقباضی است و تحت شرایطی نشان داد که این برآوردگر مینیماکس است. کونو [۲۲] دو کلاس از برآوردگرهای مینیماکس ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\Psi})$ را تحت تابع زیان درجه دو ارائه کرد. نماد $\otimes$ بیانگر ضرب کرونکر می‌باشد. او ماتریس کواریانس توزیع را مجهول درنظر گرفت. کرمی‌کبیر و همکاران [۱۹] برآورد موجکی انقباضی آستانه نرم ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر را در حالت محدود شده و ابعاد بالا را مورد بررسی و تحقیق قرار دادند. در زمینه دستیابی به برآوردگر بهینه ماتریس پارامتر مکان توزیع نرمال ماتریس‌متغیر برآوردگرهای مختلفی توسط محققین معرفی گردید که می‌توان به قوش و شیه [۱۰] مراجعه کرد.

ما مسئله برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر با بکارگیری تکنیک موجک انقباضی و برآوردگر بیز را مورد بررسی قرار دادیم که تعمیمی از نتایج داناهو و جانستون [۶] است. آنها برآورد موجک انقباضی بردار میانگین توزیع نرمال چندمتغیره تحت تابع زیان درجه دو را بررسی کردند. ما در این تحقیق برآورد بیزی موجکی انقباضی ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر تحت تابع زیان تعادل درجه دو بررسی می‌کنیم. همچنین جهت دستیابی به برآوردگر بیزی موجکی انقباضی ماتریس میانگین، در این تحقیق برآوردگر بیز بعنوان تابع هدف تابع زیان تعادل برای تعیین مقدار آستانه موجک انقباضی مورد استفاده قرار دادیم. ابتدا برآوردگر بیز ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ تحت توزیع پیشین نرمال ماتریس متغیر $\boldsymbol{\Theta} \sim N_{p,m}(\circ, \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از برآوردگر بیز و روش تعیین آستانه مخاطره ناااریب اشتاین یک مقدار آستانه بیزی موجکی انقباضی را معرفی می‌کنیم و براوردگر بیزی موجکی انقباضی ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس‌متغیر را ارائه می‌دهیم.

ساختار مقاله به‌شرح زیر است. در بخش ۱ به مقدمه و پیشینه تحقیق پرداختیم. در بخش ۲ برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})$ ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ را تحت توزیع پیشین $N_{p,m}(\circ, \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ ارائه می‌دهیم. با درنظر گرفتن برآوردگر بیز بعنوان تابع هدف در تابع زیان تعادل درجه دو به صورت $\boldsymbol{\delta}_\circ = \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})$ و براساس روش تعیین آستانه مخاطره ناااریب اشتاین آستانه بیزی موجکی انقباضی معرفی می‌گردد. مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو و مثال‌های کاربردی جهت ارزیابی عملکرد آستانه بیزی موجکی انقباضی در بخش‌های ۳ و ۴ ارائه می‌شوند. بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازد.

## ۲ برآورد آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید $\mathbf{X}$ یک ماتریس $p \times m$ به صورت $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{۱۱} & X_{۱۲} & \cdots & X_{۱m} \\ X_{۲۱} & X_{۲۲} & \cdots & X_{۲m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p۱} & X_{p۲} & \cdots & X_{pm} \end{bmatrix}$ باشد. ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر با ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi}$ است. که در آن $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ و $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ماتریس‌های معین مثبت هستند اگر تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر باشد:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (۲\pi)^{\frac{-۱}{۲}mp} det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{-۱}{۲}m} det(\boldsymbol{\Psi})^{\frac{-۱}{۲}p} exp\left( tr\left\{ \frac{-۱}{۲} \boldsymbol{\Sigma}^{-۱}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{\Psi}^{-۱}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\Theta})^T \right\} \right),$$

که در آن $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p\times m}, \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{p\times m}$. این توزیع به‌صورت $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ نمایش داده می‌شود.

برای تعیین برآوردگر بیز ماتریس میانگین $\boldsymbol{\Theta}$ تحت تابع زیان تعادل درجه دو براساس توزیع پیشین ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\circ, \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ ابتدا توزیع پسین را در لم ۲.۲ تعیین می‌کنیم. سپس در قضیه ۳.۲ برآوردگر بیز ماتریس مکان $\boldsymbol{\Theta}$ معرفی می‌گردد.

**لم ۲.۲.** فرض کنید ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ است. اگر توزیع پیشین نیز یک توزیع نرمال ماتریس‌متغیر به‌صورت

$$\boldsymbol{\Theta} \sim N_{p,m}(\circ, \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Psi}),$$

باشد آنگاه توزیع پسین عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{X} \sim N_{p,m}((\mathbf{I}_p - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\Lambda})^{-۱})\mathbf{X}, (\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}+\boldsymbol{\Lambda}^{-۱})^{-۱} \otimes \boldsymbol{\Psi}).$$

اثبات. برای تعیین توزیع پسین از رابطه زیر کمک گرفته می‌شود.

$$\pi(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{X}) \quad \propto \quad f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\Theta})\pi(\boldsymbol{\Theta})$$

$$\begin{aligned}
&\propto \;\; exp\Big[tr(\frac{-1}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})^T-\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{X}-0)\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{X}-0)^T)\Big]\\
&\propto \;\; exp\Big[tr(\frac{-1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Theta}^T\\
&\quad +\frac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{X}\\
&\quad +\frac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Theta}^T)\Big]\\
&\propto \;\; exp\Big[tr(\frac{-1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Theta}^T\\
&\quad +\frac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})(I_p-(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1})\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{X}\\
&\quad +\frac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})(I_p-(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Theta}^T)\Big],
\end{aligned}$$

براساس رابطه وودبری ۳.۵ در پیوست می‌توان نوشت $(I_p-(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1})=\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}+\mathbf{\Lambda})$ بنابراین توزیع پسین عبارت است از

$$\mathbf{\Theta}|\mathbf{X}\sim N_{p,m}((\mathbf{I}_p-\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}+\mathbf{\Lambda})^{-1})\mathbf{X},(\mathbf{\Sigma}^{-1}+\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\otimes\mathbf{\Psi}).$$

□

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta},\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ باشد. تحت توزیع پیشین نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(0,\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbf{\Psi})$ و تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) با برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_0=\mathbf{X}$ برآوردگر بیز ماتریس مکان $\mathbf{\Theta}$ به‌صورت زیر است.

$$\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})=(\mathbf{I}_p-(1-\omega)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}+\mathbf{\Lambda})^{-1})\mathbf{X}. \tag{۱.۲}$$

اثبات. مخاطره پسین برآوردگر دلخواه $\delta(X)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
\rho\left(\pi(\mathbf{\Theta}|X),\boldsymbol{\delta}\right) &= E\Big[L(\boldsymbol{\delta},\mathbf{\Theta})|X\Big]\\
&= E\Big[\omega tr(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{X})^T(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{X})+(1-\omega)tr(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{\Theta})^T(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{\Theta})|\mathbf{X}\Big].
\end{aligned}$$

بنابراین برآوردگر بیز ماتریس مکان $\mathbf{\Theta}$ براساس تعریف ۲.۵ پیوست، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial\rho\left(\pi(\mathbf{\Theta}|\mathbf{X}),\boldsymbol{\delta}\right)}{\partial\boldsymbol{\delta}} = E\Big[2\omega\left(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{X}\right)+2(1-\omega)\left(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{\Theta}\right)|X\Big]=0,$$

براساس لم ۲.۲ برآوردگر بیز پارامتر ماتریس مکان تحت تابع زیان (۸.۱) عبارت است از:

$$\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})=\omega\mathbf{X}+(1-\omega)E(\mathbf{\Theta}|\mathbf{X})=(\mathbf{I}_p-(1-\omega)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}+\mathbf{\Lambda})^{-1})\mathbf{X}.$$

□

در قضیه‌ی بعد ریسک بیز برآوردگر $\mathbf{X}$ که برآوردگر حداکثر احتمال پارامتر ماتریس مکان $\mathbf{\Theta}$ است ارائه می‌شود. نتایج این قضیه جهت محاسبه ریسک بیز برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})$ و همچنین تعیین آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنید ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta},\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ باشد، تحت تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) با برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_0=\mathbf{X}$ مخاطره برآوردگر حداکثر احتمال $\mathbf{X}$ برابر است با:

$$R(\mathbf{X},\mathbf{\Theta})=E[L_{\mathbf{X}}(\mathbf{X},\mathbf{\Theta})]=(1-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}). \tag{۲.۲}$$

اثبات. ماتریس تصادفی $\mathbf{Y}$ را به‌صورت $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{\Theta}$ تعریف می‌کنیم. باتوجه به توزیع $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Psi})$, توزیع ماتریس تصادفی $\mathbf{Y}$ عبارت است از $\mathbf{Y} \sim N_{p,m}(\circ, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Psi})$ . لذا مخاطره‌ی برآوردگر حداکثر احتمال $\mathbf{X}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}) &= E[L(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})] = E[(۱ - \omega)tr((\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})^T(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})] \\ &= E[(۱ - \omega)tr(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})^T(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})] = E[(۱ - \omega)tr(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})]. \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{Y} = [Y_{ij}]$ لذا $(i,j)$ امین درایه ماتریس $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ عبارت است از

$$\sum_{k=۱}^{p} Y_{ki}Y_{kj},$$

بنابراین اثر ماتریس $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ عبارت است از

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p} Y_{ki}Y_{ki},$$

و درنتیجه مخاطره برآوردگر حداکثر احتمال $\mathbf{X}$ براساس تعریف ۴.۵ در پیوست برابر است با:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}) &= E[(۱ - \omega)tr(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})] \\ &= E((۱ - \omega)\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p} Y_{ki}Y_{ki}) = (۱ - \omega)\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p} E(Y_{ki}Y_{ki}) \\ &= (۱ - \omega)\sum_{i=۱}^{m} \Psi_{ii}\sum_{k=۱}^{p} \sigma_{kk} = (۱ - \omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}). \end{aligned}$$

□

مخاطره بیز برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta^B(X)}$ تحت تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) در قضیه بعد محاسبه می‌گردد.

**قضیه ۵.۲.** فرض کنید ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ باشد به‌طوری‌که $\mathbf{\Sigma}$ و $\mathbf{\Psi}$ ماتریس‌های معین مثبت معلوم هستند. تحت فرض توزیع پیشین نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\circ, \mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{\Psi})$ ، براساس تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) با برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_\circ = \mathbf{X}$ مخاطره‌ی بیز برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta^B(X)}$ برابر است با

$$\begin{aligned} r(\pi, \boldsymbol{\delta^B(X)}) &= E_{\mathbf{\Theta}}[R(\boldsymbol{\delta^B(X)}, \mathbf{\Theta})] \\ &= E_{\mathbf{\Theta}}[tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta}) + (۱ - \omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \\ &\quad +۲(۱ - \omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T)] \\ &= tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + (۱ - \omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \\ &\quad +۲(۱ - \omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T), \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $\mathbf{A} = (۱ - \omega)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Lambda})^{-۱}$.

اثبات. برای محاسبه مخاطره‌ی برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta^B(X)}$ تحت تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\delta^B(X)}, \mathbf{\Theta}) &= E_{\mathbf{X}}[(L(\boldsymbol{\delta^B(X)}, \mathbf{\Theta})] \\ &= E[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X})] + (۱ - \omega)E[tr(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})^T(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta})] \\ &\quad +۲(۱ - \omega)E[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{X} - \mathbf{\Theta}))]. \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{X} = [x_{ij}]$ و $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ لذا $(i,j)$ امین درایه ماتریس $\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ به‌صورت زیر است.

$$\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} x_{ki}a_{lk}a_{ln}x_{nj},$$

درنتیجه اثر ماتریس $\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ عبارت است از

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} x_{ki}a_{lk}a_{ln}x_{ni}.$$

با استفاده از رابطه فوق و تعریف ۴.۵ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} E[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X})] &= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} a_{lk}a_{ln}E(x_{ki}x_{ni}) \\ &= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} a_{lk}a_{ln}\left(\sigma_{kn}\psi_{ii}+\theta_{ki}\theta_{ni}\right) \\ &= tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A})+tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta}). \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

با استفاده از همین روش برای محاسبه $E[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta}))]$ می‌توان $(i,j)$ امین درایه ماتریس $\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{X}-\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{\Theta}$ را به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\left[x_{ki}a_{lk}x_{lj}-x_{ki}a_{lk}\theta_{lj}\right],$$

درنتیجه اثر ماتریس $\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})$ برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\left[x_{ki}a_{lk}x_{li}-x_{ki}a_{lk}\theta_{li}\right],$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} E[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})] &= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p} a_{lk}E(x_{ki}x_{li}) \\ &\quad -\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p} a_{lk}\theta_{li}E(x_{ki}) \\ &= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p} a_{lk}(\sigma_{kl}\psi_{ii}+\theta_{ki}\theta_{li}) \\ &\quad -\sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p} a_{lk}\theta_{li}\theta_{ki} \\ &= tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T). \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

با استفاده از قضیه ۴.۲ و روابط (۳.۲) و (۴.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X}),\mathbf{\Theta}) &= tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A})+tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta})+(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \\ &\quad +۲(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T). \end{aligned}$$

درنتیجه مخاطره بیز برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X})$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} r(\pi,\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X})) &= E_{\mathbf{\Theta}}[R(\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X}),\mathbf{\Theta})] \\ &= E_{\mathbf{\Theta}}[tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A})+tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta})+(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+۲(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T)] \\
=\;& tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + E_{\mathbf{\Theta}}[tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta})] + (۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \\
&+۲(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T),
\end{aligned}
$$

فرض کنید $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}]$ ، امیدریاضی $tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta})$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
E_{\mathbf{\Theta}}[tr(\mathbf{\Theta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{\Theta})] &= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} a_{lk}a_{ln}E(\theta_{ki}\theta_{ni}) \\
&= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{p}\sum_{n=۱}^{p} a_{lk}a_{ln}\lambda_{kn}\psi_{ii} \\
&= tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}),
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
r(\pi, \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})) =\;& tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + (۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}) \\
&+۲(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{A}^T).
\end{aligned}
$$

□

در قضیه زیر آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم در توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ براساس روش مخاطره نااریب اشتاین بررسی و تعیین می‌گردد. برآوردگر بیز $\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})$ در (۱.۲) بعنوان برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_۰$ در تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) درنظر گرفته می‌شود.

**قضیه ۶.۲.** فرض کنید ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ است. به‌طوری‌که ماتریس‌های $\mathbf{\Sigma}$ و $\mathbf{\Psi}$ معلوم باشند. تحت تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) با برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_۰ = \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})$ ، آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم عبارت است از

$$
\lambda^{Bayes-sure} = \arg\min_{۰\le\lambda\le\lambda^u} SURE(\boldsymbol{\delta}^{soft}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})),
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
SURE(\boldsymbol{\delta}^{soft}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})) =\;& tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right) + \omega tr\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\right) + ۲\omega tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{A}\mathbf{X}\right) \\
&-۲(۱-\omega)\sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{n} I(|X_{ij}|\le\lambda) + (۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}).
\end{aligned}
$$

اثبات. با استفاده از تعریف ۱.۵ پیوست برای هر ستون از $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ در (۲.۱) و نتیجه قضیه ۴.۲، مخاطره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\delta}^{soft}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X}), \mathbf{\Theta}) &= E\left[L(\boldsymbol{\delta}^{Soft}, \boldsymbol{\delta}^B, \mathbf{\Theta})\right] \\
&= E\Big[\omega tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right) \\
&\quad +\omega tr\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\right) + ۲\omega tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{A}\mathbf{X}\right) \\
&\quad +(۱-\omega)tr\left((\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})^T(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})\right) \\
&\quad +(۱-\omega)tr\left(\mathbf{g}^T(X)\mathbf{g}(\mathbf{X})\right) + ۲(۱-\omega)tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})(\mathbf{X}-\mathbf{\Theta})\right)\Big] \\
&= E\Big[tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right) + \omega tr\left((\mathbf{X})^T\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{X})\right) + ۲\omega tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{A}\mathbf{X}\right) \\
&\quad +۲(۱-\omega)\sum_{j=۱}^{m}\nabla g(\mathbf{X_j})\Big] + (۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}),
\end{aligned}
$$

که در آن $\mathbf{X_j}$ بردار تصادفی است که به‌صورت ${\mathbf{X_j}}^T = (X_{۱j}, \cdots, X_{pj})$ تعریف می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$
SURE(\boldsymbol{\delta}^{soft}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X})) = tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right) + \omega tr\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\right) + ۲\omega tr\left(\mathbf{g}^T(\mathbf{X})\mathbf{A}\mathbf{X}\right)
$$

$$-۲(۱-\omega)\sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{n} I(|X_{ij}|\leq\lambda)+(۱-\omega)tr(\mathbf{\Psi})tr(\mathbf{\Sigma}),$$

چون $SURE(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X}))$ برآوردگر ناریب ریسک است می‌توان نوشت

$$E\left(L(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X}),\mathbf{\Theta})\right)=E\left[SURE(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X}))\right],$$

و آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم عبارت است از $\lambda^{Bayes-sure}=\arg\min_{۰\leq\lambda\leq\lambda^{u}} SURE(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X}))$. □

**نتیجه ۷.۲.** اگر ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta},\sigma^{۲}\mathbf{I_p}\otimes\tau^{۲}\mathbf{I_m})$ باشد و توزیع پیشین نرمال ماتریس‌متغیر $\mathbf{\Theta}\sim N_{p,m}(۰,\alpha^{۲}\mathbf{I_p}\otimes\tau^{۲}\mathbf{I_m})$ به‌طوری‌که $\sigma^{۲}$، $\tau^{۲}$ و $\alpha^{۲}$ مقادیر ثابت معلوم باشند. تحت تابع زیان تعادل درجه دو (۸.۱) با برآوردگر هدف $\boldsymbol{\delta}_۰=\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{x})=(\mathbf{I}_p-(۱-\omega)\frac{\sigma^{۲}}{\sigma^{۲}+\alpha^{۲}}\mathbf{I}_p)\mathbf{X}$، آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم به‌صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X}),\mathbf{\Theta}) &= E\left[L(\boldsymbol{\delta^{soft}},\boldsymbol{\delta^{B}},\mathbf{\Theta})\right]\\ &= E\Big[tr\left(\mathbf{g}^{T}(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right)+\omega(۱-\omega)^{۲}\frac{\sigma^{۴}}{(\sigma^{۲}+\alpha^{۲})^{۲}}tr\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)\\ &\quad+۲\omega(۱-\omega)\frac{\sigma^{۲}}{\sigma^{۲}+\alpha^{۲}}tr\left(\mathbf{g}^{T}(\mathbf{X})\mathbf{X}\right)\\ &\quad+۲(۱-\omega)\sum_{j=۱}^{m}\nabla g(\mathbf{X_j})\Big]+(۱-\omega)mp\tau^{۲}\sigma^{۲},\end{aligned}$$

آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\lambda^{Bayes-sure}=\arg\min_{۰\leq\lambda\leq\lambda^{u}} SURE(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X})),$$

که در آن

$$\begin{aligned}SURE(\boldsymbol{\delta^{soft}}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\delta^{B}}(\boldsymbol{X})) &= tr\left(\mathbf{g}^{T}(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X})\right)+\omega(۱-\omega)^{۲}\frac{\sigma^{۴}}{(\sigma^{۲}+\alpha^{۲})^{۲}}tr\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)\\ &\quad+۲\omega(۱-\omega)\frac{\sigma^{۲}}{\sigma^{۲}+\alpha^{۲}}tr\left(\mathbf{g}^{T}(\mathbf{X})\mathbf{X}\right)\\ &\quad-۲(۱-\omega)\sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{m} I(|X_{ij}|\leq t)+(۱-\omega)mp\tau^{۲}\sigma^{۲}.\end{aligned}$$

## ۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت آستانه‌ی بیزی موجکی انقباضی نرم مطرح شده در بخش قبل را به کمک مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و عملکرد این آستانه را با چهار آستانه موجکی کلاسیک برای برآورد پارامتر ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\mathbf{\Theta},\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi})$ مقایسه می‌کنیم. آستانه‌های موجکی مورد بررسی عبارتند از آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم به ازای مقادیر $\omega=۰/۲,۰/۵,۰/۸$، آستانه اعتبار سنجی متقابل، آستانه بیزی و آستانه‌های نرم و سخت جهانی. آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم در قضیه ۶.۲ معرفی شده است. کلیه محاسبات با نرم افزار $R-۳/۶/۱$ با استفاده از بسته‌های $MixMatrix$، $wavethresh$ و $mvtnorm$ انجام گردید. شایان ذکر است از موجک دوبیچز مرتبه ۱۰ برای انجام کلیه شبیه‌سازی‌های موجکی استفاده شد. تعداد تکرار شبیه‌سازی برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شد. ابتدا یک ماتریس تصادفی از توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(۰,۳I_p\otimes۲I_m)$ با ابعاد $p=۸,۱۶,۳۲,۶۴$ و $m=۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴$ از طریق شبیه‌سازی تولید شد. در ادامه نوفه با توزیع نرمال ماتریس‌متغیر استاندارد $N_{p,m}(۰,I_p\otimes I_m)$ به داده‌های حاصل از شبیه‌سازی افزوده شد. سپس داده‌های نوفه‌دار بابکارگیری تبدیل موجک گسسته به ضرائب موجکی تبدیل شدند و پس

جدول ۱: مقدار میانگین مربعات خطای آستانه‌های بیزی موجکی انقباضی نرم، سخت و نرم جهانی، بیز و اعتبار سنجی متقابل به ازای ابعاد مختلف $p$ و $m$ در توزیع $N_{p,m}(۰,۳I_p \otimes ۲I_m)$.

| $m$ | $p$ | بیزی موجکی انقباضی نرم $\omega = ۰٫۲$ | $\omega = ۰٫۵$ | $\omega = ۰٫۸$ | جهانی سخت | جهانی نرم | بیز | اعتبار سنجی متقابل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ۴ | ۰/۴۹ | ۰/۵۰ | ۰/۴۸ | ۲/۰۲ | ۲/۳۷ | ۲/۵۵ | ۲/۳۸ |
| | ۸ | ۱/۰۱ | ۱/۰۳ | ۰/۹۶ | ۴/۸۲ | ۶/۲۰ | ۵/۹۴ | ۴/۹۴ |
| ۸ | ۱۶ | ۰/۳۳ | ۰/۳۴ | ۰٫۳۲ | ۳/۹۷ | ۳/۷۶ | ۵/۳ | ۵/۴۶ |
| | ۳۲ | ۰/۵۹ | ۰/۶۰ | ۰/۵۶ | ۳/۸۳ | ۵/۰۷ | ۴/۶۹ | ۵/۱۵ |
| | ۶۴ | ۰/۰۷ | ۰/۰۸ | ۰/۰۶ | ۴/۲۶ | ۵/۵۸ | ۴/۹۸ | ۵/۴۵ |
| | ۴ | ۰/۲۵ | ۰/۲۵ | ۰/۲۴ | ۰/۹۲ | ۱/۵۰ | ۱/۳۱ | ۰/۸۱ |
| | ۸ | ۰/۵۰ | ۰/۵۲ | ۰/۴۸ | ۳/۹۲ | ۴/۲۴ | ۴/۱۳ | ۴/۲۲ |
| ۱۶ | ۱۶ | ۱/۰۰ | ۱/۰۲ | ۰/۹۵ | ۷/۲۹ | ۷/۷۴ | ۷/۵۳ | ۷/۹۴ |
| | ۳۲ | ۰/۹۹ | ۱/۰۱ | ۰/۹۵ | ۷/۱۰ | ۸/۰۶ | ۷/۷۷ | ۷/۸۹ |
| | ۶۴ | ۰/۹۷ | ۱/۰۵ | ۰/۹۲ | ۶/۱۹ | ۷/۴۱ | ۶/۹۶ | ۶/۴۷ |
| | ۴ | ۰/۱۲ | ۰/۱۳ | ۰/۱۱ | ۱/۰۲ | ۱/۱۷ | ۱/۱۳ | ۱/۰۴ |
| | ۸ | ۰/۲۵ | ۰/۲۶ | ۰/۲۴ | ۲/۱۵ | ۲/۲۲ | ۲/۱۶ | ۲/۱۵ |
| ۳۲ | ۱۶ | ۰/۴۹ | ۰/۵۰ | ۰/۴۷ | ۴/۱۰ | ۴/۳۵ | ۴/۲۸ | ۴/۲۹ |
| | ۳۲ | ۰/۹۷ | ۰/۹۹ | ۰/۹۶ | ۷/۵۵ | ۸/۲۹ | ۸/۰۴ | ۷/۸۱ |
| | ۶۴ | ۰/۹۹ | ۱/۰۲ | ۰/۹۳ | ۸/۰۰ | ۸/۳۷ | ۷/۷۳ | ۸/۲۰ |
| | ۴ | ۰/۰۶ | ۰/۰۶ | ۰/۰۵ | ۰/۵۶ | ۰/۵۷ | ۰/۵۷ | ۰/۵۷ |
| | ۸ | ۰/۱۲ | ۰/۱۳ | ۰/۱۱ | ۱/۰۹ | ۱/۱۵ | ۱/۱۴ | ۱/۱۳ |
| ۶۴ | ۱۶ | ۰/۲۴ | ۰/۲۵ | ۰/۲۳ | ۲/۰۴ | ۲/۲۷ | ۲/۲۵ | ۲/۲۱ |
| | ۳۲ | ۰/۴۹ | ۰/۵۲ | ۰/۴۷ | ۴/۰۶ | ۴/۳۱ | ۴/۲۰ | ۴/۲۴ |
| | ۶۴ | ۱/۰۰ | ۱/۰۱ | ۰/۹۳ | ۹/۶۸ | ۹/۰۰ | ۸/۷۳ | ۸/۸۷ |

از اصلاح ضرائب توسط روش موجک انقباضی نرم با به‌کارگیری آستانه مورد نظر، با استفاده از تبدیل موجک گسسته معکوس تخمینی از داده‌های اولیه حاصل شد. شاخص میانگین مربعات خطا نیز برای اندازه‌گیری عملکرد مدل استفاده گردید.

در جدول ۱ مقدار شاخص میانگین مربعات خطا برای توزیع نرمال ماتریس‌متغیر $N_{p,m}(۰,۳I_p \otimes ۲I_m)$ برای پنج آستانه مورد نظر ارائه شده است. با توجه به مقادیر میانگین مربعات خطا می‌توان نتیجه گرفت در تمامی ابعاد آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم عملکرد بسیار بهتری از چهار آستانه دیگر دارد. این آستانه برای مقادیر مختلف $\omega$ نیز بررسی شده که کمترین مقدار میانگین مربعات خطا برای $\omega = ۰٫۸$ بوده است بدین مفهوم که این آستانه در $\omega = ۰٫۸$ عملکرد بهتری از خود نشان داده است.

# ۴ مثال واقعی

در این قسمت یک مثال بر اساس داده‌های واقعی برای بررسی عملکرد آستانه‌ی بیزی موجکی انقباضی نرم نسبت به آستانه‌های موجکی کلاسیک ارائه می‌شود. مشابه روش شبیه‌سازی نوفه با توزیع $N_{p,m}(۰, I_p \otimes I_m)$ به مجموعه داده‌ها اضافه شد و با کمک تبدیلات موجک گسسته، سعی شد داده‌های اصلی بازسازی شوند. در نهایت مقدار شاخص میانگین مربعات خطا برای بررسی دقت آستانه‌ها محاسبه گردید.

## ۱.۰.۴ داده‌های ابررسانایی

مجموعه داده‌های ابررسانایی از حمیدیه [۱۲] شامل ۸۱ ویژگی استخراج شده از ۲۱۲۶۳ ابررسانا به همراه دمای بحرانی در ستون ۸۲ام است. برای مشاهده مجموعه داده‌ها به لینک زیر مراجعه کنید

*Superconductivty data set*

ما یک نمونه ۵۰ تایی شامل ۸ متغیر زیر را انتخاب کردیم. متغیرهای مورد استفاده عبارتند از

۱. میانگین هندسی ظرفیت $(\mathbf{X}_۱)$
۲. میانگین هندسی انحراف معیار وزنی ظرفیت $(\mathbf{X}_۲)$
۳. ظرفیت آنتروپی $(\mathbf{X}_۳)$
۴. انحراف معیار وزنی ظرفیت آنتروپی $(\mathbf{X}_۴)$
۵. انحراف معیار وزنی ظرفیت برد $(\mathbf{X}_۵)$
۶. انحراف معیار ظرفیت $(\mathbf{X}_۶)$
۷. انحراف معیار وزنی ظرفیت $(\mathbf{X}_۷)$
۸. دمای بحرانی $(\mathbf{X}_۸)$.

جدول ۲ مقدار میانگین مربعات خطا را برای آستانه‌های بیزی موجکی انقباضی نرم به ازای مقادیر مختلف $\omega$، آستانه‌های جهانی نرم و سخت، آستانه متقابل، آستانه بیزی و اعتبار سنجی متقابل نشان می‌دهد. نتایج نشان‌دهنده عملکرد بهتر آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم در مقایسه با آستانه‌های دیگر است که با نتایج شبیه‌سازی و مثال قبل همخوانی دارد. همچنین این آستانه برای $\omega$های مختلف نیز بررسی شده که مقدار میانگین مربعات خطا برای کلیه مقادیر $\omega$ یکسان است که با نتایج شبیه‌سازی همخوانی ندارد.

جدول ۲: مقدار میانگین مربعات خطای آستانه‌های بیزی موجکی انقباضی نرم، سخت و نرم جهانی، بیز و اعتبار سنجی متقابل برای مجموعه داده‌های ابررسانایی.

| بیزی موجکی انقباضی نرم $\omega=0/2$ | $\omega=0/5$ | $\omega=0/8$ | جهانی سخت | جهانی نرم | بیز | اعتبار سنجی متقابل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱/۰۲ | ۱/۰۲ | ۱/۰۲ | ۱/۱۴ | ۱/۱۵ | ۱/۱۱ | ۱/۱۳ |

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

برآورد پارامتر توزیع‌های چندمتغیره و ماتریس‌متغیر با درنظر گرفتن کاربرد وسیع آن‌ها در مسائل دنیای واقعی اهمیت ویژه‌ای دارد. محققین روش‌های مختلفی را برای برآورد پارامترها معرفی کردند. رویکرد بیزی یک ابزار کلاسیک توانمند و پرکاربرد در برآوردیابی است. موجک انقباضی نیز یک شیوه‌ی ناپارامتری نوین است که برآوردی غیرخطی از هر تابع دلخواه را ارائه می‌دهد. برای دستیابی به یک برآوردگر بهینه ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس‌متغیر در این مقاله تکنیک برآورد بیزی موجکی انقباضی مدنظر قرار گرفت. ابتدا برآوردگر بیز ماتریس مکان تحت توزیع پیشین نرمال ماتریس‌متغیر و تابع زیان تعادل درجه دو تعیین شد. در مرحله بعد با درنظر گرفتن برآوردگر بیز بعنوان تابع هدف در تابع زیان تعادل درجه دو و بکارگیری روش تعیین مقدار آستانه مخاطره نااریب اشتاین، آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم معرفی گردید. برای ارزیابی عملکرد آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم از مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال واقعی استفاده شد. شاخص میانگین مربعات خطا برای مقایسه آستانه بیزی موجکی انقباضی و چهار آستانه کلاسیک موجکی بکار برده شد. مطالعه شبیه‌سازی و مثال واقعی عملکرد بهتر آستانه بیزی موجکی انقباضی نرم را نسبت به سایر آستانه‌های موجکی نشان دادند.

## پیوست

تعدادی از تعاریف مورد نیاز مقاله در پیوست ارائه شده‌اند.

**تعریف ۱.۵.** فوردینیر و استراودرمن [۹] برای بردار تصادفی $X \in R^p$ با توزیع نرمال چندمتغیره $N_p(\theta, \Sigma)$ نشان دادند :

$$E[(X-\theta)^T\Sigma^{-1}(X-\theta)] = E[\nabla.g(X)],$$

مشروط بر اینکه امیدهای ریاضی رابطه فوق موجود باشند. همچنین $g(.)$ یک تابع مشتق پذیر ضعیف و $\nabla.g(X)$ عملگر بردار $X$ می‌باشد.

**تعریف ۲.۵.** اگر $F(\mathbf{X})$ تابع مشتق‌پذیر از عناصر ماتریس $\mathbf{X}$ باشد و $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} tr(F(\mathbf{X})) = f(\mathbf{X})^T$, به‌طوری‌که $f(\cdot)$ مشتق صحیح تابع $F(\cdot)$ باشد. بر اساس رابطه بالا مشتقات زیر به‌دست می‌آیند [۲۵].

- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} tr(\mathbf{XA}) = \mathbf{A}^T$.
- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} tr(\mathbf{X}^T\mathbf{BX}) = \mathbf{BX} + \mathbf{B}^T\mathbf{X}$.
- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} tr(\mathbf{AXB}) = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

لازم به ذکر است که $tr(X)$ بیانگر اثر ماتریس $X$ است.

تعریف **۳.۵.** فرض کنید $A$، $B$ و $C$ سه ماتریس مربعی دلخواه باشند، در این صورت برابری وودبری به صورت زیر است.

$$\left(A+CBC^T\right)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}C\left(B^{-1}+C^TA^{-1}C\right)^{-1}C^TA^{-1}.$$

همچنین اگر $P$ و $R$ دو ماتریس معین مثبت دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\left(P^{-1}+B^TR^{-1}B\right)^{-1}B^TR^{-1}=PB^T\left(BPB^T+R\right)^{-1}.$$

جهت اطلاع بیشتر به پترسون و پدرسون [۲۵] مراجعه نمایید.

تعریف **۴.۵.** گوپتا و ناگار [۱۱] نشان دادند اگر ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Psi})$ باشد و $\boldsymbol{\Theta}=[\theta_{ij}],\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{ij}],\boldsymbol{\Psi}=[\psi_{ij}]$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$E(X_{i_1j_1}X_{i_2j_2})=\sigma_{i_1i_2}\psi_{j_1j_2}+\mu_{i_1j_1}\mu_{i_2j_2}.$$

|

## فهرست منابع

[1] Afshari, M., 2017. Nonlinear wavelet shrinkage estimator of nonparametric regularity regression function via cross-validation with simulation study. *International Journal of Wavelets,Multiresolution and Information Processing, 33*(6), pp.1-16. doi: 10.1142/S0219691317500576

[2] Antoniadis, A., Gregoire, G. and Nason, G., 1999. Density and hazard rate estimation for right-censored data by using wavelet methods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 61*(1), pp.63-84. doi:10.1111/1467-9868.00163

[3] Chaubey, Y.P., Doosti, H. and Rao, B.P., 2008. Wavelet based estimation of the derivatives of a density for a negatively associated process. *Journal of Statistical Theory and Practice, 2*(3), pp.453-463. doi: 10.1080/15598608.2008.10411886

[4] Chung, Y. and Chansoo, K., 1997. Simultaneous estimation of the multivariate normal mean under balanced loss function. *Comm. Statist. Theory Methods, 26*(7), pp.1599-1611. doi: 10.1080/03610929708832003

[5] Donoho, D.L. and Johnstone, I.M., 1994. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *biometrika, 81*(3), pp.425-455. doi: 10.2307/2337118

[6] Donoho, D.L. and Johnstone, I.M., 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the american statistical association,90*(432), pp.1200-1224. doi: 10.2307/2291512

[7] Donoho, D.L., 1995. De-noising by soft thresholding. *IEEE Transection on Information Theory, 41*(3), pp.613-627. doi: 10.1109/18.382009

[8] Doosti, H., Niroomand, H.A. and Afshari, M., 2006. Wavelet Based Estimation of the Derivatives of a Density for a Discrete-Time Stochastic Process: Lp Losses. *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran, 17*(1), pp.75-81. doi:

[9] Fourdrinier, D. and Strawderman, W.E., 2015.Robust minimax Stein estimation under invariant data-based loss for spherically and elliptically symmetric distributions. *Metrika, 78*(4), pp.461-484. doi: 10.1007/s00184-014-0512-x

[10] Ghosh, M. and Shieh, G., 1991. Empirical Bayes Minimax Estimators of Matrix Normal Means. *Journal of Multivariate Analysis, 38*, pp.306-318. doi: 10.1016/0047-259X(91)90048-7

[11] Gupta, A.K. and Nagar, D.K., 2000. Matrix variate distribution, Chapman & Hall/CRC, p. 384. doi: 10.1201/9780203749289

[12] Hamidieh, K., 2018. A data-driven statistical model for predicting the critical temperature of a superconductor. *Computational Materials Science, 154*, pp.346-354. doi: 10.1016/j.comatsci.2018.07.052

[13] Hall, P. and Patil, P., 1995. Formulae for mean integrated squared error of nonlinear wavelet-based density estimators. *The Annals of Statistics, 23*(3), pp.905-928. doi: 10.1214/aos/1176324628

[14] Huang, S.Y., 2002. On a Bayesian aspect for soft wavelet shrinkage estimation under an asymmetric linex loss. *Statistics and Probability Letters, 56*, pp.171-175. doi: 10.1016/S0167-7152(01)00181-X

[15] Karamikabir, H. and Afshari, M., 2019. Wavelet shrinkage generalized Bayes estimation for elliptical distribution parameters under LINEX loss. *International journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing,17*(3), pp.649-669. doi: 10.1142/S0219691319500097

[16] Karamikabir, H., Afshari, M. and Lak, F., 2021. Wavelet threshold based on Stein's unbiased riske stimators of restricted location parameter in multivariate normal. *journal of Applied Statistics, 48*(10), pp.1712-1729. doi: 10.1080/02664763.202001772209

[17] Karamikabir, H. and Afshari, M., 2020. Generalized Bayesian shrinkage and wavelet estimation of location parameter for spherical distribution under balance-type loss: Minimaxity and admissibility. *Multivariate Analysis, 177*(c), 104853. doi: 10.1016/j.jmva.2019.104583

[18] Karamikabir, H. and Afshari, M., 2021. New wavelet thresholds of elliptical distributions under the balance loss. *Statistica sinica, 31*(4), pp.1829-1852. doi: 10.5705/ss.202019.0339

[19] Karamikabir, H., Asghari, A.N. and Salimi, A., 2022. Soft thresholding wavelet shrinkage estimation for mean matrix of matrix variate normal distribution: low and high dimensional. *Soft Computing*, pp.1-16. doi: 10.1007/s00500-022-07005-y

[20] Karamikabir, H. and Afshari, M., 2022. Wavelet shrikage generalized bayes estimation for multivariate normal distribution mean vectors with unknown covariance matrix under balanced linex loss. *Thoeretical Statistics, 45*(1), pp. 107-123. doi: 10.15446/rce.v45n1.92037

[21] Kerkyacharian, G. and Picard, D., 1992. Density estimation in besov spaces. *Statistics and Probability Letters, 13*(1), pp.15-24. doi: 10.1016/0167-7152(92)90231-S

[22] Konno, Y., 1990. Families of minimax estimators of matrix of normal means with unknown covariance matrix. *J.Japan.Statist.Soc, 20*(2), pp.191-201. doi: 10.11329/jjss1970.20.191

[23] Mallat, S.G., 1989. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on,11*(7), pp.674-693. doi: 10.1109/34.192463

[24] Meyer, Y., 1992. Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numerique de l'image. Cambridge University Press, english translation, p. 218. doi: 10.1007/BFb0083510

[25] Petersen, K.B. and Pedersen, M.S., 2012. The matrix cookbook. Technical University of Denmark, p.510.

[26] Stein, M.C., 1981. Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *The Annals of Statistics, 9*(6), pp.1135-1151. doi: 10.1214/aos/1176345632

[27] Torehzadeh, S. and Arashi, M., 2014. A note on shrinkage wavelet estimation in Bayesian analysis. *Statistics and Probability Letters, 84*. pp.231-234. doi: 10.1016/j.spl.2013.10.006

[28] Tsukuma, H., 2009. Generalized bayes minimax estimation of the normal mean matrix with unknown covariance matrix. *Multivariate Analysis, 100*, pp.2296-2304. doi: 10.1016/j.jmva.2009.04.009

[29] Vidakovic, B., 2009. Statistical Modeling by Wavelets. 2nd Ed., Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley Interscience, p.382. doi: 10.1002/9780470317020

[30] Zinodiny, S., Rezaie, S. and Nadarajah, S., 2017. Bayes minimax estimation of the mean matrix of matrix-variate normal distribution under balanced loss function. *Statistics and Probability Letters, 125*, pp.110-120. doi: 10.1016/j.spl.2017.02.003

[31] Zinodiny, S., Rezaie, S. and Nadarajah, S., 2016. Minimax estimation of the mean matrix-variate Normal Distribuion. *Probability and Mathematical Statistics, 36*(2), pp.187-200. doi: 10.6092/issn.1973-2201/6956

# Bayesian Wavelet Threshold Estimation of Mean Matrix of the Matrix Variate Normal Distribution under Balanced Loss Function

Ziba Batvandi(1), Mahomud Afshari(1) [5] and Hamid Karamikabir(1)

(1) Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

Communicated by: Hamzeh Torabi

Received: 24 October 2023 Accepted: 8 September 2024

**Abstract:** Suppose that the random matrix $\mathbf{X}_{p\times m}$ has a matrix variate normal distribution with the mean matrix $\mathbf{\Theta}$ and covariance matrix $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Psi}$ where $\mathbf{\Sigma}$ and $\mathbf{\Psi}$ are known positive definite covariance matrices. This paper studies the soft bayesian shrinkage wavelet estimation of the mean matrix $\mathbf{\Theta}$. Soft bayesian shrinkage wavelet estimator is proposed based on quadratic balanced loss function and matrix variate normal $N_{p,m}(\mathbf{0},\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbf{\Psi})$ prior distribution. $\mathbf{\Lambda}$ is known positive definite covariance matrix. By using bayes estimator as the target estimator in quadratic balanced loss function and Stien's unbiased risk estimate technique, the soft bayesian shrinkage wavelet threshold is obtained. Based on new proposed threshold, we find the soft bayesian shrinkage wavelet estimator of $\mathbf{\Theta}$ mean matrix. The simulation study and two real examples to measure the performance of the presented theoretical topics are used. The results show that the soft bayesian shrinkage wavelet estimator dominates classical shrinkage wavelet estimators.

**Keywords**: Soft threshold, Bayesian wavelet estimator, Stein's unbiased risk estimate, Matrix variate normal distribution, Mean matrix.



[5]Corresponding author

*E-mail addresses:* (M. Afshari) afshar@pgu.ac.ir, (Z. Batvandi) zibavandi@mehr.pgu.ac.ir
(H. Karamikabir) h_karamikabir@pgu.ac.ir