مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۸۷-۹۵

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2024.46438.2270

تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله

ابراهیم عباسی [۱]

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مهاباد، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۹

تقدیم به روح برادر بزرگوارم محمد، اولین معلم من

چکیده: فرض کنید $H(\mathbb{D})$ مجموعه تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$، $u, v \in H(\mathbb{D})$ و φ, ψ دو خودنگاشت $(\varphi, \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D})$ باشند. تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار $uC_\varphi - vC_\psi$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(uC_\varphi - vC_\psi)f(z) = u(z)f(\varphi(z)) - v(z)f(\psi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

در این مقاله کرانداری تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله مورد بررسی قرار خواهد گرفت و شرط معادلی برای کرانداری عملگر اشاره شده ارائه خواهد شد. پس از آن نرم عملگر ترکیبی بین فضاهای اشاره شده مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و نشان داده خواهد شد که $||C_\varphi|| \geq ۱$ و عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله طول‌پا نیست.

واژه‌های کلیدی: کرانداری، فضای دیریکله، فضای تبدیل کوشی، طول‌پا.

رده‌بندی ریاضی: 47B38; 30H99

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$، $H(\mathbb{D})$ مجموعه تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ و $dA(z)$ اندازه مساحت نرمال شده روی $\mathbb{D}$ $(\int_{\mathbb{D}} dA(z) = ۱)$ باشد. ابتدا فضاهای مورد نیاز این مقاله را به شرح زیر تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $\alpha > -۱$، فضای دیریکله که با نماد $\mathcal{D}_\alpha$ نشان داده می‌شود از تمام توابعی مانند $f \in H(\mathbb{D})$ که در شرط زیر صدق می‌کنند تشکیل شده است

$$(۱+\alpha)\int_{\mathbb{D}} (۱-|z|^۲)|f'(z)|^۲ dA(z) < \infty.$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(E. Abbasi) ebrahimabbasi81@gmail.com

این فضا با نرم $\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}=|f(\circ)|+\left((1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|^2dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است.
فرض کنید $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:\quad |z|=1\}$. فضای تمام اندازه‌های مختلط روی $\mathbb{T}$ را با $\mathcal{M}$ نشان می‌دهند که این فضا با نرم تغییرات کلی یک فضای باناخ است. اکنون به معرفی فضای تبدیل کوشی که با استفاده از فضای $\mathcal{M}$ تعریف می‌شود خواهیم پرداخت.

تعریف **۲.۱**. فضای تبدیل کوشی $\mathcal{F}$، از تمام توابعی مانند $f\in H(\mathbb{D})$ تشکیل شده است که به‌ازای حداقل یک اندازه مانند $\nu\in\mathcal{M}$ دارای نمایشی به‌صورت زیر است

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(w)}{1-\overline{w}z},\quad z\in\mathbb{D}.$$

مجموعه تمام اندازه‌های مختلط که تابع f به‌ازای آنها دارای نمایشی به‌صورت فوق می‌باشد با $\mathcal{M}_f$ نشان می‌دهند. فضای تبدیل کوشی با نرم $\|.\|_{\mathcal{F}}$

$$\|f\|_{\mathcal{F}}=\inf\left\{\|\nu\|:\nu\in\mathcal{M}_f\right\}$$

یک فضای باناخ است. این فضا، دوگان جبر دیسک می‌باشد. اطلاعات تکمیلی در مورد فضای تبدیل کوشی را می‌توان در [۹–۱۱، ۱۵–۱۷، ۲۱، ۲۳، ۲۴] نگریست.

تعریف **۳.۱**. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. عملگر خطی $T:X\to Y$ را طول‌پا نامند هرگاه برای هر $x\in X$

$$\|Tx\|_Y=\|x\|_X.$$

آشکار است که هر عملگر خطی طول‌پاکراندار(با نرم یک) و یک‌به‌یک می‌باشد. یکی از مهمترین مباحث در زمینه عملگرها روی توابع تحلیلی، بررسی طول‌پابودن عملگر ترکیبی(وزن‌دار) روی فضاهای توابع تحلیلی می‌باشد. اطلاعات تکمیلی در این زمینه را می‌توان در [۶–۸، ۱۳، ۱۴، ۱۸] نگریست.
هر تابع تحلیلی $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ را خودنگاشت می‌نامند. مجموعه تمام خودنگاشت‌های تحلیلی روی $\mathbb{D}$ را با $S(\mathbb{D})$ نشان می‌دهند.

تعریف **۴.۱**. فرض کنید $u\in H(\mathbb{D})$ و $\varphi\in S(\mathbb{D})$. عملگر ترکیبی وزن‌دار که با uC_φ نشان می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(uC_\varphi)f(z)=u(z)f(\varphi(z)),\quad f\in H(\mathbb{D}),\quad z\in\mathbb{D}.$$

با جایگذاری $u(z)=1$ در عملگر بالا، عملگر ترکیبی و با قرار دادن $\varphi(z)=z$، عملگر ضربی حاصل خواهد شد. اکنون فرض کنید $u,v\in H(\mathbb{D})$ و $\varphi,\psi\in S(\mathbb{D})$، تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار به‌صورت زیر است

$$(uC_\varphi-vC_\psi)f(z)=u(z)f(\varphi(z))-v(z)f(\psi(z)),\quad f\in H(\mathbb{D}),\quad z\in\mathbb{D}.$$

به طریق مشابه می‌توان تفاضل دو عملگر ترکیبی و ضربی را پیدا نمود.
یکی از مهمترین مباحث در نظریه عملگرهای ترکیبی روی فضاهای توابع تحلیلی بررسی ارتباط بین کرانداری و فشردگی با خودنگاشت معرف عملگر ترکیبی، φ می‌باشد. به عنوان مثال با استفاده از لم کوشی شوارتز به سادگی نشان داده خواهد شد که هر عملگر ترکیبی از فضای بلاخ به فضای بلاخ همیشه کراندار است. در ([۳، ۴]) نشان داده شده است که عملگر ترکیبی از فضای از نوع بلاخ α (از نوع بلاخ کوچک α) به n امین فضای وزن‌دار کراندار است اگر وتنها اگر

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}m^{\alpha-1}\|\varphi^m\|_{\mathcal{W}_\mu^n}<\infty.$$

یکی از روشهای غیرمستقیم برای بررسی فشردگی یک عمگر کراندار پیدا کردن نرم اساسی یا تقریبی برای نرم اساسی آن عملگر می‌باشد. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار و T یک عملگر خطی کراندار از X به Y باشد نرم اساسی با $\|T\|_{e,X\to Y}$ نشان داده می‌شود که

$$\|T\|_{e,X\to Y}=\inf\{\|T-S\|:\text{عملگر S فشرده است}\}.$$

با توجه به تعریف بالا، عملگر T فشرده است اگر وتنها اگر $\|T\|_{e,X\to Y}=\circ$. ژهاو در [۳۱] نشان داده است که

$$\|C_\varphi\|_{e,\mathcal{B}^\alpha\to\mathcal{B}^\beta}=(\frac{e}{2\alpha})^\alpha\limsup_{m\to\infty}m^{\alpha-1}\|\varphi^m\|_{\mathcal{B}^\beta}.$$

پس عملگر $C_\varphi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^\beta$ فشرده است اگر و تنها اگر $\limsup_{m\to\infty} m^{\alpha-1}\|\varphi^m\|_{\mathcal{B}^\beta} = 0$. در ([۳، ۴]) با پیدا کردن تقریبی برای نرم اساسی، نشان داده شده است که عملگر ترکیبی از فضای از نوع بلاخ α (از نوع بلاخ کوچکα) به n امین فضای وزن‌دار فشرده است اگر و تنها اگر

$$\limsup_{m\to\infty} m^{\alpha-1}\|\varphi^m\|_{\mathcal{W}_\mu^n} = 0.$$

در بررسی ساختار توپولوژیکی مجموعه عملگرهای ترکیبی روی فضاهای توابع تحلیلی، کرانداری، فشردگی و نرم اساسی تفاضل دو عملگر ترکیبی مطرح خواهد شد ([۱۲، ۱۹، ۲۰، ۲۳]). تفاضل دو عملگر ترکیبی روی فضاهای توابع تحلیلی و برخی از ویژگی‌های آنها از جمله کرانداری، فشردگی و نرم اساسی توسط نویسندگان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است ([۲۲، ۲۵–۲۸]).

نویسنده این مقاله و همکاران، کرانداری، فشردگی و نرم اساسی عملگر ترکیبی وزن‌دار(تعمیم‌یافته) را روی فضاهای متنوعی بررسی کرده‌اند([۱، ۲]). استویچ در [۲۹] نرم کلاس وسیعی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار از فضای تبدیل کوشی به n امین فضای وزن‌دار را پیدا نموده است. عباسی و حسنلو در [۵] کرانداری و نرم اساسی عملگر استویچ شارمای تعمیم‌یافته از فضای تبدیل کوشی به فضای زیگموند را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

با الهام گرفتن از مطالعات قبلی در بخش اول این مقاله ابتدا کرانداری تفاضل دو عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله مورد بررسی قرار خواهد گرفت و کران بالا و پایینی برای نرم آن عملگر پیدا خواهد شد. پس از آن در بخش دوم عملگر ترکیبی روی فضاهای اشاره شده مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و نشان داده خواهد شد که نرم آن همواره ناکمتر از یک است. همچنین به عنوان نتیجه‌ای نشان می‌دهیم که عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله طول‌پا نیست.

۲ تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله

در این بخش کرانداری تفاضل دو عملگر ترکیبی وزن‌دار متمایز از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله مورد بررسی قرار خواهد گرفت و شرط معادلی برای کرانداری عملگر اشاره شده ارائه خواهد شد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\alpha > -1$، $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$ و $u, v \in H(\mathbb{D})$. عملگر $uC_\varphi - vC_\psi$ از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله کراندار است اگر و تنها اگر

$$\sup_{w\in\mathbb{T}} Q_1(w) + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_2(w) < \infty, \tag{1.2}$$

که در آن

$$Q_1(w) = \left|\frac{u(0)}{1-\bar{w}\varphi(0)} - \frac{v(0)}{1-\bar{w}\psi(0)}\right|,$$
$$Q_2(w) = \left((1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha \left|\sum_{t=0}^{1} \bar{w}^t\left(\frac{E^t_{u,\varphi}(z)}{(1-\bar{w}\varphi(z))^{t+1}} - \frac{E^t_{v,\psi}(z)}{(1-\bar{w}\psi_j(z))^{t+1}}\right)\right|^2 dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$E^0_{u,\varphi}(z) = u'(z),\ \ E^1_{u,\varphi}(z) = u(z)\varphi'(z).$$

دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\sup_{w\in\mathbb{T}}\Big(Q_1(w)+Q_2(w)\Big) \le \|uC_\varphi - vC_\psi\| \le \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_1(w) + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_2(w).$$

اثبات. برای هر $w \in \mathbb{T}$ تابع

$$f_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$$

در فضای تبدیل کوشی قرارد دارد و نرم آن برابر عدد یک می‌باشد ([۳۰]). دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned}|((uC_\varphi - vC_\psi)f_w)(0)| &= |u(0)f_w(\varphi(0)) - v(0)f_w(\psi(0))|\\ &= \left|\frac{u(0)}{1-\bar{w}\varphi(0)} - \frac{v(0)}{1-\bar{w}\psi_j(0)}\right|\\ &= Q_1(w)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}Q_2(w)^2 =&(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\left|\sum_{t=0}^{1}(\frac{E^t_{u,\varphi}(z)}{(1-\bar{w}\varphi(z))^{t+1}}-\frac{E^t_{v,\psi}(z)}{(1-\bar{w}\psi(z))^{t+1}})\right|^2 dA(z)\\ =&(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\left|((uC_\varphi-vC_\psi)f_w)'(z)\right|^2 dA(z).\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم که عملگر $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{F}\to\mathcal{D}_\alpha$ کراندار باشد، پس

$$|((uC_\varphi-vC_\psi)f_w)(0)|+\left((1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\left|((uC_\varphi-vC_\psi)f_w)'(z)\right|^2 dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\|uC_\varphi-vC_\psi\|\|f_w\|_{\mathcal{F}}=\|uC_\varphi-vC_\psi\|.$$

اگر از رابطه بالا نسبت به w سوپریمم بگیریم دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\max\left\{\sup_{w\in\mathbb{T}}Q_i(w)\right\}_1^2\leq\sup_{w\in\mathbb{T}}\left(Q_1(w)+Q_2(w)\right)\leq\|uC_\varphi-vC_\psi\|.$$

اکنون فرض می‌کنیم که رابطه (۱.۲) برقرار است نشان می‌دهیم که عملگر $uC_\varphi - vC_\psi$ از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله کراندار است. برای هر تابع $f\in\mathcal{F}$ اندازه‌ای مانند $\nu_f\in\mathcal{M}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu_f(w)}{1-\bar{w}z},\quad z\in\mathbb{D},$$

و $\|f\|_{\mathcal{F}}=\|\nu_f\|$. پس برای هر $f\in\mathcal{F}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|(uC_\varphi-vC_\psi)f(0)|&=|u(0)f(\varphi(0))-v(0)f(\psi(0))|\\&=|\int_{\mathbb{T}}(\frac{u(0)}{1-\bar{w}\varphi(0)}-\frac{v(0)}{1-\bar{w}\psi(0)})d\nu(w)|\\&\leq\int_{\mathbb{T}}\underbrace{\left|\frac{u(0)}{1-\bar{w}\varphi(0)}-\frac{v(0)}{1-\bar{w}\psi(0)}\right|}_{Q_1(w)}d|\nu|(w)\\&\leq\|\nu\|\sup_{w\in\mathbb{T}}Q_1(w)\end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از قضیه فوبینی و نامساوی ینسین داریم

$$(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\left|((uC_\varphi-vC_\psi)f)'(z)\right|^2 dA(z)=$$
$$(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\|\nu_f\|^2\left|\sum_{t=0}^{1}\int_{\mathbb{T}}\bar{w}^t(\frac{E^t_{u,\varphi}(z)}{(1-\bar{w}\varphi(z))^{t+1}}-\frac{E^t_{v,\psi}(z)}{(1-\bar{w}\psi(z))^{t+1}})\frac{d\nu_f(w)}{\|\nu_f\|}\right|^2 dA(z)\leq$$
$$\int_{\mathbb{T}}\|\nu_f\|^2(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\left|\sum_{t=0}^{1}\bar{w}^t(\frac{E^t_{u,\varphi}(z)}{(1-\bar{w}\varphi(z))^{t+1}}-\frac{E^t_{v,\psi}(z)}{(1-\bar{w}\psi(z))^{t+1}})\right|^2 dA(z)\frac{d|\nu_f|(w)}{\|\nu_f\|}\leq$$
$$\int_{\mathbb{T}}\|\nu_f\|Q_2^2(w)d|\nu_f|(w)\leq\|\nu_f\|^2(\sup_{w\in\mathbb{T}}Q_2(w))^2.$$

از این‌رو با استفاده از نامساوی‌های فوق خواهیم داشت:

$$|((uC_\varphi - vC_\psi)f)(\circ)| + \left((\text{۱}+\alpha)\int_{\mathbb{D}}(\text{۱}-|z|^{\text{۲}})^\alpha |((uC_\varphi - vC_\psi)f)'(z)|^{\text{۲}}\, dA(z)\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \leq$$
$$\left(\sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۱}}(w) + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۲}}(w)\right)\|\nu_f\| \leq$$
$$\left(\sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۱}}(w) + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۲}}(w)\right)\|f\|_{\mathcal{F}}.$$

اگر از رابطه فوق نسبت به w سوپریمم بگیریم داریم

$$\|uC_\varphi - vC_\psi\| \leq \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۱}}(w) + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۲}}(w).$$

و اثبات تمام است. $\square$

نتیجه ۲.۲. با جایگذاری $v \equiv \circ$ در قضیه قبل

$$E^{\circ}_{v,\psi}(z) = E^{\text{۱}}_{v,\psi}(z) = \circ$$

دراین‌صورت نتایج برای عملگر ترکیبی وزن‌دار از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله بیان خواهند شد.

نتیجه ۳.۲. با جایگذاری $v \equiv \circ$ و $u \equiv \text{۱}$ در قضیه ۱.۲ داریم

$$E^{\circ}_{v,\psi}(z) = E^{\text{۱}}_{v,\psi}(z) = E^{\circ}_{,\varphi}(z) = \circ,\ \ E^{\text{۱}}_{u,\varphi}(z) = \varphi'(z).$$

دراین‌صورت نتایج برای عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله بیان خواهند شد.

۳ نرم عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله

در این بخش نرم عملگر ترکیبی و طول‌پابودن آن از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\varphi \equiv \circ$. دراین‌صورت
الف) $\|C_\circ\| = \text{۱}$.
ب) اگر $Ker(C_\circ) = \{f\in\mathcal{F}:\ \ C_\circ(f) = \circ\}$ آنگاه فضای $Ker(C_\circ)$ نامتناهی‌البعد است.

اثبات. با توجه به نتیجه ۳.۲ و قضیه ۱.۲، داریم

$$\sup_{w\in\mathbb{T}}\left(\left|\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\bar{w}\varphi(\circ)}\right| + Q_{\text{۲}}(w)\right) \leq \|C_\varphi\| \leq \sup_{w\in\mathbb{T}}\left|\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\bar{w}\varphi(\circ)}\right| + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_{\text{۲}}(w).$$

چون $\varphi \equiv \circ$ پس $\varphi(\circ) = \circ$ و $Q_{\text{۲}}(w) \equiv \circ$. دراین‌صورت

$$\text{۱} = \sup_{w\in\mathbb{T}}(\text{۱}+\circ) \leq \|C_\circ\| \leq \text{۱}+\circ = \text{۱}.$$

(ب) برای هر $f\in\mathcal{F}$ اندازه‌ای مانند $\nu_f \in \mathcal{M}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu_f(w)}{\text{۱}-\bar{w}z}, \quad z\in\mathbb{D},$$

و $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|\nu_f\|$. دراین‌صورت

$$C_\circ(f) = f(\circ) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu_f(w)}{\text{۱}-\bar{w}\times\circ} = \int_{\mathbb{T}} d\nu_f(w).$$

پس برد عملگر $C_\circ$ زیرمجموعه اعداد مختلط بوده از این‌رو عملگر $C_\circ$ یک تابعک خطی ناصفر می‌باشد. چون فضای تبدیل کوشی نامتناهی‌البعد بوده، پس هسته عملگر اشاره شده نامتناهی‌البعد است. $\square$

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\varphi \in S(\mathbb{D})$ و عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله کراندار باشد. اگر $\varphi \neq ۰$ آنگاه

$$\|C_\varphi\| > ۱.$$

اثبات. برای اثبات قضیه فوق دو حالت در نظر می‌گیریم.
حالت اول: $\varphi(۰) \neq ۰$.
در این حالت $۰ \leq \theta_۰ < ۲\pi$ موجود است به‌طوری‌که $\varphi(۰) = |\varphi(۰)|e^{i\theta_۰}$، پس

$$\sup_{w\in\mathbb{T}} \frac{۱}{|۱-\bar{w}\varphi(۰)|} \geq \frac{۱}{|۱-\overline{e^{i\theta_۰}}\varphi(۰)|} \geq \frac{۱}{|۱-\overline{e^{i\theta_۰}}|\varphi(۰)|e^{i\theta_۰}|} = \frac{۱}{۱-|\varphi(۰)|} > ۱.$$

از این‌رو با استفاده از قضیه ۱.۲، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|C_\varphi\| &\geq \sup_{w\in\mathbb{T}}\left(\left|\frac{۱}{۱-\bar{w}\varphi(۰)}\right| + Q_۲(w)\right)\\ &\geq \left|\frac{۱}{۱-\overline{e^{i\theta_۰}}\varphi(۰)}\right| + Q_۲(e^{i\theta_۰})\\ &> ۱ + Q_۲(e^{i\theta_۰}).\end{aligned}$$

حالت دوم: $\varphi(۰) = ۰$.
با استفاده از قضیه ۱.۲، داریم

$$\begin{aligned}\|C_\varphi\| &\geq \sup_{w\in\mathbb{T}}\left(\left|\frac{۱}{۱-\bar{w}\varphi(۰)}\right| + Q_۲(w)\right)\\ &= ۱ + \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_۲(w).\end{aligned}$$

اگر $\sup_{w\in\mathbb{T}} Q_۲(w) \neq ۰$ اثبات تمام خواهد شد. پس فرض می‌کنیم که چنین نباشد از این‌رو

$$\begin{aligned}۰ &= \sup_{w\in\mathbb{T}} Q_۲(w)\\ &= \sup_{w\in\mathbb{T}}\left((۱+\alpha)\int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|z|^۲)^\alpha|\varphi'(z)|^۲}{|۱-\bar{w}\varphi(z)|^۴} dA(z)\right)^{\frac{۱}{۲}}\\ &\geq \left((۱+\alpha)\int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|z|^۲)^\alpha|\varphi'(z)|^۲}{(۱+|\varphi(z)|)^۴} dA(z)\right)^{\frac{۱}{۲}}.\end{aligned}$$

دراین‌صورت $\frac{(۱-|z|^۲)^\alpha|\varphi'(z)|^۲}{(۱+|\varphi(z)|)^۴} \equiv ۰$ از این‌رو نگاشت φ باید عدد ثابت باشد. پس $\varphi = \varphi(۰) = ۰$ و این یک تناقض است.
اثبات تمام است. $\square$

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $\varphi \in S(\mathbb{D})$ و عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله کراندار باشد دراین‌صورت عملگر ترکیبی از فضای تبدیل کوشی به فضای دیریکله طول‌پا نیست.

اثبات. اگر $\varphi \equiv ۰$ دراین‌صورت با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۱.۳، عملگر $C_۰$ یک‌به‌یک نیست و از این‌رو نمی‌تواند طول‌پا باشد. اما در حالتی که $\varphi \neq ۰$، با استفاده از قضیه ۲.۳ نرم عملگر C_φ بزرگتر از یک خواهد شد که در این حالت نیز نمی‌تواند طول‌پا باشد. $\square$

فهرست منابع

[۱] عباسی، ابراهیم، نصراصفهانی، سپیده و خلیل‌پور، کمال، ۱۴۰۰. عملگر استویچ شارما از فضای بسوف به فضای زیگموند. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، ۳(۱۱)، صص. ۵۷۳ - ۵۸۴. doi:۱۰.۲۲۰۵۵/jamm.۲۰۲۱.۳۷۳۶۹.۱۹۳۰

[۲] نصراصفهانی، سپیده، حسنلو، مصطفی و عباسی، ابراهیم، ۱۴۰۱. اندازه کارلسون و انواع عملگرهای ترکیبی روی فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقدار. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، ۱(۱۲)، صص. ۱ - ۱۲. doi:۱۰.۲۲۰۵۵/jamm.۲۰۲۲.۳۸۹۱۸.۱۹۷۴

[3] Li, S., Abbasi, E. and Vaezi, H., 2020. Weighted composition operators from Bloch-type spaces to nth weighted-type spaces. *Annales Polonici Mathematici,* 124, pp. 903-107. doi.org/10.4064/ap181119-3-4

[4] Abbasi, E., Li, S. and Vaezi, H., 2020. Weighted composition operators from the Bloch space to nth weighted-type, *Turkish Journal of Mathematics,* 44(1), pp. 108-117. doi.org/10.3906/mat-1907-34

[5] Abbasi, E. and Hassanlou, M., 2024. Generalized Stević-Sharma type operators on spaces of fractional Cauchy transforms. *Mediterr. J. Math.,* 21(1), pp. 40. doi.org/10.1007/s00009-023-02583-z

[6] Allen, R. F. and Colonna, F., 2009. Isometries and spectra of multiplication operators on the Bloch space. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* 79, pp. 147-160. doi:10.1017/S0004972708001196

[7] Allen, R. F. Heller, K. C. and Pons, M. A., 2014. Isometric composition operators on the analytic Besov spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 414 (1), pp. 414–423. doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.12.053

[8] Colonna, F., 2005. Characterisation of the isometric composition operators on the Bloch spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.,* 72, pp. 283–290. doi.org/10.1017/S0004972700035073

[9] Choa, J. S. and Kim, H. O., 2001. Composition operators from the space of Cauchy transforms into its Hardy-type subspaces. *Rocky Mountain J. Math.,* 31(1), pp. 95–113. http://www.jstor.org/stable/44238557.

[10] Cima, J. A., Matheson, A. and Ross, W. T., 2004. The Backward Shift on the Space of Cauchy Transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 132 (3), pp. 745–54. S 0002-9939(03)07103-X

[11] Cima, J. A., Matheson, A. and Ross, W. T., 2006. The Cauchy transform. *Mathematical Surveys and Monographs.* 125. Providence, RI: American Mathematical Society.

[12] Dai, J., 2019. Topological structure of the set of composition operators on the weighted Bergman space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 473(4), pp. 444–467. doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.060

[13] El-Gebeily, M. and Wolfe, J., 1985. Isometries of the disc algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 93(4), pp. 697–702. doi.org/10.2307/2045547

[14] Forelli, F., 1964. The isometries of H^p. *Can. J. Math.,* 16, pp. 721–728. doi.org/10.4153/CJM-1964-068-3

[15] Guo, X. and Wang, M., 2020. Linear combination of composition operators on Cauchy transform type spaces. *Science China Mathematics,* 50(12), pp. 1733–1744. doi:10.1360/SSM-2020-0160

[16] Hibschweiler, R. A. and MacGregor, T. H., 2006. Fractional Cauchy Transforms. *Chapman and Hall*. Boca Raton, FL: CRC.

[17] Hibschweiler, R. A., 2012. Composition operators on spaces of fractional Cauchy transforms. *Complex Analysis and Operator Theory,* 6(4). pp. 897–911. doi.org/10.1007/s11785-010-0104-3

[18] Hornor, W. and Jamison, J., 2001. Isometries of some Banach space of analytic functions. *Integral Equations and Operator Theory,* 41, pp. 410–425. doi.org/10.1007/BF01202102

[19] Hosokawa, T. and Ohno, S., 2006. Topological structures of the sets of composition operators on the Bloch spaces. *J. Math. Anal. Appl.,* 314. pp. 736–748. doi:10.1016/j.jmaa.2005.04.080

[20] Maccler, B., Ohno, S. and Zhao, R., 2001. Topological structure of the space of composition operators on H^∞. *Integral Equations and Operator Theory,* 40(4), pp. 481-494. doi.org/10.1007/BF01198142

[21] MacGregor, T. H., 1999. Fractional Cauchy transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 105, pp. 93–108. doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00022-9

[22] Saukko, E., 2011. Difference of composition operators between standard weighted Bergman spaces. *J. Math. Anal. Appl.,* 381, pp. 789–798. doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.03.058

[23] Shapiro, J. and Sundberg, C., 1990. Isolation amongst the composition operators. *Pac. J. Math.,* 145(1). 117–152. doi: 10.2140/pjm.1990.145.117

[24] Sharma, A. Krishan, R. and Subhadarsini, E., 2017. Difference of composition operators from the space of Cauchy integral transforms to Bloch-type spaces. *Integral Transforms and Special Functions,* 28(2), pp. 145–155. doi.org/10.1080/10652469.2016.1255608

[25] Shi, Y. and Li, S., 2017. Essential norm of the differences of composition operators on the Bloch space. *Math. Inequal. Appl.,* 20(2), pp. 543–555. doi: 10.7153/mia-20-37

[26] Shi, Y., Li, S. and Zhu, X., 2021. Difference of weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space. *Bullet. Iran. Math. Soc.,* 47(4). pp. 1245-1259. doi.org/10.1007/s41980-020-00439-w

[27] Shi, Y., Qu, D. and Li, S., 2022. Difference of composition operators on weighted Bergman spaces with doubling weights. *Comput. Meth. Funct. Theory,* 22(2). pp. 287-305. doi.org/10.1007/s40315-021-00382-9

[28] Shi, Y. and Li, S., 2024. Difference of composition-differentiation operators from Hardy spaces to weighted Bergman spaces via harmonic analysis. *Bulle. des Sci. Math.,* 191, pp. 103383. doi.org/10.1016/j.bulsci.2024.103383

[29] Stevic, S., 2024. Norm of the general polynomial differentiation composition operator from the space of Cauchy transforms to the mth weighted-type space on the unit disk. *Math. Meth. the Appl. Scie.,* 47, pp. 3893-3902. doi: 10.1002/mma.9681

[30] Wang, M. and Guo, X., 2018. Difference of differentiation composition operators on the fractional Cauchy transforms spaces. *Num. Func. Anal. Optim.,* 39. pp. 1291–1315. doi: 10.1080/01630563.2018.1477798

[31] Zhao, R., 2010. Essential norms of composition operators between Bloch type spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 138(7), pp. 2537-2546. S 0002-9939(09)09961-4

Difference of weighted composition operator from Cauchy transform space into Dirichlet space

Ebrahim Abbasi [2]

Department of Mathematics, Mahabad Branch, Islamic Azad University, Mahabad, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 20 March 2024 Accepted: 9 September 2024

Abstract: Let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$, $u, v \in H(\mathbb{D})$ and φ, ψ be self-map $(\varphi, \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D})$. Difference of weighted composition operator is denoted by $uC_\varphi - vC_\psi$ and defined as follows

$$(uC_\varphi - vC_\psi)f(z) = u(z)f(\varphi(z)) - v(z)f(\psi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

In this paper, boundedness of difference of weighted composition operator from Cauchy transform into Dirichlet space will be considered and an equivalence condition for boundedness of such operator will be given. Then the norm of composition operator between the mentioned spaces will be studied and it will be shown that $\|C_\varphi\| \geq 1$ and there is no composition isometry from Cauchy transform into Dirichlet space.

Keywords: Boundedness, Cauchy transform space, Dirichlet space, isometry.

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (E. Abbasi) ebrahimabbasi81@gmail.com