



## بررسی یک مدل $SIR$ با نرخ شیوع غیرخطی و تاثیر صددرصدی واکسیناسیون

محمدعلی شاکری، رسول کاظمی<sup>۱</sup>

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

دبیر مسئول: محمد هادی فراهی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۴/۲۴

چکیده: در این مقاله، یک مدل  $SIR$  با نرخ شیوع غیرخطی کلی و با فرض تاثیر صددرصدی واکسن ارائه می‌دهیم. این دستگاه یک نقطه تعادل عاری از بیماری دارد که متناظر با آن، یک عدد بازتولید پایه  $R_0$  به دست می‌آید. برای  $R_0 > 1$  دستگاه یک نقطه تعادل بومی نیز خواهد داشت. پایداری موضعی و سراسری این نقاط تعادل را مطالعه می‌کنیم و با توجه به تغییر وضعیت پایداری نقاط تعادل با تغییر یکی از پارامترها، وجود انشعاب تبادل پایداری را بررسی خواهیم کرد. همچنین، شاخص حساسیت  $R_0$  را محاسبه کرده که میزان تاثیرپذیری دستگاه از پارامترهای موجود را مشخص می‌کند. در پایان، نتایج به دست آمده را با مثال‌های عددی بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مدل همه‌گیری  $SIR$ ، نرخ شیوع غیرخطی، عدد بازتولید پایه، پایداری، انشعاب.

رده‌بندی ریاضی: 34A34, 92B05, 92D30, 92D25

### مقدمه ۱

بیماری‌های عفونی نظیر ایدز، سرطان و یا بیماری‌های دوران کودکی که شایع‌ترین نوع بیماری‌های عفونی هستند، همواره جوامع بشری را درگیر خود کرده‌اند. از بین بیماری‌های عفونی، آن دسته از بیماری‌هایی که قابلیت انتقال دارند یا به عبارت دیگر واگیردارند، باعث نگرانی بیشتریند، چرا که می‌توانند منجر به یک همه‌گیری در سطح بین‌المللی شوند. همین دلیل باعث می‌شود تا دانشمندان به مطالعه‌ی همه‌گیری‌ها بپردازند و تا حد امکان، اثرات سوء این معضلات را به حداقل برسانند. این مطالعات می‌تواند با اهداف متفاوتی انجام گیرد. به عنوان مثال مطالعات دانشمندان پزشکی با هدف درمان یک بیماری انجام می‌شود و یا مطالعات میکروبی‌شناس‌ها برای شناخت ریشه‌ها و علل بیماری انجام می‌شود. در این میان یکی از رشته‌هایی که به مطالعه همه‌گیری‌ها می‌پردازد، علم همه‌گیرشناسی است. همه‌گیرشناسی شاخه‌ای از علم پزشکی است که به بررسی الگوها، علل و اثرات شرایط بهداشتی و بیماری‌ها در جمعیت‌ها می‌پردازد. این علم به تحلیل و مطالعه‌ی نحوه‌ی انتشار بیماری‌ها و عوامل مؤثر بر آن‌ها و همچنین به شناسایی روش‌های پیش‌گیری و کنترل بیماری‌ها کمک می‌کند. به بیان دیگر، همه‌گیرشناس‌ها به مطالعه‌ی روند شیوع بیماری و عوامل دخیل در آن می‌پردازند و فرایند همه‌گیری را پیش‌بینی می‌کنند، چرا که پیش‌بینی فرایند بیماری می‌تواند تا حد زیادی در کنترل روند آن موثر باشد. طی سالیان گذشته، دانشمندان دریافته‌اند که چنین بیماری‌هایی را می‌توان با

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

ابزارهای ریاضی مدل کرد و با بررسی این مدل‌ها به مطالعه و پیش‌بینی روند بیماری در درازمدت پرداخت. بسیاری از این بیماری‌ها می‌توانند به‌عنوان یک دستگاه دینامیکی فرمول‌بندی شوند. با بررسی دینامیک این دستگاه از جمله نقاط تعادل و پایداری آن‌ها و همچنین مطالعه‌ی انشعاب‌های موضعی و سراسری دستگاه می‌توان فرایند گسترش بیماری را پیش‌بینی کرد.

برای اولین بار در سال ۱۹۲۷ کرماک<sup>۲</sup> و مک‌کندریک<sup>۳</sup> در مقاله‌ی مشترک خود [۸] یک مدل ریاضی برای همه‌گیری ارائه کردند. در مدل آن‌ها، که یک مدل محفظه‌ای نامیده می‌شود، جامعه به سه بخش افراد مستعد بیماری  $S$ ، افراد مبتلا به بیماری  $I$  و افراد بهبودیافته از بیماری  $R$  تقسیم می‌شود. این مدل به‌صورت

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \alpha I(t) \\ R'(t) = \alpha I(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

است که در آن  $\beta$  نرخ انتقال بیماری و  $\alpha$  نرخ بهبود بیماری در نظر گرفته شده است. این مدل را تحت عنوان مدل  $SIR$  می‌شناسیم. عبارت  $\beta IS$  را به اصطلاح نرخ شیوع می‌نامند. خاطر نشان شود که برای مدل‌سازی واقعی یک بیماری، دستگاه (۱.۱) عوامل مهمی را در بر نمی‌گیرد. یکی از این عوامل، نرخ تولد یا نرخ مرگ‌ومیر طبیعی است. این دو عامل را معمولاً با اصلاح (۱.۱) به‌صورت

$$\begin{cases} S'(t) = \lambda - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \alpha I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \alpha I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

وارد مدل می‌کنند که در آن  $\lambda$  نرخ تولد و  $\mu$  نرخ مرگ و میر طبیعی است [۶]. البته موارد متعدد دیگری نیز هست که باید به آن‌ها توجه شود. یکی از مواردی که بسیار مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است، نرخ شیوع بیماری است که یکی از عوامل کلیدی در مدل‌سازی بیماری‌ها است و ظرافت در انتخاب و تعیین دقیق آن می‌تواند به واقعی‌تر شدن مدل بیانجامد. چرا که نرخ شیوع به عواملی چون ظرفیت درمان و سیستم‌های بهداشتی، تراکم جمعیت، رفتارهای اجتماعی، میزان ایمنی جامعه، میزان و سرعت واکسیناسیون و ... می‌تواند وابسته باشد که همین منجر به انتخاب‌های متفاوتی می‌شود. در واقع تعمیم نرخ شیوع، پژوهش‌های فراوانی را به خود اختصاص داده است. به‌عنوان مثال، در [۵، ۱] نرخ شیوع

$$\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I + \alpha_3 SI}$$

مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نرخ شیوع در [۳] به‌صورت  $\beta SI / (1 + kI)$ ، در [۹] به‌صورت  $\beta SI^p / (1 + kI^p)$  و در [۴] به‌صورت  $kI^p S^q$  در نظر گرفته شده است.

در این مقاله، با الهام گرفتن از مدل ارائه‌شده در [۲]، مدلی با یک نرخ شیوع کلی به‌صورت

$$f(S, I) = \frac{\beta SI}{Ng(\frac{I}{N})}$$

ارائه خواهیم کرد (تابع  $g$  در بخش بعد معرفی خواهد شد) که چون از نرخ شیوع استاندارد استفاده شده است مناسب برای بیماری‌هایی است که ساز و کار واگیر و شیوع آن حساس به رشد جمعیت نباشد، مانند هپاتیت  $B$  و ایدز. همچنین از آنجایی که واکسیناسیون یکی از موثرترین راه‌های مقابله با اغلب بیماری‌های عفونی است، سعی داریم تا در مدل خود تاثیر آن را نیز در نظر بگیریم. توجه ما به مطالعه‌ی تاثیر صددرصدی واکسن در این مقاله به این جهت حائز اهمیت است که می‌تواند در هزینه‌های هنگفت واکسینه کردن کل جامعه صرفه‌جویی کند. به این معنی که در برخی موارد، می‌توان با واکسینه کردن بخشی از جامعه همان نتیجه‌ای را گرفت که به خاطر آن، اقدام به واکسینه کردن کل جامعه می‌کنیم. این مدل را در بخش دوم معرفی می‌کنیم و در بخش سوم به یافتن نقاط تعادل دستگاه می‌پردازیم و عدد بازتولید پایه  $\mathcal{R}_0$  را برای دستگاه محاسبه می‌کنیم. عدد بازتولید پایه یکی از مفاهیم کلیدی در همه‌گیری است که برای درک توانایی یک بیماری در حال انتشار در جمعیت به کار می‌رود. این عدد نشان می‌دهد که به‌طور متوسط هر فرد مبتلا به بیماری، چند نفر دیگر از جمعیت حساس را به بیماری مبتلا می‌کند. اگر  $\mathcal{R}_0 < 1$  آن‌گاه بیماری رو به افول رفته و همه‌گیری پایان می‌پذیرد و چنانچه  $\mathcal{R}_0 > 1$  آن‌گاه بیماری در میان جمعیت باقی مانده و به اصطلاح بومی می‌شود. در بخش چهارم و پنجم وضعیت پایداری موضعی و سراسری نقاط تعادل را بررسی کرده و در بخش‌های ششم و هفتم به بررسی انشعابات دستگاه می‌پردازیم. در بخش آخر نیز شاخصی جهت تعبیر حساسیت بیماری نسبت به هر یک از پارامترهای ظاهرشده در دستگاه ارائه خواهیم کرد.

<sup>2</sup>Kermack

<sup>3</sup>McKendrick

## ۲ مدل بیماری

در این بخش یک مدل  $SIR$  برای بررسی هرچه بهتر یک بیماری ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم  $N(t)$  اندازه‌ی کل جمعیت باشد. بنابراین داریم  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . از آنجایی که شیوع یک بیماری واگیردار به‌طور مستقیم به برخورد طبقه‌ی  $I$  با  $S$  مربوط است، بنابراین منطقی است که یک نرخ شیوعی ارائه کنیم که تاثیر واقعی‌تری از برخورد این دو طبقه را نشان دهد. آنچه که برای ما اهمیت دارد، در نظر گرفتن این نکته است که اگر تعداد بیماران از حدی تجاوز کند، آن‌گاه نرخ شیوع حاصل از برخورد نزولی خواهد شد. به منظور مرتبط ساختن این موارد، تابع  $g(x)$  را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(0) = 1 \quad (۱)$$

$$g'(x) > 0 \text{ اگر } x > 0 \text{ آن‌گاه} \quad (۲)$$

$$\text{عدد } 0 < \sigma < \sigma \text{ به اندازه‌ی کافی کوچک موجود باشد که اگر } 0 < x < \sigma \text{، آن‌گاه } \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{g(x)} \right) > 0 \text{ و اگر } \sigma < x \text{، آن‌گاه} \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{g(x)} \right) < 0$$

اکنون نرخ ابتلا را به‌صورت

$$\frac{I/N}{g(I/N)}$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌بینیم که شرط (۳) خواسته‌ی ما را در مورد روند شیوع بیماری برآورده می‌کند. به‌علاوه فرض می‌کنیم که واکسیناسیون معادل با گذراندن بیماری است و افراد واکسینه‌شده را به‌عنوان افراد بهبودیافته از بیماری در نظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر کسانی که واکسینه می‌شوند، کاملاً از خطر بیماری ایمن هستند (تاثیر صددرصدی واکسیناسیون). حال اگر افراد جامعه به نسبت  $p$  واکسینه شوند، آن‌گاه به نسبت  $1 - p$  مستعد بیماری خواهند بود. با این توضیحات، مدل محافظه‌ای

$$\begin{cases} S' = (1 - p)\lambda N - \frac{\beta IS}{Ng(I/N)} - \mu S \\ I' = \frac{\beta IS}{Ng(I/N)} - (\alpha + \mu)I \\ R' = p\lambda N + \alpha I - \mu R \end{cases} \quad (۱.۲)$$

را ارائه می‌کنیم. روندنمای این مدل در شکل ۱ نمایش داده شده است. با معرفی متغیرهای جدید

$$x = \frac{S}{N}, \quad y = \frac{I}{N}, \quad z = \frac{R}{N},$$

دستگاه (۱.۲) را به‌صورت

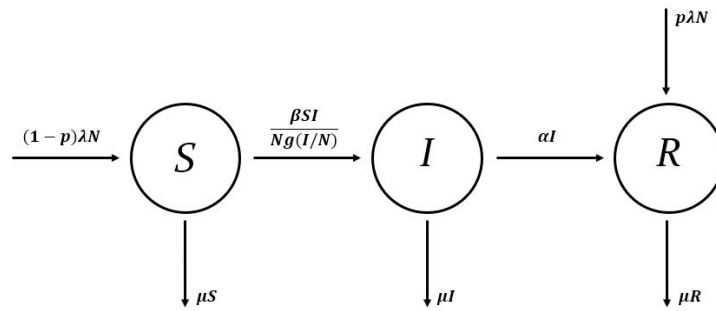
$$\begin{cases} x' = (1 - p)\lambda - \frac{\beta xy}{g(y)} - \lambda x \\ y' = \frac{\beta xy}{g(y)} - (\lambda + \alpha)y \\ z' = p\lambda + \alpha y - \lambda z \end{cases} \quad (۲.۲)$$

بازنویسی می‌کنیم. بررسی دستگاه (۲.۲) به‌نوعی پیش‌بینی تاثیر واکسیناسیون در جامعه‌ی هدف خواهد بود.

## ۳ نقاط تعادل و عدد بازتولید پایه

با توجه به این که در معادله‌ی اول و دوم دستگاه (۲.۲)، متغیر  $z$  ظاهر نشده است و با استناد به تساوی  $z = 1 - x - y$  می‌توانیم به‌جای (۲.۲)، دستگاه دویبعدی

$$\begin{cases} x' = (1 - p)\lambda - \frac{\beta xy}{g(y)} - \lambda x \\ y' = \frac{\beta xy}{g(y)} - (\lambda + \alpha)y \end{cases} \quad (۱.۳)$$



شکل ۱: روندنمای مدل  $SIR$

را در نظر بگیریم. این دستگاه یک نقطه تعادل عاری از بیماری در  $E_0 = (\lambda - p, 0)$  دارد. نقطه تعادل عاری از بیماری، نقطه‌ای است که در آن هیچ فرد مبتلایی در جامعه وجود ندارد. این نقطه بیان‌گر وضعیتی است که بیماری از جمعیت ریشه‌کن شده و تعداد افراد مبتلا به صفر رسیده است. توجه به  $E_0$  نشان می‌دهد که در صورت واکسیناسیون تمامی افراد جامعه که معادل  $p = 1$  است، مولفه‌ی  $x$  نقطه‌ی  $E_0$  برابر با صفر خواهد شد و در نتیجه  $S = 0$  و  $R = N$ ، که نشان‌دهنده‌ی مصونیت کامل جامعه از بیماری یا همان پایان همه‌گیری است. متناظر با این نقطه تعادل می‌توان عدد بازتولید پایه را با استفاده از روش نسل بعد [۶] به‌دست آورد. با قرار دادن

$$f(x, y) = \frac{\beta xy}{g(y)}, \quad v(x, y) = (\lambda + \alpha)y,$$

می‌توان  $y'$  را به صورت  $y' = f(x, y) - v(x, y)$  بازنویسی کرد. در این صورت

$$F = \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda - p, 0) \right] = \beta(\lambda - p)$$

و همچنین

$$V = \left[ \frac{\partial v}{\partial y}(\lambda - p, 0) \right] = \lambda + \alpha.$$

در نتیجه، عدد بازتولید پایه که همان شعاع طیفی  $FV^{-1}$  است برابر است با

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(\lambda - p)}{\lambda + \alpha}.$$

دستگاه (۱.۳) یک نقطه تعادل دیگر نیز دارد که نقطه تعادل بومی نامیده می‌شود. برای یافتن این نقطه تعادل، باید دستگاه

$$\begin{cases} (\lambda - p)\lambda - \frac{\beta xy}{g(y)} - \lambda x = 0 \\ \frac{\beta xy}{g(y)} - (\lambda + \alpha)y = 0 \end{cases}$$

را حل کنیم. چون در این مورد  $y \neq 0$ ، از معادله‌ی دوم داریم  $x = (\lambda + \alpha)g(y)/\beta$  که با جای‌گذاری در معادله‌ی اول نتیجه می‌شود که

$$(\lambda - p)\lambda - (\lambda + \alpha)y - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)g(y)}{\beta} = 0.$$

حال قرار می‌دهیم

$$G(y) = (\lambda - p)\lambda - (\lambda + \alpha)y - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)g(y)}{\beta}. \quad (2.3)$$

در این صورت

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = -\infty.$$

از طرفی

$$G(\circ) = (1-p)\lambda - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\beta} = \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\beta}(\mathcal{R}_\circ - 1)$$

و چون برای  $y > \circ$  داریم  $g'(y) > \circ$  پس

$$G'(y) = -(\lambda + \alpha) - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\beta}g'(y) < \circ.$$

بنابراین اگر  $\mathcal{R}_\circ > 1$  آن‌گاه  $G(\circ) > \circ$  که در این صورت  $G(y)$  یک ریشه‌ی یکتای  $y^*$  خواهد داشت که از آن نقطه تعادل بومی  $E_1 = (x^*, y^*)$  حاصل می‌شود. خاطر نشان شود که اگر  $\mathcal{R}_\circ \leq 1$  آن‌گاه  $G(\circ) < \circ$  و با توجه به یکنوایی اکید  $G(y)$ ، طبق قضیه‌ی بولتزانو تابع  $G(y)$  هیچ ریشه‌ای نخواهد داشت.

آنچه تاکنون در مورد دستگاه (۱.۳) گفته شد را در قضیه‌ی زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. دستگاه (۱.۳) را در نظر بگیرید.

الف) اگر  $\mathcal{R}_\circ \leq 1$  آن‌گاه دستگاه یک نقطه تعادل یکتای عاری از بیماری دارد.

ب) اگر  $\mathcal{R}_\circ > 1$  آن‌گاه دستگاه علاوه بر نقطه تعادل عاری از بیماری، یک نقطه تعادل بومی نیز دارد.

این‌که عدد بازتولید  $R_0$  برای مقادیر کمتر و بیشتر از ۱ نتایج متفاوتی برای آینده‌ی بیماری رقم می‌زند چنین تفسیر می‌شود که اگر فرد مبتلا بتواند حداقل یک فرد دیگر را به بیماری مبتلا سازد، این بیماری در جامعه باقی خواهد ماند و در غیر این صورت بیماری از بین خواهد رفت. برای تفسیر  $\mathcal{R}_0$  از منظر همه‌گیرشناسی در بخش ۱.۲.۲ از [۶] نشان داده شده است که اگر  $\rho$  آهنگ خروج از یک طبقه باشد، آن‌گاه  $\frac{1}{\rho}$  میانگین زمان ماندن در آن طبقه است. در دستگاه (۱.۳)، چون  $\lambda + \alpha$  نرخ خروج از طبقه‌ی عفونی  $y$  است، پس میانگین زمان ماندن در این طبقه برای هر شخص برابر با  $\frac{1}{\lambda + \alpha}$  خواهد بود. از طرفی، هر شخص با احتمال  $1-p$  مستعد بیماری است و با نرخ  $\beta$  به بیماری آلوده می‌شود. در نتیجه، یک شخص عفونی می‌تواند در طول زمانی که خودش آلوده است، فرد مستعدی را با نرخ  $\frac{\beta(1-p)}{\lambda + \alpha}$  به بیماری مبتلا سازد که این نرخ، همان  $\mathcal{R}_0$  است. توجه شود که هرچه تعداد بیشتری از افراد جامعه واکسینه شوند، مقدار  $\mathcal{R}_0$  کمتر خواهد شد که نشان‌دهنده‌ی کاهش قابلیت سرایت بیماری است.

## ۴ پایداری موضعی نقاط تعادل

در بخش قبل، وجود نقطه تعادل عاری از بیماری و نقطه تعادل بومی برای دستگاه (۱.۳) را اثبات کردیم. در این بخش، وضعیت پایداری موضعی این نقاط را بررسی می‌کنیم.

### ۱.۴ پایداری موضعی نقطه تعادل عاری از بیماری $E_0$

برای تحلیل پایداری نقطه تعادل عاری از بیماری در دستگاه (۱.۳)، یکی از روش‌های مهم، خطی‌سازی دستگاه حول این نقطه و استفاده از قضیه‌ی هارتمن-گروبن<sup>۴</sup> است. این قضیه بیان می‌کند که رفتار یک دستگاه غیرخطی در نزدیکی یک نقطه تعادل هذلولوی (نقطه تعادلی که ماتریس ژاکوبی محاسبه‌شده در آن نقطه، هیچ مقدار ویژه‌ای با قسمت حقیقی صفر ندارد) می‌تواند توسط دستگاه خطی‌شده در همان نقطه تقریب زده شود. ماتریس ژاکوبی دستگاه در نقطه تعادل  $E_0 = (1-p, \circ)$  برابر است با

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\beta(1-p) \\ \circ & \beta(1-p) - (\lambda + \alpha) \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبی عبارتند از  $-\lambda$  و  $\beta(1-p) - (\lambda + \alpha)$ ، که اولی منفی است و در مورد دومی داریم

$$\beta(1-p) - (\lambda + \alpha) = (\lambda + \alpha) \left( \frac{\beta(1-p)}{\lambda + \alpha} - 1 \right) = (\lambda + \alpha)(\mathcal{R}_\circ - 1).$$

<sup>4</sup>Hartman-Grobman

بنابراین اگر  $\mathcal{R}_0 < 1$  آن گاه هر دو مقدار ویژه منفی اند و در نتیجه، بنابر قضیه‌ی هارتمن-گرابمن، نقطه تعادل عاری از بیماری  $E_0$  پایدار مجانبی موضعی است. اگر  $\mathcal{R}_0 > 1$  آن گاه  $E_0$  یک نقطه‌ی زینی و در نتیجه ناپایدار خواهد بود. در  $\mathcal{R}_0 = 1$  این نقطه تعادل غیرهذلولوی است که با توجه به تغییر وضعیت پایداری آن، می‌توان انتظار وقوع یک انشعاب موضعی را داشت. در بخش ۶ به بررسی این مورد خواهیم پرداخت.

## ۲.۴ پایداری موضعی نقطه تعادل بومی $E_1$

ماتریس ژاکوبی دستگاه (۱.۳) در نقطه تعادل  $E_1 = (x^*, y^*)$  به صورت

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta y^*}{g(y^*)} - \lambda & -\beta x^* \frac{(g(y^*) - y^* g'(y^*))}{(g(y^*))^2} \\ \frac{\beta y^*}{g(y^*)} & \beta x^* \frac{g(y^*) - y^* g'(y^*)}{(g(y^*))^2} - (\lambda + \alpha) \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای مشخصه‌ی این ماتریس عبارت است از  $p(t) = t^2 + a_1 t + a_2$  که در آن

$$a_1 = -tr J_{E_1} = \lambda + \frac{\beta y^*}{g(y^*)} - \beta x^* \frac{g(y^*) - y^* g'(y^*)}{(g(y^*))^2} + (\lambda + \alpha),$$

$$a_2 = \det J_{E_1} = \frac{\beta y^* (\lambda + \alpha)}{g(y^*)} - \lambda \beta x^* \frac{g(y^*) - y^* g'(y^*)}{(g(y^*))^2} + \lambda (\lambda + \alpha).$$

طبق محک روث-هورویتز<sup>۵</sup> قسمت حقیقی هر دو ریشه‌ی  $p(t)$  منفی است اگر و تنها اگر  $a_1$  و  $a_2$  هر دو مثبت باشند. با توجه به این که  $E_1$  نقطه تعادل دستگاه (۱.۳) است، از معادله‌ی دوم این دستگاه نتیجه می‌شود که

$$\frac{\beta x^* y^*}{g(y^*)} - (\lambda + \alpha) y^* = 0.$$

پس  $\frac{\beta x^*}{g(y^*)} = \lambda + \alpha$  و در نتیجه،

$$a_1 = \lambda + \frac{\beta y^*}{g(y^*)} - \frac{\beta x^*}{g(y^*)} + \frac{\beta x^* y^* g'(y^*)}{g^2(y^*)} + (\lambda + \alpha) = \lambda + \frac{\beta y^*}{g(y^*)} + \frac{\beta x^* y^* g'(y^*)}{g^2(y^*)} > 0,$$

$$a_2 = \frac{\beta (\lambda + \alpha) y^*}{g(y^*)} - \frac{\beta \lambda x^*}{g(y^*)} + \frac{\beta \lambda x^* y^* g'(y^*)}{g^2(y^*)} + \lambda (\lambda + \alpha) = \frac{\beta (\lambda + \beta) y^*}{g(y^*)} + \frac{\beta \lambda x^* y^* g'(y^*)}{g^2(y^*)} > 0.$$

بنابراین، نقطه تعادل  $E_1$  پایدار مجانبی موضعی است، زیرا قسمت حقیقی هر دو مقدار ویژه در این نقطه منفی است.

## ۵ پایداری سراسری

برای بررسی پایداری سراسری نقاط تعادل، ابتدا نشان خواهیم داد که جواب‌های دستگاه (۱.۳) کران دارند و سپس با استفاده از نظریه پوانکاره-بندیکسون هدف خود را دنبال خواهیم کرد.

قضیه ۱.۵. ناحیه مثبت صفحه، یعنی مجموعه‌ی  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  تحت شار دستگاه (۱.۳) پایای مثبت است، و در این ناحیه، جواب‌های دستگاه کران دارند.

<sup>5</sup>Routh-Hurwitz

اثبات. برای اثبات قسمت اول قضیه، کافی است نشان دهیم در مرز این ناحیه جهت جریان یا جهت میدان برداری به سمت داخل و یا مماس است. در مرز  $x = 0$  داریم  $x' = \lambda(1-p) > 0$  که نشان می‌دهد جهت میدان برداری به سمت داخل ناحیه  $A$  است، و در مرز  $y = 0$  داریم  $y' = 0$  که نشان می‌دهد جهت میدان برداری در این مرز نه به سمت داخل ناحیه  $A$  و نه به سمت بیرون است، بلکه مماس است. برای اثبات کران‌داری جواب‌های دستگاه در ناحیه  $A$ ، کافی است نشان دهیم تابع  $n(t) := x(t) + y(t)$  کران‌دار است. چون

$$n'(t) = x'(t) + y'(t) = \lambda(1-p) - \lambda n(t) - \alpha y(t) \leq \lambda(1-p) - \lambda n(t),$$

پس

$$n(t) \leq n_0 e^{-\lambda t} + (1-p)(1 - e^{-\lambda t}) \leq n_0 + (1-p).$$

□

قضیه ۲.۵. دستگاه (۱.۳) در ربع اول صفحه مدار تناوبی ندارد.

اثبات. با به‌کارگیری محک دولاک<sup>۶</sup> نشان می‌دهیم که دستگاه (۱.۳) در ناحیه‌ی مثبت صفحه، مدار تناوبی ندارد. برای استفاده از محک دولاک، تابع  $B(x, y) = \frac{g(y)}{xy}$  را به‌عنوان تابع دولاک انتخاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن دستگاه (۱.۳) به‌شکل میدان برداری

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$Bf_1 = \frac{\lambda(1-p)g(y)}{xy} - \frac{\lambda g(y)}{y} - \beta, \quad Bf_2 = \beta - \frac{(\lambda + \alpha)g(y)}{x}.$$

در نتیجه،

$$\operatorname{div}(Bf) = \frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial y} = -\frac{\lambda(1-p)yg(y)}{x^2 y^2} - \frac{(\lambda + \alpha)g'(y)}{x} < 0.$$

اکنون چون دیورژانس میدان برداری  $Bf$  در ربع اول صفحه  $xy$  تغییر علامت نمی‌دهد و علامت ثابتی دارد، از قضیه‌ی گرین در صفحه نتیجه خواهد شد که این دستگاه در ربع اول مدار تناوبی نخواهد داشت. □

قضیه ۳.۵. اگر  $X(t) = (x(t), y(t))$  جواب دستگاه (۱.۳) در ناحیه‌ی  $A$  باشد، آن‌گاه  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$  موجود است و مقدار این حد برابر با  $(x^*, y^*)$  است.

اثبات. فرض کنیم  $N > 1-p$ . قرار می‌دهیم  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq N, 0 \leq y \leq N-x\}$ . در این صورت  $M$  یک مجموعه‌ی فشرده و تحت شار دستگاه (۱.۳) به‌طور مثبت پایا است، زیرا در طول خط  $x+y=N$  داریم:

$$x' + y' = \lambda(1-p) - \lambda(x+y) - \alpha y = \lambda(1-p) - \lambda N - \alpha y \leq \lambda(1-p-N) < 0.$$

حال اگر  $(x_0, y_0) \in M$  به‌طوری که  $y_0 > 0$ ، آن‌گاه از قضیه‌ی پوانکاره-بندیکسون و قضیه‌ی ۲.۵ نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی  $\omega(x_0, y_0)$  حدی نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$ ، که با  $\omega(x_0, y_0)$  نشان داده می‌شود، یک نقطه تعادل است. به‌ویژه، در حالت  $y_0 = 0$  داریم  $\omega(x_0, 0) = \{E_0\}$ . همان‌طور که دیدیم دستگاه (۱.۳) می‌تواند حداکثر دو نقطه تعادل در  $E_0$  و  $E_1$  داشته باشد. بنابراین دو حالت وجود دارد.

• اگر  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ، آن‌گاه نقطه تعادل  $E_1$  وجود ندارد. پس در این حالت،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = E_0,$$

و این یعنی نقطه تعادل  $E_0$  پایدار مجانبی سراسری است.

• اگر  $\mathcal{R}_0 > 1$ ، آن‌گاه ثابت شد نقطه تعادل  $E_1$  زین و ناپایدار است. بنابراین،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = E_1,$$

و این یعنی نقطه تعادل  $E_1$  پایدار مجانبی سراسری است.

□

<sup>۶</sup>Dulac's Criterion

## ۶ انشعاب تبادلی پایداری

همان‌گونه که در بخش ۴ دیدیم، وضعیت پایداری نقطه تعادل  $E_0$  با گذر  $\mathcal{R}_0$  از ۱ تغییر می‌کند و برای  $\mathcal{R}_0 > 1$  یک نقطه تعادل دیگر نیز به دستگاه (۱.۳) اضافه می‌شود. از آن جایی که  $E_0$  به‌ازای  $\mathcal{R}_0 = 1$  یک نقطه تعادل غیرهذلولوی است، پیش‌بینی می‌شود که دستگاه (۱.۳) در  $\mathcal{R}_0 = 1$  تحت یک انشعاب قرار گیرد. با استفاده از قضیه‌ی سوتومايور<sup>۷</sup> نشان می‌دهیم که یک انشعاب تبادلی پایداری رخ می‌دهد.

قضیه ۱.۶. (قضیه‌ی سوتومايور [۷]) گیریم  $X \in \mathbb{R}^n$  و  $\mu \in \mathbb{R}$ . فرض کنیم برای دستگاه  $X' = f(X, \mu)$  داشته باشیم  $f(X_0, \mu_0) = 0$  و ماتریس ژاکوبی  $A = Df(X_0, \mu_0)$  یک مقدار ویژه‌ی صفر ساده داشته باشد. اگر  $V_L$  و  $V_R$  به‌ترتیب بردارهای ویژه‌ی راست و چپ متناظر با مقدار ویژه‌ی صفر ماتریس  $A$  باشند، آن‌گاه دستگاه  $X' = f(X, \mu)$  در نقطه‌ی  $(X_0, \mu_0)$  تحت انشعاب تبادلی پایداری قرار می‌گیرد هرگاه

$$1. \quad V_L f_\mu(X_0, \mu_0) = 0.$$

$$2. \quad V_L Df_\mu(X_0, \mu_0) V_R \neq 0.$$

$$3. \quad V_L D^2 f(X_0, \mu_0)(V_R, V_R) \neq 0.$$

حال توجه شود که  $\mathcal{R}_0 = 1$  معادل با  $\beta_0 = \frac{\lambda + \alpha}{1 - p}$  است. بنابراین  $\beta$  را پارامتر انشعاب دستگاه در نظر می‌گیریم. ماتریس ژاکوبی دستگاه در نقطه‌ی  $E_0$  و در مقدار پارامتر  $\beta_0$  عبارت است از

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\lambda & -(\lambda + \alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بردارهای ویژه‌ی چپ و راست متناظر با مقدار ویژه‌ی صفر ماتریس  $J_0$  عبارتند از

$$V_R = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \\ \lambda + \alpha \end{bmatrix}, \quad V_L = [0 \quad 1].$$

با بازنویسی دستگاه (۱.۳) به‌شکل  $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y, \beta)$ ، موارد اشاره‌شده در قضیه‌ی ۱.۶ را بررسی می‌کنیم. توجه شود که

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, y, \beta) = f_\beta(x, y, \beta) = \begin{bmatrix} -\frac{xy}{g(y)} \\ \frac{xy}{g(y)} \end{bmatrix}.$$

پس

$$f_\beta(1 - p, 0, \beta_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه  $V_L f_\beta(1 - p, 0, \beta_0) = 0$ . بنابراین شرط اول قضیه‌ی ۱.۶ برقرار است. برای بررسی شرط دوم توجه شود که

$$Df_\beta(x, y, \beta) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{g(y)} & -x \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} \\ \frac{y}{g(y)} & x \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} \end{bmatrix}.$$

پس

$$Df_\beta(1 - p, 0, \beta_0) = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - p) \\ 0 & 1 - p \end{bmatrix}.$$

<sup>7</sup>Sotomayor



بنابراین،

$$V_L Df_\beta(1-p, \circ, \beta_\circ) V_R = -\frac{\lambda(1-p)}{\lambda+\alpha} \neq \circ.$$

پس شرط دوم نیز برقرار است. برای بررسی شرط سوم قضیه ۱.۶ توجه شود که

$$Df(x, y, \beta) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta y}{g(y)} - \lambda & -\beta x \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} \\ \frac{\beta y}{g(y)} & \beta x \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} - (\lambda + \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Df_1 \\ Df_2 \end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$D(Df_1)^T(x, y, \beta) = \begin{bmatrix} \circ & -\beta \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} \\ -\beta \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} & \beta x \frac{yg(y)g''(y) + 2g(y)g'(y) - 2y(g'(y))^2}{(g(y))^3} \end{bmatrix},$$

$$D(Df_2)^T(x, y, \beta) = \begin{bmatrix} \circ & \beta \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} \\ \beta \frac{g(y) - yg'(y)}{(g(y))^2} & -\beta x \frac{yg(y)g''(y) + 2g(y)g'(y) - 2y(g'(y))^2}{(g(y))^3} \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$D(Df_1)^T(1-p, \circ, \beta_\circ) = \begin{bmatrix} \circ & -\frac{\lambda+\alpha}{1-p} \\ -\frac{\lambda+\alpha}{1-p} & 2(\lambda+\alpha)g'(\circ) \end{bmatrix},$$

$$D(Df_2)^T(1-p, \circ, \beta_\circ) = \begin{bmatrix} \circ & \frac{\lambda+\alpha}{1-p} \\ \frac{\lambda+\alpha}{1-p} & -2(\lambda+\alpha)g'(\circ) \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم  $\{e_1 = (1, \circ)^T, e_2 = (\circ, 1)^T\}$  پایه‌ی استاندارد  $\mathbb{R}^2$  باشد. در این صورت

$$D^\vee f(1-p, \circ, \beta_\circ)(V_R, V_R) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= V_R^T D^\vee f_1(1-p, \circ, \beta_\circ) V_R = \left[ 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \right] \begin{bmatrix} \circ & -\frac{\lambda+\alpha}{1-p} \\ -\frac{\lambda+\alpha}{1-p} & 2(\lambda+\alpha)g'(\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2\lambda}{1-p} + \frac{2\lambda^2}{\lambda+\alpha} g'(\circ) > \circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= V_R^T D^\vee f_2(1-p, \circ, \beta_\circ) V_R = \left[ 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \right] \begin{bmatrix} \circ & \frac{\lambda+\alpha}{1-p} \\ \frac{\lambda+\alpha}{1-p} & -2(\lambda+\alpha)g'(\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{2\lambda}{1-p} - \frac{2\lambda^2}{\lambda+\alpha} g'(\circ) < \circ. \end{aligned}$$

پارامتر	$p$	$\lambda$	$\beta$	$\alpha$
مقدار	۰/۹	۰/۳	۰/۸	۰/۲

جدول ۱: پارامترهای استفاده شده جهت بررسی دستگاه (۱.۳)

پس

$$V_L D^{\lambda} f(V_R, V_R) = \alpha \neq 0.$$

بنابراین شرط سوم قضیه ۱.۶ برقرار است و در نتیجه، دستگاه (۱.۳) در  $\beta = \beta_0$  تحت یک انشعاب تبادل پایداری قرار می‌گیرد.

## ۷ شاخص حساسیت $\mathcal{R}_0$

شاخص حساسیت برای ارزیابی حساسیت خروجی‌های یک مدل نسبت به تغییرات ورودی‌ها یا پارامترهای آن مدل استفاده می‌شود. شاخص حساسیت در حقیقت به‌عنوان معیاری برای اندازه‌گیری تغییرات نسبی در نتایج مدل نسبت به تغییرات نسبی در پارامترهای مدل تعریف می‌شود. این شاخص به ما کمک می‌کند تا بفهمیم کدام ورودی‌ها یا پارامترها تأثیر بیشتری بر خروجی‌ها دارند و به این ترتیب بتوانیم مدل را بهبود دهیم یا آن را بهتر درک کنیم. شاخص حساسیت در مدل‌های همه‌گیری ابزار مهمی برای تحلیل تأثیر پارامترهای مختلف بر شیوع بیماری است و با استفاده از آن می‌توان پارامترهایی که بیش‌ترین تأثیر را بر شیوع بیماری دارند شناسایی کرد. این پارامترها می‌توانند اهداف مناسبی برای مداخلات بهداشتی باشند. همچنین، شاخص حساسیت به تصمیم‌گیران کمک می‌کند تا منابع بهداشتی را به‌نحوی تخصیص دهند که بیش‌ترین تأثیر را بر کاهش شیوع بیماری داشته باشند؛ یعنی با تغییر پارامترها و مشاهده تأثیرات آن‌ها بر روی نتایج مدل، می‌توان مؤثرترین استراتژی‌های کنترلی را شناسایی و یا طراحی کرد. یادآوری می‌شود که عدد بازتولید پایه می‌تواند معیاری برای شدت و ضعف همه‌گیری باشد. در این بخش، برای نشان دادن میزان تأثیر هر پارامتر در کنترل و یا گسترش بیماری، شاخص حساسیت عدد بازتولید پایه را به‌ازای هر پارامتر به‌دست می‌آوریم که این شاخص برای یافتن پارامتری که بیش‌ترین تأثیر را بر شیوع بیماری دارد استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۷. شاخص حساسیت نرمال شده  $\mathcal{R}_0$  نسبت به پارامتر  $\delta$  عبارت است از

$$C_{\delta}^{\mathcal{R}_0} := \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \delta} \times \frac{\delta}{\mathcal{R}_0}.$$

از فرمول اخیر واضح است که شاخص حساسیت نسبت به هر پارامتر نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی مستقیم تغییرات پارامتر با شیوع بیماری است. به‌عنوان نمونه، شاخص حساسیت  $\mathcal{R}_0$  نسبت به  $p$  که همان پارامتر واکسن است به‌صورت

$$C_p^{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} \times \frac{p}{\mathcal{R}_0} = \frac{-\beta}{\lambda + \alpha} \times \frac{p(\lambda + \alpha)}{\beta(1-p)} = \frac{-p}{1-p} < 0.$$

است که مستقل از هر داده‌ی اولیه، منفی است. بنابراین، همان‌طور که انتظار داریم، با افزایش واکسیناسیون شاهد کاهش عدد بازتولید پایه هستیم که در نهایت منجر به پایان همه‌گیری خواهد شد. همچنین، شاخص حساسیت  $\mathcal{R}_0$  نسبت به پارامتر  $\beta$  که نرخ شیوع بیماری است عبارت است از

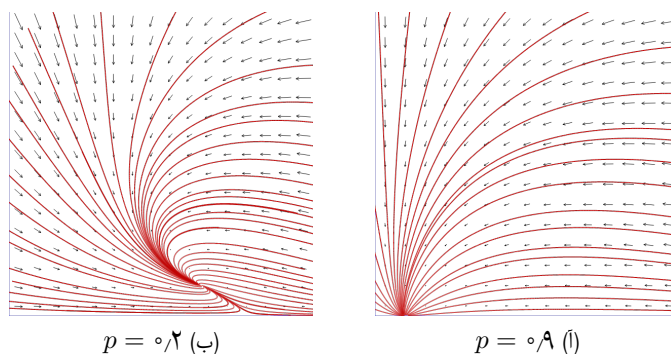
$$C_{\beta}^{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} = \frac{1-p}{\lambda + \alpha} \times \frac{\lambda + \alpha}{1-p} = 1 > 0,$$

که در این مورد نیز می‌بینیم فارغ از هر داده‌ای نرخ انتقال بیماری رابطه‌ی مستقیم با شیوع همه‌گیری دارد. مقایسه‌ی اندازه‌ی شاخص‌ها، میزان تأثیرگذاری هر پارامتر در کنترل همه‌گیری را نسبت به پارامترهای دیگر مشخص می‌سازد.

## ۸ شبیه‌سازی عددی

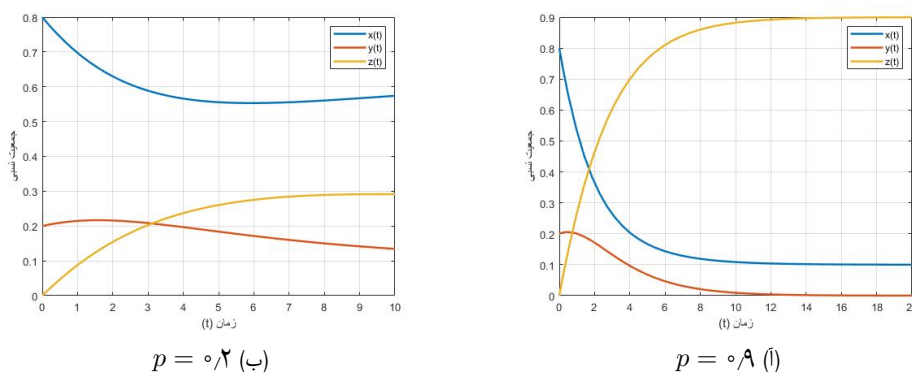
برای بررسی نتایج به‌دست آمده در بخش‌های قبل، دستگاه (۱.۳) را با فرض  $g(t) = 1 + t^2$  و داده‌های جدول ۱ در نظر می‌گیریم. در این حالت داریم  $\mathcal{R}_0 = 0/16$  که چون مقداری کمتر از یک است، طبق انتظار، دستگاه (۱.۳) تنها یک نقطه تعادل عاری از بیماری در  $E_0 = (0/1, 0)$  دارد که پایدار مجانبی سراسری است (شکل ۲ (الف)).

اکنون دستگاه (۱.۳) را با همان داده‌های جدول ۱ و تنها با تغییر  $p$  به  $p = ۰.۲$  بررسی می‌کنیم. در این حالت داریم  $\mathcal{R}_0 = ۱.۲۸$  که چون مقداری بزرگتر از یک است، طبق انتظار، دستگاه دو نقطه تعادل در  $E_0 = (۰.۸, ۰)$  و  $E_1 = (۰.۶۳۱۳۹۶۱۳۴۴, ۰.۱۰۱۱۶۲۳۱۹۴)$  دارد که  $E_0$  نقطه تعادل عاری از بیماری و  $E_1$  نقطه تعادل بومی است. در این حالت  $E_1$  پایدار مجانبی سراسری و  $E_0$  ناپایدار است (شکل ۲ (ب)).



شکل ۲: نمای فاز دستگاه (۱.۳)

شکل ۳ تغییرات هر یک از طبقه‌های  $x(t)$ ,  $y(t)$  و  $z(t)$  که همان جمعیت نسبی طبقه‌ی مستعد، عفونی و بهبودیافته هستند را با شرایط اولیه‌ی  $(x_0, y_0, z_0) = (۰.۸, ۰.۲, ۰)$  نشان می‌دهد.



شکل ۳: نمودار تغییرات جواب‌های دستگاه (۲.۲)

## ۹ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل  $SIR$  با نرخ ابتلای غیرخطی کلی با فرض تاثیر صددرصدی واکسن ارائه دادیم. دیدیم که دستگاه مربوطه یک نقطه تعادل عاری از بیماری  $E_0$  و یک نقطه تعادل بومی  $E_1$  دارد. متناظر با  $E_0$  عدد بازتولید پایه  $\mathcal{R}_0$  را به دست آوردیم که مشخص شد برای  $\mathcal{R}_0 \leq ۱$  نقطه تعادل  $E_1$  وجود نخواهد داشت. نقطه تعادل  $E_0$  به ازای  $\mathcal{R}_0 < ۱$  پایدار سراسری و برای  $\mathcal{R}_0 > ۱$  ناپایدار است و نقطه تعادل  $E_1$  در صورت وجود، پایدار خواهد بود. دستگاه در  $\mathcal{R}_0 = ۱$  تحت یک انشعاب تبادل پایداری قرار می‌گیرد. همچنین، با محاسبه‌ی شاخص حساسیت  $\mathcal{R}_0$  تاثیر پارامترهای مربوط به واکسن و انتقال بیماری بررسی شد. در بخش آخر نیز نتایج به دست آمده در قالب مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت.

## فهرست منابع

- [1] Karaji, P. T., Nyamoradi, N. and Ahmad, B. (2023). Stability and bifurcations of an SIR model with a nonlinear incidence rate. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(9), 10850-10866. doi: 10.1002/mma.9155
- [2] Khan, T., Ullah, R. and Zaman, G. (2023). Hepatitis B virus transmission via epidemic model. In *Advances in Epidemiological Modeling and Control of Viruses* (pp. 29-54). doi: 10.1016/B978-0-32-399557-3.00007-7
- [3] Li, J., Teng, Z., Wang, G., Zhang, L. and Hu, C. (2017). Stability and bifurcation analysis of an SIR epidemic model with logistic growth and saturated treatment. *Chaos, Solitons and Fractals*, 99, 63-71. doi:10.1016/j.chaos.2017.03.047
- [4] Liu, W. M., Levin, S. A. and Iwasa, Y. (1986). Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. *Journal of Mathematical Biology*, 23, 187-204. doi:10.1007/BF00276956
- [5] Lotfi, E. M., Maziane, M., Hattaf, K. and Yousfi, N. (2014). Partial differential equations of an epidemic model with spatial diffusion. *International Journal of Partial Differential Equations*, 2014(1), 186437. doi: 10.1155/2014/186437
- [6] Martcheva, M., (2015). *An introduction to mathematical epidemiology* (Vol. 61). doi: 10.1007/978-1-4899-7612-3.
- [7] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems* (Vol. 7). Springer Science and Business Media. doi: 10.1007/978-1-4612-0340-0
- [8] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115 (772), 700-721. doi: 10.1098/rspa.1927.0118
- [9] Zhang, F., Cui, W., Dai, Y. and Zhao, Y. (2022). Bifurcations of an SIRS epidemic model with a general saturated incidence rate. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19(11), 10710-10730. doi: 10.3934/mbe.2022501



## Analysis of an *SIR* Model with Nonlinear Incidence Rate and the Full Impact of Vaccination

Mohammad Ali Shakeri and Rasool Kazemi <sup>8</sup>

Department of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran

Communicated by: Mohammad Hadi Farahi

Received: 14 July 2024

Accepted: 9 September 2024

**Abstract:** In this article, we present an *SIR* model with a general nonlinear incidence rate, assuming a 100% effective vaccine. This system has a disease-free equilibrium point, corresponding to which a basic reproduction number  $\mathcal{R}_0$  is obtained. For  $\mathcal{R}_0 > 1$ , the system will also have an endemic equilibrium point. We study the local and global stability of these equilibrium points. Considering the change in the stability status of the equilibrium points with the change of one of the parameters, we will examine the existence of a transcritical bifurcation. Additionally, we calculate the sensitivity index of  $\mathcal{R}_0$ , which essentially determines the susceptibility of the system to the existing parameters. Finally, we examine the obtained results with numerical examples.

**Keywords:** SIR epidemic model, Nonlinear incidence rate, Basic reproduction number, Stability, Bifurcation.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>8</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (M. A. Shakeri) [shakeri.math@grad.kashanu.ac.ir](mailto:shakeri.math@grad.kashanu.ac.ir), (R. Kazemi) [r.kazemi@kashanu.ac.ir](mailto:r.kazemi@kashanu.ac.ir)