مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۱۰۹–۱۲۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2024.44760.2200

# کمینه‌سازی توابع هم‌رادیانتِ صعودی با روش شاخه و کران و کاربرد آن در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

محمدحسین دریایی (۱) [۱] و علیرضا ستارزاده (۲)

(۱) بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

دبیر مسئول: محمد جلوداری ممقانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۲۰

چکیده: الگوریتم شاخه و کران یک روش گسترده برای بهینه‌سازی سراسری است. این الگوریتم، مجموعه شدنی مساله بهینه‌سازی را از طریق یک روش شاخه‌سازی، افراز کرده و سپس با استفاده از یک روش کران‌یابی، برای هر عضوِ افراز یک کران بالا و یک کران پایین محاسبه می‌کند. سرانجام، روش شاخه و کران، کران‌های به‌دست‌آمده و مقادیر تابع هدف را با یکدیگر مقایسه کرده و اعضایی از افراز را که شامل یک نقطه بهین نیستند حذف می‌کند. در این مقاله، الگوریتم شاخه و کران برای بهینه‌سازی توابع هم‌رادیانتِ صعودی روی زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n_+$ که به‌صورت اشتراک یک نیم‌فضا با یک سادک هستند ارائه می‌شود (هدف از در نظرگرفتن چنین مجموعه‌های شدنی، بررسی مدلی از ریاضیات مالی، تحت عنوان مدل میانگین–انحراف معیار است). ما از مفهوم تحدب مجردِ توابع هم‌رادیانتِ صعودی برای کران‌یابی (پیداکردن کران‌های پایین) استفاده می‌کنیم. در انتها ، به‌عنوان کاربردی از این دسته از مساله‌های بهینه‌سازی، مدل میانگین–انحراف معیار برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را مطرح کرده و آن را با روش شاخه و کران حل می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم شاخه و کران، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، مدل میانگین–انحراف معیار، تحدب مجرد، توابع هم‌رادیانتِ صعودی.

رده‌بندی ریاضی: 90C26; 90C57; 91G10; 91G15

## ۱ مقدمه

یکی از نتایج اساسی آنالیز محدب کلاسیک بیان می‌کند که یک تابع، نیم‌پیوسته پایینی و محدب است اگر و فقط اگر به‌تواند به‌شکل سوپریمم دسته‌ای از توابع آفین (توابعی به‌شکل مجموع یک تابع خطی و یک عدد ثابت) نمایش داده شود [۱۳]. بنابراین، توابع آفین، بخشی اساسی از

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(M.H. Daryaei) daryaei@uk.ac.ir, (A.R. Sattarzadeh) a.sattarzadeh@kgut.ac.ir

آنالیز محدب کلاسیک را تشکیل می‌دهند. در تحدب مجرد، به جای توابع آفین، مجموعه‌ای از توابع خاص مانند $H$ استفاده می‌شود و توابعی که به‌صورت سوپریمم زیرمجموعه‌ای از $H$ نمایش داده می‌شوند، در این نظریه مورد مطالعه قرار می‌گیرند (چنین توابعی را محدب مجرد نسبت به $H$، یا $H-$محدب می‌نامند) [۱۴]. این نظریه کاربردهای زیادی در علوم مختلف از جمله اقتصاد دارد و امروزه محققین زیادی در این زمینه مشغول فعالیت هستند. توابع زیادی در این نظریه مورد بررسی قرار گرفته‌اند که به‌عنوان مثال، می‌توان به توابع همگن مثبتِ صعودی [۲، ۱۶] و توابع به‌طور شعاعی محدبِ صعودی [۸، ۱۱] اشاره کرد.

توابع هم‌رادیانتِ صعودی، دسته دیگری از توابع محدب مجرد هستند که در علوم مختلف کاربردهای زیادی دارند [۴–۶]. به‌عنوان مثال، توابع هم‌رادیانتِ صعودی و شبه‌مقعر برای حل مسائلی در اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۰]. برخی از مسائل بهینه‌سازی نیز می‌توانند با تبدیلات مناسب به مسائلی با تابع هدف هم‌رادیانتِ صعودی تبدیل شوند [۱۵].

یکی از روش‌های عددی مهم در بهینه‌سازی سراسری برای یافتن جواب بهین سراسری، روش شاخه و کران است [۱۸]. الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله

$$\min_{x\in X} f(x)$$

از دو بخش شاخه‌سازی و کران‌یابی تشکیل شده است. روی‌کرد شاخه‌سازی شامل افراز مجموعه شدنیِ $X$ به تعدادی مجموعه با ساختاری مشخص است. برای هر زیرمجموعه عضو افراز، کران بالا و پایینی برای تابع هدف $f$ روی آن زیرمجموعه محاسبه می‌شود. سپس با مقایسه کران‌های به‌دست‌آمده، آن اعضایی از افراز که شامل یک جواب بهین مساله نیستند حذف می‌شوند. با تکرار این روند، می‌توان مجموعه‌ای شدنی که شامل یک جواب بهین مساله است را کوچکتر کرد و در نتیجه، جواب‌های تقریبی مناسبی برای جواب بهین مساله پیدا کرد [۹، ۱۴].

مساله‌ای که در این مقاله بررسی می‌کنیم به‌صورت زیر است:

$$\min_{x\in S_a\cap X} f(x) \tag{۱.۱}$$

که $f:\mathbb{R}^n_+\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است، $S_a$ یک سادک به‌صورت

$$S_a:=\{x\in\mathbb{R}^n: x\geq ۰,\ \sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i}{a_i}=۱\}$$

است (که به‌ازای هر $n \leq i \leq ۱$، $a_i > ۰$) و $X$ یک نیم‌فضا در فضای $\mathbb{R}^n$ به‌صورت

$$X:=\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=۱}^{n} b_ix_i\geq b_۰\}$$

است (که به‌ازای هر $n \leq i \leq ۰$، $b_i\in\mathbb{R}$). در این مقاله فرض می‌کنیم که ناحیه شدنی مساله (۱.۱) ناتهی است، یعنی $S_a\cap X\neq\emptyset$. هدف ارائه الگوریتم شاخه و کران برای یافتن جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) است. برای شاخه‌سازی، روشی ساده برای افراز مجموعه شدنی ارائه کرده و برای هر عضو از افراز، کران پایین تابع هدف روی آن عضو را با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی به‌دست می‌آوریم. برای نوشتن این مساله برنامه‌ریزی خطی از ابزاری مهم در تحدب مجرد به نام زیردیفرانسیل استفاده می‌کنیم [۱۴].

یکی از بحث‌های مهم ریاضیات مالی و اقتصاد، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری است. به‌طور کلی هر انسانی علاقه دارد در دارایی‌هایی سرمایه‌گذاری کند که در مجموع، متحمل ریسک کمتر و بازدهی بیشتری شود. چنین تفکری باعث به‌وجود آمدن بحث بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری شده است [۱، ۳، ۱۷، ۱۹]. سنجه‌های متفاوتی برای محاسبه بازدهی و ریسک سبدهای سرمایه‌گذاری وجود دارد که ما از مفهوم میانگین برای محاسبه بازدهی و از مفهوم انحراف معیار برای سنجش ریسک استفاده می‌کنیم که به این مدل در ریاضیات مالی، مدل میانگین–انحراف معیار می‌گویند [۳]. در این مقاله، این مدل از بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را مطرح کرده و آن را با استفاده از روش شاخه و کران حل می‌کنیم. ساختار این مقاله به‌شکل زیر است: در بخش بعدی، به‌طور خلاصه، برخی از مفاهیم و نتایج اساسی درباره تحدب مجرد و توابع هم‌رادیانتِ صعودی را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله بهینه‌سازی (۱.۱) را ارائه کرده و همچنین همگرایی این الگوریتم را بررسی می‌کنیم. در بخش ۴، چند مثال عددی از مساله بهینه‌سازی (۱.۱) ارائه کرده و آنها را با روش شاخه و کران حل می‌کنیم. در این بخش همچنین مساله‌های مطرح‌شده را با دو روش ژنتیک و نقطه درونی (برای مقایسه روش شاخه و کران با این دو روش) حل می‌کنیم. در بخش ۵، مدل میانگین–انحراف معیار از مدل‌های مهم بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و نیز یک مدل چندهدفه از بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کرده و با الگوریتم شاخه و کران حل می‌کنیم.

## ۲ تعاریف و مقدمات

مجموعه $\mathbb{R}^n_+$ به‌عنوان مخروط تمام بردارهای $n-$بعدی با مؤلفه‌های نامنفی تعریف می‌شود. رابطه ترتیبِ روی $\mathbb{R}^n$ بر اساس این مخروط، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: برای هر $x=(x_۱,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و $y=(y_۱,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$، $x\leq y$ اگر و تنها اگر

$x_i \leq y_i$ به‌ازای هر $i = ۱, \dots, n$. تابع $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ را صعودی گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n_+$، $x \leq y$، نامساوی $f(x) \leq f(y)$ را ایجاب کند. تابع $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ را هم‌رادیانت گوئیم، هرگاه $f(\gamma x) \geq \gamma f(x)$ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$ و هر $\gamma \in (۰, ۱)$. به آسانی دیده می‌شود که $f$ تابعی هم‌رادیانت است اگر و تنها اگر $f(\gamma x) \leq \gamma f(x)$ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$ و هر $\gamma \geq ۱$. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است. بنابراین به‌ازای هر $\gamma \in (۰, ۱)$ داریم $f(۰) \geq \gamma f(۰)$. پس نتیجه می‌شود $f(۰) \geq ۰$. اما تابع $f$ صعودی است، پس به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$ نتیجه می‌شود $f(x) \geq ۰$. یعنی $f$ تابعی نامنفی است. در ادامه چند مثال از توابع هم‌رادیانتِ صعودی ارائه می‌کنیم.

**مثال ۱.۲.** هر تابع کاب–داگلاس به فرم

$$f(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+)$$

که $\alpha_i \geq ۰$ به‌ازای هر $i = ۱, \dots, n$ و $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq ۱$، یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است.

**مثال ۲.۲.** فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه $m$ روی $\mathbb{R}^n$ با ضرایب نامنفی است. در این‌صورت تابع

$$f(x) = (P(x))^{\frac{1}{m}} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+)$$

یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است. به‌ویژه، هر $p$—نرم به فرم

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+)$$

(که $p > ۰$) یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است.

**لم ۳.۲.** فرض کنید $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مقعر و صعودی است که $f(۰) \geq ۰$. در این‌صورت $f$ تابعی هم‌رادیانتِ صعودی است.

اثبات. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n_+$ و $\gamma \in (۰, ۱)$ دلخواه باشند. داریم:

$$f(\gamma x) = f(\gamma x + (1 - \gamma)0) \geq \gamma f(x) + (1 - \gamma) f(0) \geq \gamma f(x).$$

□

بنا به لم (۳.۲)، توابع تک‌متغیره $\ln(x + 1)$، $1 - \exp(-x)$ و $\tan^{-1}(x)$ روی بازه $[0, \infty)$ هم‌رادیانتِ صعودی هستند.

**لم ۴.۲.** فرض کنید توابع $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ هم‌رادیانتِ صعودی باشند. در این‌صورت ترکیب این دو تابع، یعنی تابع $\phi o f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$، هم‌رادیانتِ صعودی است.

اثبات. آشکار است که تابع $\phi o f$ صعودی است. برای اینکه نشان دهیم هم‌رادیانت نیز هست، فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n_+$ و $\gamma \in (۰, ۱)$ دلخواه باشند. داریم:

$$\phi o f(\gamma x) = \phi(f(\gamma x)) \geq \phi(\gamma f(x)) \geq \gamma \phi(f(x)) = \gamma \phi o f(x).$$

□

در لم زیر، برخی از ویژگی‌های مجموعه توابع هم‌رادیانتِ صعودی را بیان می‌کنیم.

**لم ۵.۲.** فرض کنید $\Omega$ مجموعه تمام توابع هم‌رادیانتِ صعودی به فرم $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ است.

الف) $\Omega$ یک مخروط محدب است، به‌عبارت دیگر، اگر $f, g \in \Omega$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$، آنگاه $\alpha f + \beta g \in \Omega$.

ب) فرض کنید $\{f_\eta\}_{\eta \in J}$ یک خانواده دلخواه از عناصر $\Omega$ است و

$$\tilde{f}(x) = \inf_{\eta \in J} f_\eta(x), \quad \bar{f}(x) = \sup_{\eta \in J} f_\eta(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n_+).$$

آنگاه $\tilde{f} \in \Omega$؛ و اگر به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$، $f(x) < +\infty$، آنگاه $\bar{f} \in \Omega$.

پ) فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله از عناصر $\Omega$ است و

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n_+).$$

اگر به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$، $f(x) < +\infty$، آنگاه $f \in \Omega$.

اثبات. الف) فرض کنید $f, g \in \Omega$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. قرار می‌دهیم $h = \alpha f + \beta g$. آشکار است که تابع $h$ صعودی است. اکنون نشان می‌دهیم که این تابع هم‌رادیانت نیز هست. فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n_+$ و $\gamma \in (۰, ۱)$ دلخواه باشند. داریم:

$$h(\gamma x) = \alpha f(\gamma x) + \beta g(\gamma x) \geq \alpha\gamma f(x) + \beta\gamma g(x) = \gamma(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \gamma h(x).$$

پس $h \in \Omega$.

ب) ما فقط نشان می‌دهیم $\tilde{f} \in \Omega$ (اثبات اینکه تابع $\bar{f}$ به $\Omega$ تعلق دارد به‌طور مشابه انجام می‌شود). فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ به‌طوری‌که $x \leq y$. داریم $f_\eta(x) \leq f_\eta(y)$ به‌ازای هر $\eta \in J$. پس $\tilde{f}(x) = \inf_{\eta \in J} f_\eta(x) \leq \inf_{\eta \in J} f_\eta(y) = \tilde{f}(y)$. در نتیجه $\tilde{f}$ تابعی صعودی است. اکنون نشان می‌دهیم که این تابع هم‌رادیانت نیز هست. فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n_+$ و $\gamma \in (۰, ۱)$ دلخواه باشند. داریم $f_\eta(\gamma x) \geq \gamma f_\eta(x)$ به‌ازای هر $\eta \in J$. پس $\tilde{f}(\gamma x) = \inf_{\eta \in J} f_\eta(\gamma x) \geq \gamma \inf_{\eta \in J} f_\eta(x) = \gamma \tilde{f}(x)$. بنابراین $\tilde{f} \in \Omega$.

پ) فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ به‌طوری‌که $x \leq y$. داریم $f_k(x) \leq f_k(y)$ به‌ازای هر $k \geq ۱$. پس

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \leq \lim_{k \to \infty} f_k(y) = f(y).$$

بنابراین $f$ تابعی صعودی است. فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n_+$ و $\gamma \in (۰, ۱)$ دلخواه باشند. داریم $f_k(\gamma x) \geq \gamma f_k(x)$ به‌ازای هر $k \geq ۱$. پس

$$f(\gamma x) = \lim_{k \to \infty} f_k(\gamma x) \geq \gamma \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \gamma f(x).$$

بنابراین $f$ تابعی هم‌رادیانت است و نتیجه می‌شود $f \in \Omega$. $\square$

مثال‌ها و لم‌های فوق نشان می‌دهند که مجموعه توابع هم‌رادیانتِ صعودی، دسته بزرگی از توابع را شامل می‌شوند. در ادامه، مفاهیم اولیه و اساسیِ تحدب مجرد را بیان می‌کنیم.

تعریف **۶.۲**. [۱۴] فرض کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی دلخواه، $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی تعریف شده بر مجموعه $X$، و $H$ مجموعه‌ای از توابع تعریف شده بر $X$، مانند $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$، باشند.

(الف) مجموعه تکیه‌گاه تابع $f$ نسبت به $H$ که با $\mathrm{supp}(f, H)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{supp}(f, H) := \{h \in H : h(x) \leq f(x),\ \forall\, x \in X\}.$$

(ب) تابع $f$ را محدب مجرد نسبت به $H$ (یا $H-$محدب) گویند، هرگاه مجموعه‌ای مانند $\Delta \subseteq H$ موجود باشد، به‌قسمی‌که

$$f(x) = \sup_{h \in \Delta} h(x) \quad (x \in X).$$

(پ) تابع $h \in H$ را یک $H-$زیرگرادیان تابع $f$ در نقطه $x_\circ \in X$ گویند، هرگاه

$$f(x) - f(x_\circ) \geq h(x) - h(x_\circ),\ \forall\, x \in X.$$

مجموعه تمام $H-$زیرگرادیان‌های تابع $f$ در نقطه $x_\circ$ را که با $\partial_H f(x_\circ)$ نشان داده می‌شود، $H-$زیردیفرانسیل تابع $f$ در نقطه $x_\circ$ می‌نامیم.

با توجه به تعریف بالا، به آسانی می‌توان ثابت کرد که $f$ تابعی $H-$محدب است اگر و تنها اگر

$$f(x) = \sup_{h \in \mathrm{supp}(f,H)} h(x) \quad (x \in X).$$

به‌ازای هر $x_\circ \in X$، مجموعه $\partial^*_H f(x_\circ)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial^*_H f(x_\circ) := \{h \in H : h \in \mathrm{supp}(f, H),\ h(x_\circ) = f(x_\circ)\}.$$

آشکار است که $\partial^*_H f(x_\circ) \subseteq \partial_H f(x_\circ)$.

یک دسته از توابع مهم در تحدب مجرد، توابع مینیمم-نوع هستند. فرض کنید $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\circ\}$. یک تابع مینیمم-نوع متناظر با $p$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ell_p(x) = \min\{p_i x_i : p_i > \circ\} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+).$$

توجه داشته باشید که تابع $\ell_p : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مقعر است (زیرا مینیمم یک مجموعه متناهی از توابع خطی است). تعریف می‌کنیم:

$$L := \{\ell_p : p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\circ\}\}.$$

به‌ازای هر $c > \circ$ و هر $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\circ\}$، تابع $h_{p,c} : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_{p,c}(x) = \min\{\ell_p(x), c\} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+).$$

تابع $h_{p,c} : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز مقعر است. مجموعه همه توابع $h_{p,c}$ را با $H$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$H := \{h_{p,c} : p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\circ\},\ c > \circ\}.$$

فرض کنید $x = (x_۱, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. ما بردار $\frac{۱}{x}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{x})_i = \begin{cases} \frac{۱}{x_i}, & x_i > \circ, \\ \circ, & x_i = \circ. \end{cases}$$

گزاره زیر که تحدب مجرد توابع هم‌رادیانتِ صعودی را نسبت به مجموعه توابع $H$ نشان می‌دهد، در [۱۴] ثابت شده است.

**گزاره ۷.۲.** تابع $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ هم‌رادیانتِ صعودی است اگر و تنها اگر یک تابع $H-$محدب باشد.

**گزاره ۸.۲.** تابع هم‌رادیانتِ صعودی $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ مفروض است. در این‌صورت به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$، $H-$زیردیفرانسیل تابع $f$ در نقطه $x$ ناتهی است. همچنین اگر $x_\circ \in \mathbb{R}^n_+$ به‌طوری‌که $f(x_\circ) > \circ$، آنگاه $h_{p_\circ, c_\circ} \in \partial^*_H f(x_\circ)$ که $p_\circ = \frac{f(x_\circ)}{x_\circ}$ و $c_\circ = f(x_\circ)$.

**ملاحظه ۹.۲.** فرض کنیم تابع $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ هم‌رادیانتِ صعودی است. با توجه به گزاره ۷.۲، چون‌که $f$ سوپریمم یک دسته از توابع پیوسته است، بنابراین تابع $f$ روی $\mathbb{R}^n_+$ نیم‌پیوسته پایینی است (می‌توان نشان داد که تابع $f$ روی $\mathbb{R}^n_{++}$ پیوسته است).

در ادامه این بخش، به معرفی سادک‌ها می‌پردازیم. فرض کنید $u^۱, u^۲, \dots, u^n$، $n$ نقطه مستقل خطی در فضای $\mathbb{R}^n$ باشند. یک سادک $S$ در فضای $\mathbb{R}^n$ را به‌عنوان غلاف محدب این $n$ نقطه تعریف می‌کنیم. پس

$$S := \mathrm{co}(u^۱, u^۲, \dots, u^n) = \Big\{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i u^i : \lambda_i \geq \circ,\ i = ۱, \dots, n,\ \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱\Big\}.$$

فرض کنید $a = (a_۱, a_۲, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$. متناظر با نقطه $a$، سادک $S_a$ را در فضای $\mathbb{R}^n$ به‌صورت غلاف محدب $n$ نقطه $a^۱ = (\frac{۱}{a_۱}, \circ, \dots, \circ), a^۲ = (\circ, \frac{۱}{a_۲}, \circ, \dots, \circ), \dots, a^n = (\circ, \dots, \circ, \frac{۱}{a_n})$ (که این $n$ نقطه، مستقل خطی هستند) در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$S_a = \mathrm{co}(a^۱, a^۲, \dots, a^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq \circ,\ \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{a_i} = ۱\}.$$

در بخش بعدی، مساله‌های بهینه‌سازی به فرم (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که چون $S_a \cap X$ مجموعه فشرده‌ای در $\mathbb{R}^n_+$ است و $f$ نیز تابعی نیم‌پیوسته پایینی است، پس جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) همواره وجود دارد.

## ۳ الگوریتم شاخه و کران

در این بخش به الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله (۱.۱) می‌پردازیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این الگوریتم از دو بخش شاخه‌سازی و کران‌یابی تشکیل شده است که هر یک از این دو بخش را به تفصیل بررسی می‌کنیم.

## ۱.۳ شاخه‌سازی

سادک $S = \mathrm{co}(u^1, u^2, \ldots, u^n) \subseteq S_a$ را که $S \cap X \neq \emptyset$، در نظر بگیرید. مجموعه $S \cap X$ را به دو زیرمجموعه افراز می‌کنیم. نحوه انجام این افراز به این‌صورت است که قرار می‌دهیم

$$\left\| u^{i_0} - u^{j_0} \right\| = \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\| u^i - u^j \right\| .$$

به عبارت دیگر، بلندترین یالِ سادک $S$ را (با توجه به نرم اقلیدسی) پیدا می‌کنیم که یال بین نقاط $u^{i_0}$ و $u^{j_0}$ است. نقطه $y^0$ را به‌عنوان نقطه وسط این بلندترین یال در نظر می‌گیریم. پس

$$y^0 = \frac{1}{2}(u^{i_0} + u^{j_0}).$$

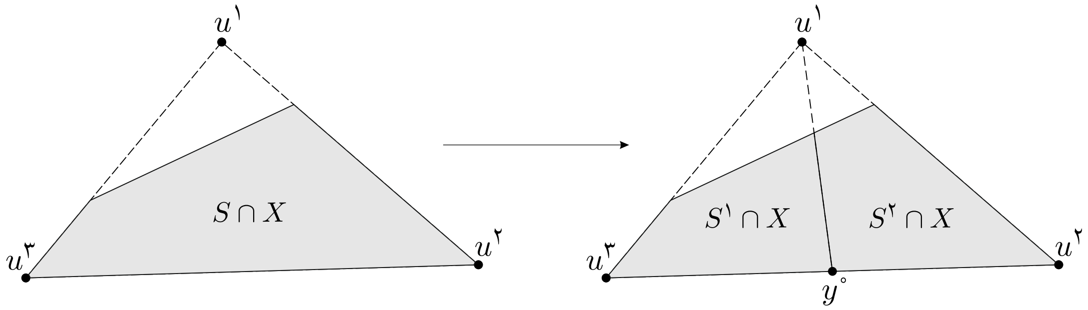
اکنون سادک $S$ به دو زیرسادک $S^1$ و $S^2$ افراز می‌شود که

$$S^1 = \mathrm{co}(u^1, \ldots, u^{i_0 - 1}, y^0, u^{i_0+1}, \ldots, u^n), \quad S^2 = \mathrm{co}(u^1, \ldots, u^{j_0 - 1}, y^0, u^{j_0+1}, \ldots, u^n).$$

در واقع، سادک $S^1$ از $S$ با جایگزینی $u^{i_0}$ با $y^0$، و سادک $S^2$ از $S$ با جایگزینی $u^{j_0}$ با $y^0$ به‌دست آمده است. بنابراین مجموعه $S \cap X$ به دو زیرمجموعه $S^1 \cap X$ و $S^2 \cap X$ افراز می‌شود. توجه کنید که

$$S \cap X = (S^1 \cap X) \cup (S^2 \cap X), \quad relint(S^1 \cap X) \cap relint(S^2 \cap X) = \emptyset.$$

(منظور از $relint(B)$، درون نسبی مجموعه $B$ است.) در شکل ۱، این افراز در فضای $\mathbb{R}^3$ نشان داده شده است.




شکل ۱: افراز مجموعه $S \cap X$ به دو زیرمجموعه $S^1 \cap X$ و $S^2 \cap X$ در فضای $\mathbb{R}^3$ که $S = \mathrm{co}(u^1, u^2, u^3)$، $X$ نیم‌فضای $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \geq b_0$ است، $\|u^2 - u^3\| = \max_{1 \leq i < j \leq 3} \|u^i - u^j\|$، $y^0 = \frac{1}{2}(u^2 + u^3)$، $S^1 = \mathrm{co}(u^1, y^0, u^3)$ و $S^2 = \mathrm{co}(u^1, u^2, y^0)$.

این روش افراز، یک ساختار درختی ایجاد می‌کند، به‌طوری‌که ریشه درخت، مجموعه شدنیِ $S_a \cap X$ است و هر گره در درخت با یک زیرمجموعه از $S_a \cap X$ مرتبط است. این درخت با افراز هر زیرمجموعه به زیرمجموعه‌های کوچکتر، به‌صورت بازگشتی ساخته می‌شود تا یک شرط توقف در الگوریتم شاخه و کران برآورده شود.

## ۲.۳ کران‌یابی

سادک $S = \mathrm{co}(u^1, \ldots, u^n) \subseteq S_a$ که توسط روش شاخه‌سازی تولید شده است، مفروض است به‌طوری‌که $S \cap X \neq \emptyset$. ما می‌خواهیم کران پایینی مانند $\delta(S)$ برای مقدار کمینه سراسری تابع $f$ روی مجموعه $S \cap X$ به‌دست آوریم، یعنی

$$\delta(S) \leq \min\{f(x) : x \in S \cap X\}.$$

برای سادک $S$ قرار می‌دهیم $E(S) := \{u^j : u^j \in X\}$. توجه کنید که چون $S \cap X \neq \emptyset$، پس $E(S) \cap X \neq \emptyset$. فرض کنیم $E(S) = \{u^{j_1}, \ldots, u^{j_k}\}$. یک مجموعه متناهی از نقاط $S \cap X$ را که با $\Delta(S)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(S) := \{u^{j_1}, \ldots, u^{j_k}, u^{j_{k+1}}\} \tag{۱.۳}$$

که $u^{j_{k+1}} = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n} u^{j_l}$. توجه کنید که اگر $E(S) = \{u^{j_1}\}$ (یعنی $E(S)$ شامل فقط یک نقطه، مانند $u^{j_1}$ است) آنگاه $\Delta(S) = \{u^{j_1}\}$. از آنجا که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$، $f(x) \geq 0$، پس اگر نقطه‌ای مانند $u^{j_l} \in \Delta(S)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(u^{j_l}) = 0$، آنگاه $u^{j_l}$ یک جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) است. پس فرض می‌کنیم به‌ازای هر $l = 1, \dots, k+1$، $f(u^{j_l}) > 0$. قضیه زیر، روشی برای محاسبه یک کران پایین مانند $\xi(S)$ برای مقدار کمینه سراسری تابع هم‌رادیانتِ صعودی $f$ روی مجموعه $S \cap X$ ارائه می‌دهد. این کران پایین با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آید.

**قضیه ۱.۳.** مساله برنامه‌ریزی خطی زیر (با متغیرهای $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ و $t \in \mathbb{R}$) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min_{\lambda,t} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} d_{l,i}\lambda_i - t \leq 0, \quad l = 1, \dots, k+1, \\ & \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i \geq b_0, \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

که

$$d_{l,i} = h_{p_{j_l},c_{j_l}}(u^i), \quad p_{j_l} = \frac{f(u^{j_l})}{u^{j_l}}, \quad c_{j_l} = f(u^{j_l}) \quad (i = 1, \dots, n,\ l = 1, \dots, k+1)$$

و

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (u^i)_j b_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

(منظور از $(u^i)_j$، مولفه $j$اُم نقطه $u^i$ است). اگر مقدار بهین این مساله $\xi(S)$ باشد، آنگاه

$$\xi(S) \leq \min\{f(x) : x \in S \cap X\}.$$

اثبات. به‌ازای هر $l = 1, \dots, k+1$، $f(u^{j_l}) > 0$. بنابراین گزاره ۸.۲ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $l = 1, \dots, k+1$، $h_{p_{j_l},c_{j_l}} \in \partial^*_H f(u^{j_l})$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \min\{f(x) : x \in S \cap X\} &\geq \min\{\max_{1\leq l\leq k+1} h_{p_{j_l},c_{j_l}}(x),\ x \in S \cap X\} \\ &= \min\{t : \max_{1\leq l\leq k+1} h_{p_{j_l},c_{j_l}}(x) - t \leq 0,\ x \in S \cap X\} \\ &= \min\{t : h_{p_{j_l},c_{j_l}}(x) - t \leq 0,\ 1 \leq l \leq k+1,\ x \in S \cap X\}. \end{aligned}$$

فرض کنید نقطه $x \in S \cap X$ دلخواه باشد. چون $x \in S$، پس می‌توان نقطه $x$ را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{۳.۳}$$

توجه کنید که این نمایش برای نقطه $x$ یکتا است (زیرا نقاط $u^1, \dots, u^n$ مستقل خطی‌اند). از طرفی $x \in X$، پس $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \geq b_0$. با جایگذاری مقادیر $x_i$ از رابطه (۳.۳) نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i \geq b_0$$

که

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (u^i)_j b_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

آشکار است که عکس نتیجه بالا نیز برقرار است. یعنی اگر برای نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i \geq b_0$$

که

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (u^i)_j b_j \quad (i = 1, \dots, n),$$

آنگاه $x \in S \cap X$. می‌دانیم به‌ازای هر $l = 1, \dots, k+1$، $h_{p_{j_l}, c_{j_l}}$ یک تابع مقعر است، بنابراین

$$h_{p_{j_l}, c_{j_l}}(x) = h_{p_{j_l}, c_{j_l}}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_{p_{j_l}, c_{j_l}}(u^i).$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \min\{f(x) : x \in S \cap X\} &\geq \min\{t : h_{p_{j_l}, c_{j_l}}(x) - t \leq 0, \ 1 \leq l \leq k+1, \ x \in S \cap X\} \\ &\geq \min\{t : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_{p_{j_l}, c_{j_l}}(u^i) - t \leq 0, \ 1 \leq l \leq k+1, \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i \geq b_0\} \\ &= \xi(S) \end{aligned}$$

که این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۱.۳، کران پایین $\xi(S)$ را برای مقدار کمینه سراسری تابع $f$ روی $S \cap X$ (که $S \cap X \neq \emptyset$) فراهم می‌کند. با این حال، هنگام پیاده‌سازی الگوریتم شاخه و کران، لازم است دنباله‌ای از کران‌های پایین تولید شود که در طول تکرارهای الگوریتم، صعودی باشد. برای دستیابی به این هدف، کران پایین $\xi(S)$ را به‌شکل زیر بهبود می‌بخشیم: فرض کنید $S \cap X$ یک مجموعه ناتهی تولیدشده از افراز $S' \cap X$ با روش شاخه‌سازی است. اکنون کران پایین جدید $\delta(S)$ برای مقدار کمینه سراسری تابع $f$ روی $S \cap X$ را با استفاده از رابطه زیر ارائه می‌کنیم:

$$\delta(S) := \max\{\delta(S'), \xi(S)\}. \tag{۴.۳}$$

کران پایین $\delta(S)$ دارای این ویژگی است که در طول روند الگوریتم شاخه و کران، کاهش نمی‌یابد، یعنی، اگر $S \cap X \subseteq S' \cap X$، آنگاه $\delta(S') \leq \delta(S)$. در حالتی‌که $S \cap X = \emptyset$، تعریف می‌کنیم:

$$\delta(S) := +\infty.$$

**قضیه ۲.۳.** سادک $S = \mathrm{co}(u^1, \dots, u^n)$ و مجموعه نقاط $\Delta(S)$ که به‌صورت (۱.۳) تعریف شده است، مفروضند. پارامتر $\rho(S)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(S) := \min\{h_{p_{j_l}, c_{j_l}}(u^i) : l = 1, \dots, k+1, \ i = 1, \dots, n\}. \tag{۵.۳}$$

در این‌صورت

$$\delta(S) \geq \rho(S).$$

اثبات. با توجه به تعریف $\rho(S)$ داریم:

$$\begin{aligned}\{(\lambda,t)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ &\sum_{i=1}^{n}h_{p_{j_l},c_{j_l}}(u^i)\lambda_i-t\leq 0,\ 1\leq l\leq k+1,\\ &\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}e_i\lambda_i\geq b_0\}\subseteq\\ \{(\lambda,t)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ &\sum_{i=1}^{n}\rho(S)\lambda_i-t\leq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}e_i\lambda_i\geq b_0\}.\end{aligned}$$

بنابراین از (۲.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\delta(S)\ &\geq\ \xi(S)\\ &=\ \min\{t:\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_{p_{j_l},c_{j_l}}(u^i)-t\leq 0,\ 1\leq l\leq k+1,\\ &\qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}e_i\lambda_i\geq b_0\}\\ &\geq\ \min\{t:\rho(S)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-t\leq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}e_i\lambda_i\geq b_0\}\\ &=\ \min\{t:\rho(S)\leq t,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}e_i\lambda_i\geq b_0\}\\ &\geq\ \rho(S).\end{aligned}$$

بنابراین، اثبات کامل است. □

اکنون قصد داریم که یک کران بالای $\gamma(S)$ برای مقدار کمینه سراسری تابع هم‌رادیانتِ صعودی $f$ روی مجموعه $S\cap X$ ارائه کنیم. انجام این کار نسبت به یافتن کران پایین، بسیار ساده‌تر است. در واقع مقدار تابع $f$ در هر نقطه از $S\cap X$، یک کران بالا برای مقدار کمینه سراسری تابع $f$ روی $S\cap X$ است. اما برای داشتن یک دنباله از کران‌های بالا که در طول تکرارهای الگوریتم شاخه و کران، نزولی نیز باشد، به‌شکل زیر عمل می‌کنیم: فرض کنید $S\cap X$ که $S=\mathrm{co}(u^1,\dots,u^n)$، زیرمجموعه تولیدشده از افراز $S'\cap X$ توسط روش شاخه‌سازی است (فرض می‌کنیم $S\cap X\neq\emptyset$). کران بالای $\gamma(S')$ در اختیار است. در واقع، $\gamma(S')=f(x')$ به‌ازای یک نقطه $x'\in S'\cap X$. برای تعیین کران بالای $\gamma(S)$، قرار می‌دهیم:

$$\gamma(S)=\min\big(\{f(x):x\in\Delta(S)\}\cup\{f(x')\}\big).$$

آشکار است که $\gamma(S)$ یک کران بالا برای مقدار کمینه سراسری تابع $f$ روی $S\cap X$ است و همچنین

$$\gamma(S)\leq\gamma(S').$$

اکنون، با توجه به مباحث مطرح‌شده در این بخش، الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله (۱.۱) را ارائه می‌کنیم.

الگوریتم شاخه و کران

مقداردهی اولیه:

۱. سادک $S_1:=S_a$ را در نظر بگیرید و مجموعه متناهی $\Delta_1:=\Delta(S_1)$ را طبق (۱.۳) به‌دست آورید (اگر $\Delta_1=\emptyset$، الگوریتم را خاتمه دهید؛ مساله (۱.۱) نشدنی است.)

۲. اگر نقطه‌ای مانند $x' \in \Delta_1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x') = 0$، الگوریتم را خاتمه دهید؛ $x'$ یک جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) است. در غیر این‌صورت، کران پایین $\xi(S_1)$ را با استفاده از مساله (۲.۳) محاسبه کنید.

۳. قرار دهید $\gamma_1 = \min\{f(x) : x \in \Delta_1\}$.

۴. نقطه $x^1 \in \Delta_1$ را طوری انتخاب کنید که $f(x^1) = \gamma_1$.

۵. قرار دهید $\delta_1 = \xi(S_1)$، $R_1 = \{S_1\}$ و $k = 1$.

تکرار $k$:

۱. اگر $\gamma_k = \delta_k$، الگوریتم را خاتمه دهید؛ $x^k$ یک جواب بهین سراسری و $\gamma_k$ مقدار بهین مساله (۱.۱) است؛ در غیر این‌صورت (اگر $\gamma_k > \delta_k$) مجموعه $S_k \cap X$ را طبق روند شاخه‌سازیِ زیربخش ۱.۳، به دو زیرمجموعه $S_k^1 \cap X$ و $S_k^2 \cap X$ افراز کنید.

۲. برای هر $l \in \{1, 2\}$:

(آ) مجموعه نقاط $\Delta(S_k^l) \subseteq S_k^l \cap X$ را طبق (۱.۳) به‌دست آورید.

(ب) اگر $\Delta(S_k^l) = \emptyset$، آنگاه قرار دهید $\delta(S_k^l) = +\infty$.

(ج) اگر نقطه‌ای مانند $x' \in \Delta(S_k^l)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x') = 0$، الگوریتم را خاتمه دهید؛ $x'$ یک جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) است.

(د) کران پایین $\xi(S_k^l)$ را با استفاده از مساله (۲.۳) محاسبه کرده و قرار دهید $\delta(S_k^l) = \max\{\delta(S_k), \xi(S_k^l)\}$.

۳. قرار دهید $\Delta_{k+1} := \Delta(S_k^1) \cup \Delta(S_k^2) \cup \{x^k\}$

۴. قرار دهید $\gamma_{k+1} = \min\{f(x) : x \in \Delta_{k+1}\}$ و $x^{k+1} \in \Delta_{k+1}$ را طوری انتخاب کنید که $f(x^{k+1}) = \gamma_{k+1}$.

۵. قرار دهید $R_{k+1} = (R_k \setminus \{S_k\}) \cup S_k^1 \cup S_k^2$.

۶. به‌ازای هر سادک $S \in R_{k+1}$، اگر $\delta(S) \geq \gamma_{k+1}$، آنگاه $S$ را از $R_{k+1}$ حذف کنید.

۷. اگر $R_{k+1} = \emptyset$، قرار دهید $\delta_{k+1} = \gamma_{k+1}$؛ در غیر این‌صورت، قرار دهید $\delta_{k+1} = \min\{\delta(S) : S \in R_{k+1}\}$

۸. سادک $S_{k+1} \in R_{k+1}$ را چنان انتخاب کنید که $\delta(S_{k+1}) = \delta_{k+1}$ و به تکرار $k + 1$ بروید.

برای الگوریتم شاخه و کران، دو حالت می‌تواند رخ دهد. حالت اول این است که الگوریتم بعد از تعداد متناهی تکرار متوقف شود. در این‌صورت اگر الگوریتم در تکرار $k$ام متوقف شود، $x^k$ جواب بهین سراسری و $\gamma_k$ مقدار بهین مساله (۱.۱) است. حالت دوم این است که الگوریتم بعد از متناهی گام متوقف نشود. در این‌صورت، دنباله $\{x^k\}_{k\geq 1}$ از نقاط شدنی مساله (۱.۱) تولید می‌شود. همچنین دنباله‌هایی از کران‌های پایین و بالا، یعنی $\{\delta\}_{k\geq 1}$ و $\{\gamma\}_{k\geq 1}$ نیز تولید می‌شوند. قضیه زیر، همگرایی الگوریتم شاخه و کران در حالت دوم را نشان می‌دهد.

**قضیه ۳.۳.** فرض کنید تابع هم‌رادیانتِ صعودی $f$ روی مجموعه $S_1 \cap X$ پیوسته است و الگوریتم شاخه و کران بعد از متناهی تکرار متوقف نشود و نیز برای هر دنباله از مجموعه‌های تو در توی $\{S_k \cap X\}_{k\geq 1}$ (یعنی به‌ازای هر $k \geq 1$، $S_{k+1} \cap X \subseteq S_k \cap X$) نقطه‌ای مانند $s^* \in S_1 \cap X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{k\to+\infty} (S_k \cap X) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (S_k \cap X) = \{s^*\},$$

در این‌صورت

۱) $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = \lim_{k\to+\infty} f(x^k) = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k$.

۲) هر نقطه حدی از دنباله $\{x^k\}$، مانند $x^*$، یک جواب بهین سراسری مساله (۱.۱) است.

اثبات. ۱) فرض کنید $x^*$ یک نقطه حدی دنباله $\{x^k\} \subseteq S_1 \cap X$ است. پس زیردنباله‌ای مانند $\{x^{k_r}\}$ از دنباله $\{x^k\}$ وجود دارد که $\lim_{r\to+\infty} x^{k_r} = x^*$. فرض کنید $f^*$ مقدار بهین مساله (۱.۱) است. با توجه به خواص دنباله‌های $\delta_k$ و $\gamma_k$، داریم:

$$\delta_k \leq \delta_{k+1}, \quad \delta_k \leq f^*, \quad \gamma_{k+1} \leq \gamma_k, \quad f^* \leq \gamma_k \ \forall\, k \geq 1.$$

بنابراین، اعداد ثابت $\delta^*$ و $\gamma^*$ وجود دارند، به‌طوری‌که $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = \delta^*$ و $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = \gamma^*$. اما به‌ازای هر $k \geq 1$، $\gamma_k = f(x^k)$. چون تابع $f$ پیوسته است، بنابراین

$$\lim_{k\to+\infty} \delta_k = \delta^* \leq f^* \leq \gamma^* = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k = \lim_{k\to+\infty} f(x^k) = f(x^*). \qquad (۶.۳)$$

فرض کنید دنباله $\{S_{k_r} \cap X\}$ (متناظر با دنباله $\{x^{k_r}\}$) تو در تو است، یعنی به‌ازای هر $r \geq 1$، $S_{k_{r+1}} \cap X \subseteq S_{k_r} \cap X$. داریم $\delta_{k_r} = \delta(S_{k_r})$. برای هر $r \geq 1$، نقطه $u^{k_r} \in \Delta(S_{k_r}) \subseteq S_{k_r} \cap X$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه $\lim_{r\to+\infty}(S_{k_r} \cap X) = \{s^*\}$ و نیز پیوستگی $f$، داریم:

$$\gamma^* = \lim_{r\to+\infty} f(x^{k_r}) \leq \lim_{r\to+\infty} f(u^{k_r}) = f(s^*). \qquad (۷.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه ۲.۳، به‌ازای هر $r \geq 1$، $\delta(S_{k_r}) \geq \rho(S_{k_r})$. با توجه به پیوستگی تابع $f$ و تابع $h_{p_{k_r}, c_{k_r}}$ و استفاده از این حقیقت که $\lim_{r\to+\infty}(S_{k_r} \cap X) = \{s^*\}$، به این نتیجه می‌رسیم که

$$\delta^* = \lim_{r\to+\infty} \delta_{k_r} = \lim_{r\to+\infty} \delta(S_{k_r}) \geq \lim_{r\to+\infty} \rho(S_{k_r}) = f(s^*). \qquad (۸.۳)$$

بنابراین، با توجه به (۶.۳)، (۷.۳) و (۸.۳)، داریم:

$$\lim_{k\to+\infty} \delta_k = \lim_{k\to+\infty} f(x^k) = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k.$$

۲) با توجه به (۸.۳)، نتیجه می‌شود که $s^*$ یک جواب بهین مساله (۱.۱) است. به‌ازای هر $r \geq 1$، $f(x^{k_r}) \leq f(u^{k_r})$، بنابراین

$$f(x^*) = \lim_{r\to+\infty} f(x^{k_r}) \leq \lim_{r\to+\infty} f(u^{k_r}) = f(s^*).$$

پس $x^*$ نیز یک جواب بهین مساله (۱.۱) است. □

## ۴ مثال‌های عددی

در این بخش چند مثال عددی از مساله بهینه‌سازی (۱.۱) ارائه کرده و آنها را با روش شاخه و کران حل می‌کنیم.[۲] همچنین این مساله‌ها را با استفاده از الگوریتم ژنتیک ([۷]) و الگوریتم نقطه درونی ([۱۲]) حل کرده تا به‌توان مقایسه‌ای بین الگوریتم شاخه و کران و این دو روش داشت. در همه این مثال‌ها توابع هدف، توابعی هم‌رادیانتِ صعودی هستند. جزئیات حل مساله‌ها با استفاده از الگوریتم‌های اشاره‌شده در جدول‌هایی خلاصه شده‌اند که در آنها داریم:

- $n$ : تعداد متغیرهای مساله بهینه‌سازی
- $k$ : تعداد تکرارهای انجام‌شده از الگوریتم
- $t$ : زمان انجام تعداد تکرارهای الگوریتم (بر حسب ثانیه)
- $f^*$ : مقدار بهین دقیق مساله
- $f^*_k$ : مقدار بهین تقریبی یافت‌شده برای مساله در تکرار $k$ام

[۲] الگوریتم شاخه و کرانِ ارائه‌شده در بخش ۳، در برنامه MATLAB پیاده‌سازی شده و بر روی یک کامپیوتر شخصی با مشخصات زیر اجرا شده است. پردازنده: Intel® Core™ i5-7200U؛ حافظه رَم: ۸ گیگابایت DDR4-2133.

مثال **۱.۴.** مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{xHx^T} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{-۱}{n}x_۱ + \frac{۱}{n}x_۲ + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n}x_n \geq \frac{۱}{n^۲}, \\ & x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱, \\ & x_i \geq ۰, \quad i = ۱, \ldots, n \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

که

$$H = [h_{ij}]_{n\times n}, \qquad h_{ij} = \begin{cases} i^۲ + |n - i - ۴/۵|, & i = j, \\ \dfrac{i}{n} + \dfrac{n-j}{۲i}, & i \neq j. \end{cases}$$

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰/۵۱ | ۲/۳۸۰۹ | ۸ | | |
| ۱/۲۱ | ۲/۱۶۰۲ | ۲۵ | ۲/۱۱۱۴ | ۳ |
| ۲/۸۳ | ۲/۱۱۲۲ | ۸۰ | | |
| ۰/۹۱ | ۲/۵۸۹۵ | ۱۰ | | |
| ۲/۳۱ | ۲/۳۲۷۰ | ۳۰ | ۱/۹۰۱۲ | ۶ |
| ۳/۵۹ | ۱/۹۲۷۹ | ۷۰ | | |
| ۱/۹۴ | ۳/۳۴۹۳ | ۱۰ | | |
| ۲/۸۰ | ۲/۹۹۴۶ | ۲۵ | ۲/۵۸۳۴ | ۱۰ |
| ۳/۹۲ | ۲/۶۱۸۳ | ۹۰ | | |

جدول ۱: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله (۱.۴)

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۶ | ۲/۱۵۸۹ | ۱۰ | | |
| ۰/۳۸ | ۲/۱۲۶۷ | ۳۰ | ۲/۱۱۱۴ | ۳ |
| ۰/۹۲ | ۲/۱۱۱۸ | ۱۰۰ | | |
| ۰/۷۰ | ۲/۴۲۵۷ | ۱۵ | | |
| ۱/۴۱ | ۲/۱۵۴۹ | ۶۰ | ۱/۹۰۱۲ | ۶ |
| ۲/۴۰ | ۱/۹۸۳۰ | ۱۵۰ | | |
| ۰/۸۲ | ۳/۴۵۷۷ | ۲۰ | | |
| ۱/۴۳ | ۳/۰۹۲۹ | ۵۰ | ۲/۵۸۳۴ | ۱۰ |
| ۲/۸۰ | ۲/۶۰۵۰ | ۲۰۰ | | |

جدول ۲: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم ژنتیک برای حل مساله (۱.۴)

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱٫۴۳ | ۲٫۲۲۷۵ | ۴ | | |
| ۱٫۸۲ | ۲٫۱۱۵۸ | ۸ | ۲٫۱۱۱۴ | ۳ |
| ۲٫۶۴ | ۲٫۱۱۵۵ | ۱۵ | | |
| ۱٫۶۶ | ۲٫۳۷۹۹ | ۴ | | |
| ۲٫۲۴ | ۲٫۰۰۰۵ | ۱۱ | ۱٫۹۰۱۲ | ۶ |
| ۳٫۱۵ | ۱٫۹۰۲۰ | ۱۸ | | |
| ۱٫۸۴ | ۳٫۳۴۱۶ | ۵ | | |
| ۲٫۲۵ | ۲٫۶۱۸۳ | ۹ | ۲٫۵۸۳۴ | ۱۰ |
| ۳٫۹۲ | ۲٫۵۹۰۶ | ۲۰ | | |

جدول ۳: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم نقطه درونی برای حل مساله (۱.۴)

مثال **۲.۴**. مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \min_{1\leq j\leq n}\{c^j x^T\} + \max_{1\leq j\leq n}\{d^j x^T\} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{n}x_1 + \frac{-1}{n}x_2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x_n \geq \frac{1}{n^2}, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

که

$$c_i^j = \frac{n|\cos(i)|}{2j} + \frac{ij}{n}, \quad d_i^j = \frac{n^2|\sin(i)|}{j^2} + \frac{ij}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n.$$

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۶۸ | ۳٫۷۴۸۶ | ۱۰ | | |
| ۱٫۸۸ | ۳٫۶۵۴۱ | ۳۰ | ۳٫۵۷۹۶ | ۳ |
| ۲٫۷۲ | ۳٫۵۸۳۸ | ۷۵ | | |
| ۱٫۰۸ | ۵٫۵۲۱۱ | ۱۵ | | |
| ۲٫۲۹ | ۴٫۸۸۵۷ | ۳۵ | ۴٫۷۰۲۹ | ۵ |
| ۳٫۷۴ | ۴٫۷۸۶۴ | ۸۰ | | |
| ۲٫۳۷ | ۶٫۷۹۱۲ | ۱۰ | | |
| ۳٫۶۸ | ۶٫۵۹۷۵ | ۲۵ | ۶٫۰۷۱۸ | ۸ |
| ۴٫۶۱ | ۶٫۲۲۰۹ | ۸۰ | | |

جدول ۴: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله (۲.۴)

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۴۱ | ۳٫۷۸۲۱ | ۱۵ | | |
| ۰٫۵۹ | ۳٫۷۷۸۹ | ۴۰ | ۳٫۵۷۹۶ | ۳ |
| ۰٫۹۴ | ۳٫۵۹۴۶ | ۱۵۰ | | |
| ۱٫۳۱ | ۵٫۶۳۱۲ | ۲۰ | | |
| ۲٫۱۰ | ۵٫۰۸۱۱ | ۵۰ | ۴٫۷۰۲۹ | ۵ |
| ۳٫۳۹ | ۴٫۷۸۲۲ | ۲۰۰ | | |
| ۱٫۵۰ | ۷٫۲۱۰۵ | ۲۰ | | |
| ۲٫۶۵ | ۶٫۷۱۲۳ | ۸۰ | ۶٫۰۷۱۸ | ۸ |
| ۳٫۹۲ | ۶٫۱۷۰۱ | ۲۰۰ | | |

جدول ۵: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم ژنتیک برای حل مساله (۲.۴)

| $t$ | $f_k^*$ | $k$ | $f^*$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱٫۷۲ | ۴٫۵۶۰۱ | ۳ | | |
| ۲٫۰۸ | ۳٫۷۶۳۴ | ۹ | ۳٫۵۷۹۶ | ۳ |
| ۲٫۸۰ | ۳٫۵۸۸۵ | ۱۵ | | |
| ۱٫۹۱ | ۵٫۴۴۹۰ | ۳ | | |
| ۲٫۶۶ | ۴٫۹۳۰۵ | ۷ | ۴٫۷۰۲۹ | ۵ |
| ۳٫۴۹ | ۴٫۷۲۰۷ | ۱۸ | | |
| ۲٫۳۱ | ۷٫۴۴۵۱ | ۵ | | |
| ۳٫۱۹ | ۶٫۵۸۱۰ | ۱۰ | ۶٫۰۷۱۸ | ۸ |
| ۴٫۳۷ | ۶٫۲۰۳۹ | ۱۷ | | |

جدول ۶: نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم نقطه درونی برای حل مساله (۲.۴)

## ۵ بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

در این بخش، مدل میانگین–انحراف معیار از بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را ارائه کرده و آن را با روش شاخه و کران حل می‌کنیم. فرض کنید شخصی قصد دارد یک سبد سرمایه‌گذاری از $n$ دارایی تشکیل دهد. این سبد سرمایه‌گذاری باید دارای این ویژگی باشد که بازده مورد انتظار آن از عدد مشخصی مانند $E_۰$ کمتر نباشد و نیز دارای کمترین مقدار ریسک باشد (به چنین سبدی یک سبد سرمایه‌گذاری کارا می‌گوییم). با توجه به سوابق تاریخی این $n$ دارایی، بردار بازده $r$ و ماتریس کواریانس $\Sigma$ مربوط به این دارایی‌ها را در دسترس داریم (در واقع با توجه به سوابق تاریخی بازدهی دارایی‌ها، می‌توان آنها را محاسبه کرد). بردار بازده مورد انتظار به‌صورت $r = (r_۱, r_۲, \dots, r_n)$ است که به‌ازای هر $۱ \leq j \leq n$، $r_j$ بازده دارایی $j$ام است و ماتریس کواریانس به‌صورت $\Sigma = [\sigma_{i,j}]_{n\times n}$ است که به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $\sigma_{i,j}$ کواریانس بین بازده‌های دارایی‌های $i$ام و $j$ام است. فرض کنید $x_j$ نشان‌دهنده نسبتی از پولی است که شخص می‌خواهد در دارایی $j$ام سرمایه‌گذاری کند، در این‌صورت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱$$

(این محدودیت را در ریاضیات مالی، محدودیت بودجه می‌نامند) و نیز

$$x_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, \dots, n.$$

در برخی مدل‌ها، مقادیر $x_j$ها می‌تواند منفی شود. منفی‌شدن مقدار یک دارایی به معنی فروش استقراضی آن دارایی است). بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری تشکیل‌شده برابر است با

$$r_p = r_۱x_۱ + r_۲x_۲ + \cdots + r_nx_n$$

و ریسک سبد سرمایه‌گذاری برابر است با

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}x_ix_j}$$

(البته سنجه‌های دیگری نیز برای بازده مورد انتظار و ریسک سبد سرمایه‌گذاری وجود دارند). با معرفی بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$، ریسک سبد سرمایه‌گذاری را به‌صورت $\sigma_p = \sqrt{x\Sigma x^T}$ نیز می‌توانیم نشان دهیم. با توجه به ویژگی‌های سبد سرمایه‌گذاری مورد نظر، باید مساله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{x\Sigma x^T} \\ \text{s.t.} \quad & r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \geq E_0, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

این مساله بهینه‌سازی که آن را مدل میانگین–انحراف معیار می‌نامند، اولین بار در سال ۱۹۵۹ توسط هری ماکویتز[3] معرفی شد که هنوز هم به‌عنوان یک مدل مهم در ریاضیات مالی و اقتصاد شناخته می‌شود. جواب بهین این مساله بهینه‌سازی، سبدی را مشخص می‌کند که بازده مورد انتظار آن از $E_0$ کمتر نیست و نیز کمترین مقدار ممکن ریسک را دارد. تابع هدف مساله (۱.۵) تابع $f(x) = \sqrt{x\Sigma x^T}$ است که با توجه به مثال (۲.۲) (با فرض نامنفی‌بودن مولفه‌های ماتریس $\Sigma$) یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است. پس مساله بهینه‌سازی (۱.۵) را می‌توان با روش شاخه و کران ارائه‌شده در بخش ۳ حل کرد. در انتهای این بخش، مثالی از بازار بورس ایران ارائه می‌کنیم.

مثال **۱.۵**. شخصی تصمیم دارد که یک سبد سرمایه‌گذاری از پنج سهم بازار بورس ایران که در شش ماه اخیر (از ابتدای اسفند ۱۴۰۱ تا پایان مرداد ۱۴۰۲) بازدهی مناسبی داشته‌اند، تشکیل دهد. این پنج سهم عبارتند از:۱. گسترش سرمایه‌گذاری ایرانیان (وگستر)، ۲. نوش پونه مشهد (غپونه)، ۳. صنایع پتروشیمی دهدشت (دهدشت)، ۴. بیمه البرز (البرز)، ۵. سرمایه‌گذاری پردیس (پردیس) که طبق همین ترتیب، آنها را سهام شماره ۱ تا ۵ در نظر می‌گیریم. بازدهی ماهانه این سهام در جدول (۷) ارائه شده است (این اطلاعات از برنامه TseClient به‌دست آمده‌اند).

| | ۱. وگستر | ۲. غپونه | ۳. دهدشت | ۴. البرز | ۵. پردیس |
|---|---|---|---|---|---|
| اسفند ۱۴۰۱ | ۰٫۱۵۶۴ | ۰٫۱۹۱۴ | ۰٫۳۱۹۱ | ۰٫۰۱۳۸ | ۰٫۲۲۱۲ |
| فروردین ۱۴۰۲ | ۱٫۲۰۰۷ | ۰٫۳۱۲۱ | ۰٫۲۱۰۳ | ۰٫۶۹۱۹ | ۰٫۴۰۲۱ |
| اردیبهشت ۱۴۰۲ | ۰٫۵۰۳۹ | −۰٫۱۶۳۱ | ۰٫۰۵۳۶ | −۰٫۱۱۸۶ | ۰٫۱۲۴۰ |
| خرداد ۱۴۰۲ | ۰٫۴۲۳۵ | ۰٫۱۰۱۹ | ۰٫۱۲۶۶ | −۰٫۱۲۳۵ | −۰٫۰۱۲۱ |
| تیر ۱۴۰۲ | ۰٫۱۱۴۸ | −۰٫۱۶۷۳ | ۰٫۰۶۳۲ | −۰٫۰۶۴۸ | −۰٫۱۳۶۲ |
| مرداد ۱۴۰۲ | −۰٫۱۱۴۴ | −۰٫۱۴۷۸ | −۰٫۲۶۵۲ | ۰٫۱۲۳۷ | −۰٫۲۸۳۰ |

جدول ۷: بازدهی ماهانه سهام

با میانگین گرفتن از بازده‌های ماهانه هر سهم، می‌توان بازده مورد انتظار آن سهم را یافت که این بازده‌های مورد انتظار در جدول (۸) ارائه شده‌اند.

| وگستر | غپونه | دهدشت | البرز | پردیس |
|---|---|---|---|---|
| ۰٫۳۸۰۸ | ۰٫۰۲۱۲ | ۰٫۰۸۴۶ | ۰٫۰۸۷۱ | ۰٫۰۵۲۷ |

جدول ۸: بازدهی مورد انتظار سهام

اکنون برای محاسبه کواریانس بین بازده‌های دو سهم $i$ام و $j$ام می‌توان از رابطه $\sigma_{i,j} = \sum_{t=1}^{6}(r_i - r_{i,t})(r_j - r_{j,t})$ استفاده کرد. مقادیر این کواریانس‌ها در جدول (۹) ارائه شده‌اند.

[3] Harry Markowitz

| | وگستر | غپونه | دهدشت | البرز | پردیس |
|---|---|---|---|---|---|
| وگستر | ۰/۲۱۱۱ | ۰/۰۶۳۰ | ۰/۰۴۵۵ | ۰/۱۰۰۱ | ۰/۰۹۴۲ |
| غپونه | ۰/۰۶۳۰ | ۰/۰۴۳۶ | ۰/۰۲۹۷ | ۰/۰۴۱۴ | ۰/۰۴۰۹ |
| دهدشت | ۰/۰۴۵۵ | ۰/۰۲۹۷ | ۰/۰۳۹۳ | ۰/۰۰۹۴ | ۰/۰۴۰۰ |
| البرز | ۰/۱۰۰۱ | ۰/۰۴۱۴ | ۰/۰۰۹۴ | ۰/۰۹۶۵ | ۰/۰۴۲۹ |
| پردیس | ۰/۰۹۴۲ | ۰/۰۴۰۹ | ۰/۰۴۰۰ | ۰/۰۴۲۹ | ۰/۰۶۱۶ |

جدول ۹: مقادیر کواریانس بین سهام

بنابراین بردار بازده و ماتریس کواریانس این پنج سهم به‌صورت زیر است:

$$r=(۰/۳۸۰۸,\ ۰/۰۲۱۲,\ ۰/۰۸۴۶,\ ۰/۰۸۷۱,\ ۰/۰۵۲۷),\ \Sigma=\begin{bmatrix} ۰/۲۱۱۱ & ۰/۰۶۳۰ & ۰/۰۴۵۵ & ۰/۱۰۰۱ & ۰/۰۹۴۲ \\ ۰/۰۶۳۰ & ۰/۰۴۳۶ & ۰/۰۲۹۷ & ۰/۰۴۱۴ & ۰/۰۴۰۹ \\ ۰/۰۴۵۵ & ۰/۰۲۹۷ & ۰/۰۳۹۳ & ۰/۰۰۹۴ & ۰/۰۴۰۰ \\ ۰/۱۰۰۱ & ۰/۰۴۱۴ & ۰/۰۰۹۴ & ۰/۰۹۶۵ & ۰/۰۴۲۹ \\ ۰/۰۹۴۲ & ۰/۰۴۰۹ & ۰/۰۴۰۰ & ۰/۰۴۲۹ & ۰/۰۶۱۶ \end{bmatrix}$$

شخص می‌خواهد سبدی از این سهام تشکیل دهد که بازده مورد انتظار آن از ۰/۱۲۵۳ (میانگین بازده مورد انتظار این پنج سهم) کمتر نباشد و نیز کمترین مقدار ممکن ریسک را داشته باشد. بنابراین باید مساله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \min\quad & \sqrt{x\Sigma x^T} \\ \text{s.t.}\quad & ۰/۳۸۰۸x_۱+۰/۰۲۱۲x_۲+۰/۰۸۴۶x_۳+۰/۰۸۷۱x_۴+۰/۰۵۲۷x_۵\geq ۰/۱۲۵۳, \\ & x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱, \\ & x_j\geq ۰,\ j=۱,۲,\ldots,۵. \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

با حل این مساله با استفاده از روش شاخه و کران، جواب بهین و مقدار بهین

$$\bar{x}=(۰/۱۵۶۲,\ ۰/۰۶۲۵,\ ۰/۵۹۳۸,\ ۰/۱۸۷۵,\ ۰),\quad \bar{f}=۰/۲۰۸۲$$

به‌دست می‌آید (با مقدار خطای مطلق حداکثر ۰/۰۰۰۳). بنابراین این شخص برای تشکیل سبد سرمایه‌گذاری مورد نظرش، باید به ترتیب، ۱۵/۶۲ درصد، ۶/۲۵ درصد، ۵۹/۳۸ درصد، ۱۸/۷۵ درصد از کل سرمایه‌اش را در سهام وگستر، غپونه، دهدشت و البرز سرمایه‌گذاری کند و نباید هیچ مبلغی در سهم پردیس سرمایه‌گذاری کند که در این‌صورت مقدار ۰/۲۰۸۲ برای ریسک این سبد سرمایه‌گذاری به‌دست می‌آید.

در انتهای این بخش، مثالی از یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه از بازار بورس ایران ارائه می‌کنیم که توسط روش مجموع وزن‌دار توابع هدف، آن را به یک مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه تبدیل کرده و آن را با استفاده از روش شاخه و کران حل می‌کنیم.

مثال **۲.۵.** شش سهم ۱. لیزینگ ایرانیان (وایران)، ۲. سرمایه‌گذاری سایپا (وساپا)، ۳. سیمان شرق (سشرق)، ۴. داروسازی فارابی (دفارا)، ۵. فولاد آلیاژی ایران (فولاژ)، ۶. سیمرغ (سیمرغ) مفروضند. با استفاده از رنامه TseClient سوابق این سهام در دسترس هستند که با توجه به این اطلاعات، ماتریس کوواریانس این شش سهم (طبق ترتیب شماره‌گذاری این سهام) برای شش ماه ابتدایی سال ۱۴۰۱ به‌صورت

$$\Sigma_۱=\begin{bmatrix} ۰/۰۴۳۹ & ۰/۰۵۴۰ & ۰/۰۷۳۹ & ۰/۲۸۱۶ & ۰/۱۲۰۴ & ۰/۱۰۳۷ \\ ۰/۰۵۴۰ & ۰/۱۱۳۸ & ۰/۰۸۳۷ & ۰/۰۶۱۵ & ۰/۰۳۴۴ & ۰/۱۶۱۷ \\ ۰/۰۷۳۹ & ۰/۰۸۳۷ & ۰/۱۴۱۱ & ۰/۰۱۲۷ & ۰/۰۵۶۶ & ۰/۰۸۳۹ \\ ۰/۲۸۱۶ & ۰/۰۶۱۵ & ۰/۰۱۲۷ & ۰/۰۷۳۹ & ۰/۱۱۸۳ & ۰/۰۶۴۵ \\ ۰/۱۲۰۴ & ۰/۰۳۴۴ & ۰/۰۵۶۶ & ۰/۱۱۸۳ & ۰/۰۴۲۲ & ۰/۰۳۱۸ \\ ۰/۱۰۳۷ & ۰/۱۶۱۷ & ۰/۰۸۳۹ & ۰/۰۶۴۵ & ۰/۰۳۱۸ & ۰/۲۶۸۰ \end{bmatrix}$$

برای شش ماه انتهایی سال ۱۴۰۱ به‌صورت

$$\Sigma_۲=\begin{bmatrix} ۰/۰۵۰۶ & ۰/۰۵۲۲ & ۰/۰۶۷۳ & ۰/۱۵۴۹ & ۰/۱۳۶۱ & ۰/۰۷۸۴ \\ ۰/۰۵۲۲ & ۰/۱۲۹۰ & ۰/۰۵۵۳ & ۰/۰۲۴۱ & ۰/۰۱۸۰ & ۰/۱۳۰۵ \\ ۰/۰۶۷۳ & ۰/۰۵۵۳ & ۰/۱۰۷۲ & ۰/۰۳۹۶ & ۰/۱۲۸۴ & ۰/۰۷۷۳ \\ ۰/۱۵۴۹ & ۰/۰۲۴۱ & ۰/۰۳۹۶ & ۰/۱۴۹۵ & ۰/۰۹۷۷ & ۰/۰۸۱۸ \\ ۰/۱۳۶۱ & ۰/۰۱۸۰ & ۰/۱۲۸۴ & ۰/۰۹۷۷ & ۰/۰۶۲۵ & ۰/۰۴۹۲ \\ ۰/۰۷۸۴ & ۰/۱۳۰۵ & ۰/۰۷۷۳ & ۰/۰۸۱۸ & ۰/۰۴۹۲ & ۰/۱۷۳۸ \end{bmatrix}$$

و برای شش ماه ابتدایی سال ۱۴۰۲ به‌صورت

$$\Sigma_۳=\begin{bmatrix} ۰/۰۴۶۱ & ۰/۰۸۰۲ & ۰/۰۶۲۰ & ۰/۱۳۹۳ & ۰/۰۸۸۵ & ۰/۰۵۷۷ \\ ۰/۰۸۰۲ & ۰/۰۸۷۳ & ۰/۰۴۶۶ & ۰/۰۱۰۵ & ۰/۰۲۴۷ & ۰/۱۱۸۴ \\ ۰/۰۶۲۰ & ۰/۰۴۶۶ & ۰/۰۸۷۸ & ۰/۰۴۲۸ & ۰/۱۵۳۲ & ۰/۰۵۰۹ \\ ۰/۱۳۹۳ & ۰/۰۱۰۵ & ۰/۰۴۲۸ & ۰/۱۷۰۰ & ۰/۱۰۵۶ & ۰/۰۴۲۰ \\ ۰/۰۸۸۵ & ۰/۰۲۴۷ & ۰/۱۵۳۲ & ۰/۱۰۵۶ & ۰/۰۸۱۱ & ۰/۰۴۴۲ \\ ۰/۰۵۷۷ & ۰/۱۱۸۴ & ۰/۰۵۰۹ & ۰/۰۴۲۰ & ۰/۰۴۴۲ & ۰/۱۱۲۰ \end{bmatrix}$$

است. همچنین بردار بازده این شش سهم برای این هجده ماه به‌صورت

$$r=(۰/۰۵۶۶,\ ۰/۰۳۸۰,\ ۰/۱۳۴۱,\ ۰/۰۲۷۹,\ ۰/۰۴۶۰,\ ۰/۰۵۲۲)$$

است. یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم: سه تابع هدف داریم که در واقع ریسک‌های سبد سرمایه‌گذاری (در این شش سهم) در این سه دوره هستند. بازده مورد انتظار سبد تشکیل شده از این شش سهم از ۰/۰۵۹۱ (میانگین بازده مورد انتظار این شش سهم) کمتر نیست. محدودیت بودجه برقرار است و نیز مقادیر سرمایه‌گذاری در این سهام نامنفی هستند. بنابراین این مساله بهینه‌سازی چندهدفه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min\quad & \sqrt{x\Sigma_۱x^T}\\ \min\quad & \sqrt{x\Sigma_۲x^T}\\ \min\quad & \sqrt{x\Sigma_۳x^T}\\ \text{s.t.}\quad & ۰/۰۵۶۶x_۱+۰/۰۳۸۰x_۲+۰/۱۳۴۱x_۳+۰/۰۲۷۹x_۴+۰/۰۴۶۰x_۵+۰/۰۵۲۲x_۶\geq ۰/۰۵۹۱,\\ & x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱,\\ & x_j\geq ۰,\ j=۱,۲,\ldots,۶. \end{aligned} \tag{۳.۵}$$

اکنون قصد داریم یک نقطه کارای این مساله را پیدا کنیم. برای این کار از روش مجموع وزن‌دار توابع هدف استفاده می‌کنیم که در این‌صورت مساله زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \min\quad & w_۱\sqrt{x\Sigma_۱x^T}+w_۲\sqrt{x\Sigma_۲x^T}+w_۳\sqrt{x\Sigma_۳x^T}\\ \text{s.t.}\quad & ۰/۰۵۶۶x_۱+۰/۰۳۸۰x_۲+۰/۱۳۴۱x_۳+۰/۰۲۷۹x_۴+۰/۰۴۶۰x_۵+۰/۰۵۲۲x_۶\geq ۰/۰۵۹۱,\\ & x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱,\\ & x_j\geq ۰,\ j=۱,۲,\ldots,۶, \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

که $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ وزن‌های این سه تابع هدف هستند و اعدادی نامنفی هستند. تابع هدف مساله (۴.۵) یک تابع هم‌رادیانتِ صعودی است. اگر وزن‌های $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$، اعدادی مثبت باشند، آنگاه می‌دانیم جواب بهین مساله (۴.۵) یک نقطه کارا برای مساله (۳.۵) است. قرار می‌دهیم $w_۱=\frac{۱}{۶}$، $w_۲=\frac{۲}{۶}$ و $w_۳=\frac{۳}{۶}$، و سپس مساله (۴.۵) را با روش شاخه و کران حل می‌کنیم که جواب بهین (نقطه کارا برای مساله (۳.۵)) و مقدار بهین

$$\bar{x}=(۰,\ ۰/۳۸۶۳,\ ۰/۳۱۶۴,\ ۰/۲۹۷۳,\ ۰,\ ۰),\qquad \bar{f}=۰/۲۵۴۷$$

به‌دست می‌آیند.

## ۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مساله بهینه‌سازی توابع هم‌رادیانتِ صعودی روی زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n_+$ که به‌صورت اشتراک یک سادک با یک نیم‌فضا هستند را ارائه کرده و روش شاخه و کران برای حل این دسته از مساله‌های بهینه‌سازی را مورد بررسی قرار دادیم. سپس به‌عنوان کاربردی از این نوع مساله‌های بهینه‌سازی، به ارائه مدل مهمی از ریاضیات مالی، تحت عنوان مدل میانگین–انحراف معیار پرداخته و این مدل را با استفاده از روش شاخه و کران حل کردیم. مساله‌های ارائه‌شده در بخش مثال‌های عددی، نشان می‌دهد روش شاخه و کران، از نظر زمان انجام محاسبات،

خوب عمل می‌کند. به‌ویژه آن‌که این روش، مقدار بهین سراسری مساله را پیدا می‌کند که مزیت بسیار بزرگی نسبت به بسیاری از روش‌های دیگر است.

برای پژوهش‌های آینده، قصد داریم به بررسی مساله بهینه‌سازی توابع هم‌رادیانتِ صعودی روی زیرمجموعه‌های کلی‌تری از $\mathbb{R}^n_+$، مانند چندوجهی‌های کلی و مجموعه‌های ستاره‌گون بپردازیم. همچنین تحلیل حساسیت روش شاخه و کران و نیز پیداکردن خطای این روش می‌تواند یک پژوهش اساسی در این زمینه باشد.

## فهرست منابع


[1] Abdul Razak, H.N., Maasar, M., Hafidzuddin, N.H. and Chun Lee, E.S., 2019. Portfolio optimization of risky assets using mean-variance and mean-cvar. *Journal of Academia*, 7, pp.25–32.

[2] Bagirov, A.M. and Rubinov, A.M., 2000. Global minimization of increasing positively homogeneous functions over the unit simplex. *Ann. Oper. Res.*, 98, pp.171–187. doi:10.1023/A:1019204407420

[3] Best, M.J., 2010. *Portfolio optimization*. CRC Press.

[4] Daryaei, M.H. and Mohebi, H., 2013. Abstract convexity of extended real-valued ICR functions. *Optimization*, 62(6), pp.835–855. doi:10.1080/02331934.2012.741127

[5] Daryaei, M.H. and Mohebi, H., 2015. Global minimization of the difference of strictly non-positive valued affine ICR functions. *J. Glob. Optim.*, 61, pp.311–323. doi:10.1007/s10898-014-0168-0

[6] Daryaei, M.H. and Mohebi, H., 2024. Dual optimality conditions for the difference of extended real valued increasing co-radiant functions. *J. Glob. Optim.*, doi:10.1007/s10898-024-01404-1

[7] Dey, N., 2023. *Applied Genetic Algorithm and Its Variants: Case Studies and New Developments*. Springer Nature.

[8] Glover, B.M. and Rubinov, A.M., 1999. Increasing convex-along-rays functions with applications to global optimization. *J. Optim. Theory. Appl.*, 102, pp.615–642. doi:10.1023/A:1022602223919

[9] Horst, R. and Tuy, H., 2013. *Global optimization: Deterministic approaches*. Springer Science & Business Media.

[10] Martínez-Legaz, J.E., Rubinov, A.M. and Schaible, S., 2005. Increasing quasiconcave co-radiant functions with applications in mathematical economics. *Math. Methods. Oper. Res.*, 61(2), pp.261–280. doi:10.1007/s001860400405

[11] Mohebi, H. and Sadeghi, H., 2009. Monotonic analysis over ordered topological vector spaces: II. *Optimization*, 58(2), pp.241–249. doi:10.1080/02331930701761664

[12] Nemirovski, A.S. and Todd, M.J., 2008. Interior-point methods for optimization. *Acta. Numer.*, 17, pp.191–234. doi:10.1017/S0962492906370018

[13] Rockafellar, R.T., 1997. *Convex analysis*. Princeton university press.

[14] Rubinov, A.M., 2013. *Abstract Convexity and Global Optimization*. Springer Science & Business Media.

[15] Rubinov, A.M. and Andramonov, M.Y., 1999. Minimizing increasing star-shaped functions based on abstract convexity. *J. Glob. Optim.*, 15, pp.19–39. doi:10.1023/A:1008344317743

[16] Sattarzadeh, A.R. and Mohebi, H., 2019. Characterizing approximate global minimizers of the difference of two abstract convex functions with applications. *Filomat*, 33(8), pp.2431–2445. doi:10.2298/FIL1908431S

[17] Silva, L.P., Alem, D. and Carvalho, F.L., 2017. Portfolio optimization using mean absolute deviation (MAD) and conditional value-at-risk (CVaR). *Production*, 27, doi:10.1590/0103-6513.208816

[18] Tomazella, C.P. and Nagano, M.S., 2020. A comprehensive review of Branch-and-Bound algorithms: Guidelines and directions for further research on the flowshop scheduling problem. *Expert. Syst. Appl.*, 158, doi:10.1016/j.eswa.2020.113556

[19] Unger, A., 2014. *The use of risk budgets in portfolio optimization*. Springer.

# Minimization of Increasing Co-radiant Functions with Branch and Bound Method and Its Application in Portfolio Optimization

Mohammad Hossein Daryaei(1) [4] and AliReza Sattarzadeh(2)

(1) Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
(2) Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Modern Technologies, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, Iran

Communicated by: Mohammad jolodari Mamahgani

Received: 9 September 2023 Accepted: 10 September 2024

**Abstract:** Branch and bound algorithm is a widespread method for global optimization. This algorithm partition the feasible set of the optimization problem through a branching method and then calculates an upper bound and a lower bound for each member of the partition using a bounding method. Finally, the branch and bound method compares the obtained bounds and the objective function values with each other and removes the members of the partition that do not contain an optimal point. In this paper, the branch and bound algorithm for optimizing increasing co-radiant functions on subsets of $\mathbb{R}^n_+$ which are presented in the form of intersection a half space with a simplex (the purpose of considering such feasible sets is to examine a model of financial mathematics, called the mean-standard deviation model). We use the concept of abstract convexity of increasing co-radiant functions for bounding (finding lower bounds). In the end, as an application of this optimization problem, we propose the mean-standard deviation model of portfolio optimization and solve it with the branch and bound method.

**Keywords**: Branch and bound algorithm, Portfolio optimization, Mean-standard deviation model, Abstract convexity, Increasing co-radiant functions.



[4]Corresponding author
*E-mail addresses:* (M.H. Daryaei) daryaei@uk.ac.ir, (A.R. Sattarzadeh) a.sattarzadeh@kgut.ac.ir