



یک روش عددی مبتنی بر توابع متعامد لگاریتمی تعمیم‌یافته برای حل معادلات انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم

سعیده طیبی نژاد^(۱) و فخرالدین محمدی^(۱)

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
دبیر مسئول: غلامرضا حاجتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۲۶

چکیده: این مقاله به حل معادلات انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم می‌پردازد. برای این هدف، ابتدا توابع متعامد لگاریتمی تعمیم‌یافته معرفی و خواص آنها بررسی می‌شود. پس از آن با استفاده از این توابع به‌عنوان پایه در روش طیفی هم‌محلی، روشی عددی برای تقریب جواب این نوع معادلات انتگرال ارائه می‌شود. سپس خطای تقریب و آنالیز همگرایی برای روش ارائه‌شده نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، برای سنجش کارایی و دقت روش پیشنهادی، چند مثال عددی در نظر گرفته شده است. نتایج عددی حاصل‌شده نشان می‌دهند که روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم‌یافته در مقایسه با برخی از روش‌های ارائه‌شده قبلی کارآمدتر و دقیق‌تر است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال ولترای کوردیال، توابع متعامد لگاریتمی تعمیم‌یافته، روش هم‌محلی.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 65R20

۱ مقدمه

عملگر انتگرال ولترای

$$(\mathcal{V}_\varphi u)(t) = \int_0^t t^{-1} \varphi(t^{-1}s) k(t, s) u(s) ds, \quad t \in I := [0, T], \quad (1.1)$$

که در آن $\varphi \in L^1(0, 1)$ و $k(t, s) \in \mathbb{C}^m$ ($0 \leq s \leq t \leq T$)، $m \geq 0$ عملگر انتگرال ولترای کوردیال نامیده می‌شود. هر معادله انتگرال که شامل چنین عملگری باشد، معادله انتگرال ولترای کوردیال نام دارد. این نوع عملگر و معادلات مربوطه اولین بار توسط شخصی به نام گنادی وینیکو (*Gennadi Vainikko*) معرفی شدند [۲۸، ۲۹]. پس از آن، علاوه بر وینیکو، مؤلفان دیگری نیز عملگر و معادلات انتگرال ولترای کوردیال را مورد مطالعه قرار دادند [۱۳، ۱۴، ۱۶، ۳۰، ۳۱، ۳۳]. عملگرهای کوردیال در مطالعه مسائل هدایت گرمایی با شرایط مرزی آمیخته و نیز در انواع ویژه‌ای از عملگرهای انتگرال ولترا که دارای تکیه‌های خاصی در هسته‌اند پدیدار می‌شوند

^۱ نویسنده مسئول مقاله

[۱۷، ۸]. همچنین اشاره شود که اگر $k(\circ, \circ) = \circ$ عملگر (۱.۱) فشرده، در غیر این صورت غیر فشرده است [۲۸]. در این مقاله، توجه خود را به معادلات انتگرال ولترای نوع سوم به فرم زیر معطوف می کنیم:

$$t^b u(t) = f(t) + \int_{\circ}^t (t-s)^{-\nu} q(t,s)u(s)ds, \quad b > \circ, \quad \circ < \nu < 1, \quad (2.1)$$

که عملگر انتگرال آن قابل تبدیل به فرم کوردیال (۱.۱) با $\varphi(t^{-1}s) = (1-t^{-1}s)^{-\nu}$ است. علاوه بر این، $f(t) = t^b g(t)$ و $g(t)$ تابعی پیوسته در بازه I است.

از آنجایی که معادلات انتگرال نوع سوم در زمینه های مختلفی مانند نظریه حمل و نقل دو بعدی، نظریه امواج ساکن در پلازما، مکانیک آماری، ترمودینامیک ستارگان، مسائل تئوری کشش، انتقال نوترون و پراکندگی ذرات کاربرد دارند؛ مطالعه این نوع از معادلات و یافتن جواب عددی برای آنها همواره مورد توجه بوده است [۲، ۳، ۹]. تحلیل وجود، یکتایی و منظم بودن جواب معادلات انتگرال ولترای نوع سوم در مرجع [۱] بررسی شده است. تاکنون برای حل عددی این دسته از معادلات انتگرال روش های مختلفی مانند روش هم محلی با موجک های ژاکوبی تعمیم یافته [۲۰]، تقریب های ریتز [۱۵]، تکنیک تقریب برنشتاین [۲۷] و روش ماتریس عملگر [۱۹] به کار گرفته شده است. نکته قابل توجه در مورد معادلات انتگرال ولترای نوع سوم مورد مطالعه در این پژوهش که شامل عملگرهای نوع کوردیال اند، این است که این دسته از معادلات در نقطه اولیه $t = \circ$ رفتار تکین دارند. به طور کلی، در رویارویی با مسائل تکین، به منظور افزایش دقت روش های طیفی چندین ایده و تکنیک مانند به کارگیری فرآیند سازگاری موضعی در روش تفاضلات متناهی/عناصر متناهی [۱۸]، روش توابع تکین [۲۶]، روش های طیفی غنی شده [۱۰، ۱۱، ۲۱] و روش های طیفی نگاشت شده [۵-۷، ۲۳، ۲۴، ۳۲] وجود دارد.

در مرجع [۱۲] نویسندگان نشان دادند که هنگام رویارویی با تکینی، روش های طیفی نگاشت شده روی فضاهای سوبولف وزن دار غیریکنواخت دقت بهتری در مقایسه با روش های عددی مانند عنصر متناهی، تفاضل متناهی و روش های طیفی روی فضاهای سوبولف معمولی دارند. برای این منظور، آنها از یک نگاشت لگاریتمی مناسب در تعریف چند جمله ای های لاگر تعمیم یافته استفاده کرده و دو دسته جدید از توابع متعامد تحت عنوان توابع متعامد لگاریتمی و توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته را معرفی کردند. در این تحقیق، با الهام از ایده مرجع اشاره شده، یک روش عددی مبتنی بر توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع سوم به فرم (۲.۱) پیشنهاد می شود.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، دو دسته از توابع متعامد لگاریتمی و نوع تعمیم یافته معرفی و در ادامه چگونگی تقریب یک تابع توسط این توابع بیان می شود. تقریب جواب معادله (۲.۱) با استفاده از روش طیفی هم محلی و پایه های متعامد لگاریتمی در بخش ۳ مورد بحث قرار می گیرد. بخش ۴ به تحلیل خطای تقریب توسط این پایه های متعامد و همگرایی روش معرفی شده می پردازد. در بخش ۵ به منظور بررسی دقت و کارایی روش پیشنهاد شده چند مثال عددی ارائه شده است. در پایان، نتیجه گیری در بخش ۶ بیان می شود.

۲ توابع متعامد لگاریتمی و فرم تعمیم یافته آنها

توابع متعامد لگاریتمی که اولین بار در مرجع [۱۲] معرفی شدند، در واقع به کمک نگاشت لگاریتمی

$$x(t) := -(\beta + 1) \log(t), \quad \beta > -1, \quad t \in (\circ, 1), \quad (1.2)$$

در چند جمله ای های لاگر تعمیم یافته $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ ، $\alpha > -1$ ساخته می شوند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\alpha, \beta > -1$. توابع متعامد لگاریتمی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathcal{S}_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x(t)) = \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(-(\beta + 1) \log(t)), \quad n = \circ, 1, \dots \quad (2.2)$$

با توجه به خواص چند جمله ای های لاگر تعمیم یافته [۲۵، ف.۷]، نتیجه می شود که توابع متعامد لگاریتمی در رابطه بازگشتی زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\circ^{(\alpha, \beta)}(t) &= 1, \\ \mathcal{S}_1^{(\alpha, \beta)}(t) &= (\beta + 1) \log(t) + \alpha + 1, \\ \mathcal{S}_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t) &= \frac{2n + \alpha + 1 + (\beta + 1) \log(t)}{n + 1} \mathcal{S}_n^{(\alpha, \beta)}(t) - \frac{n + \alpha}{n + 1} \mathcal{S}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

همچنین، شرط تعامد برای این دسته از توابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^1 \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta)}(t) \mathcal{S}_m^{(\alpha,\beta)}(t) (-\log(t))^\alpha t^\beta dt = \gamma_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{nm}, \quad (3.2)$$

که در آن δ_{nm} معرف دلتای کرونکر است و

$$\gamma_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(\beta + 1)^{\alpha+1} \Gamma(n + 1)}. \quad (4.2)$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\alpha, \beta > -1$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شوند:

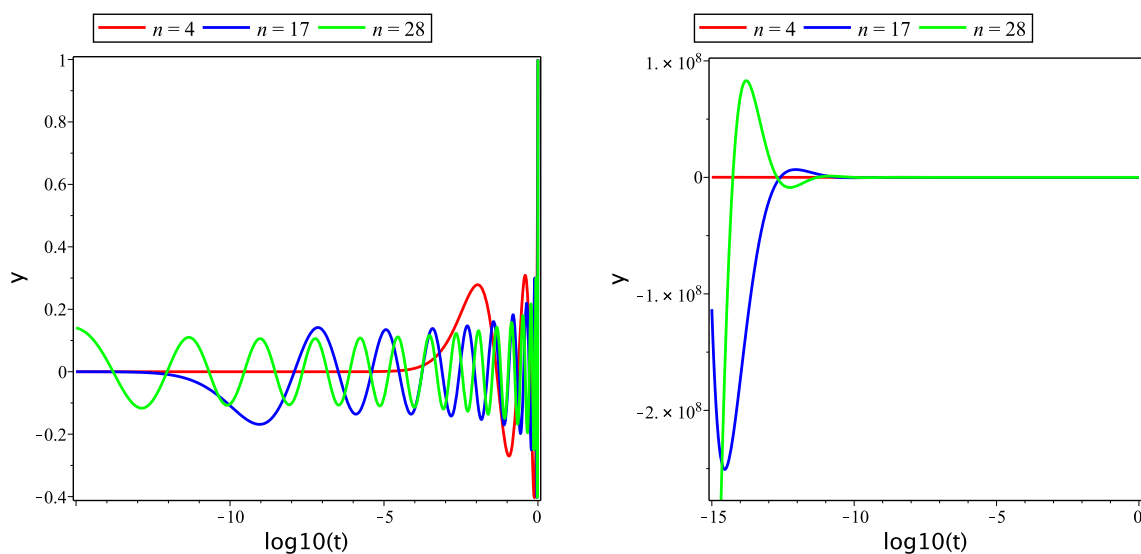
$$\mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) := t^{\frac{\beta-\lambda}{\lambda}} \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta)}(t), \quad n \geq 0. \quad (5.2)$$

قابل توجه است که در حالت خاص و برای $\lambda = \beta$ ، توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته همان توابع متعامد لگاریتمی معمولی اند که در رابطه (۲.۲) تعریف شدند. به سادگی می توان نشان داد که خانواده توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته $\left\{ \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) \right\}_{n=0}^{\infty}$ در رابطه تعامد زیر صدق می کنند:

$$\int_0^1 \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) \mathcal{S}_m^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) (-\log(t))^\alpha t^\lambda dt = \gamma_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{mn}, \quad (6.2)$$

که در آن $\gamma_n^{(\alpha,\beta)}$ همان مقدار تعریف شده در رابطه (۴.۲) است.

ملاحظه ۳.۲. شکل ۱(ا) رفتار توابع متعامد لگاریتمی را در همسایگی نقطه صفر نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود، این توابع در نزدیکی نقطه صفر رشد خیلی سریعی دارند که این امر دقت تقریب توسط این توابع را به شدت تحت تاثیر قرار می دهد. بنابراین، استفاده از توابع متعامد لگاریتمی به عنوان توابع پایه برای حل معادلاتی که شامل تکینگی اند مناسب نیست. برای رفع این مشکل، می توان از توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته استفاده کرد. همان گونه که در شکل ۱(ب) مشاهده می شود، این توابع در نزدیکی نقطه صفر رفتار متعادل تری دارند. لذا، استفاده از این توابع هنگام رویارویی با تکینگی منجر به نتایج بهتری خواهد شد.



(ب) نمودار $y(t) = \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ با $\alpha = 0, \beta = 6, \lambda = -1$.

(ا) نمودار $y(t) = \mathcal{S}_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ با $\alpha = 0, \beta = 2$.

شکل ۱: نمودارهای توابع متعامد لگاریتمی و توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته.

۱.۲ تقریب تابع

هر تابع $f \in L^{\chi}(\circ, 1)$ را می توان با استفاده از توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به صورت زیر گستراند:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t). \quad (۷.۲)$$

ضرایب مجهول c_i از رابطه $c_i = \langle f(t), \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t) \rangle$ قابل محاسبه اند که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نماد ضرب داخلی نسبت به تابع وزن $\chi^{\alpha, \lambda}(t) := (-\log(t))^{\alpha} t^{\lambda}$ است. با در نظر گرفتن تنها $(n+1)$ -تابع اول از خانواده توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته، تقریبی از تابع $f(t)$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$f(t) \simeq f_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t) := C^T \Phi(t), \quad (۸.۲)$$

که در آن C و بردارهای $\Phi(t)$ $(n+1)$ -تایی به صورت زیرند:

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T, \quad \Phi(t) = [\mathcal{S}_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t), \mathcal{S}_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t), \dots, \mathcal{S}_n^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t)]^T. \quad (۹.۲)$$

به طور مشابه، بسط تقریبی هر تابع دو متغیره $g(t, s) \in L^{\chi}([0, 1] \times [0, 1])$ بر حسب توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته را می توان به صورت زیر نوشت:

$$g(t, s) \simeq g_n(t, s) = \Phi^T(t) G \Phi(s), \quad (۱۰.۲)$$

که در آن G یک ماتریس از مرتبه $(n+1) \times (n+1)$ با درایه هایی به صورت زیر است:

$$G_{ij} = \left\langle \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t), \left\langle g(t, s), \mathcal{S}_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(s) \right\rangle_{\chi^{\alpha, \lambda}(s)} \right\rangle_{\chi^{\alpha, \lambda}(t)}. \quad (۱۱.۲)$$

۲.۲ ماتریس های عملگر

انتگرال گیری از بردار $\Phi(t)$ که در رابطه (۹.۲) تعریف شد، به صورت زیر انجام می شود:

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \mathcal{P} \Phi(t), \quad (۱۲.۲)$$

که در آن \mathcal{P} ماتریس عملگر انتگرال از مرتبه $(n+1) \times (n+1)$ است و درایه های آن به صورت زیر قابل محاسبه اند:

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\left\langle \int_0^t \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(\tau) d\tau, \mathcal{S}_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t) \right\rangle_{\chi^{\alpha, \lambda}(t)}}{\left\langle \mathcal{S}_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t), \mathcal{S}_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(t) \right\rangle_{\chi^{\alpha, \lambda}(t)}}. \quad (۱۳.۲)$$

همچنین، برای بردار دلخواه C داریم:

$$\Phi(t) \Phi^T(t) C = \tilde{C}^T \Phi(t), \quad (۱۴.۲)$$

که در آن \tilde{C} یک ماتریس قطری با درایه های قطری وابسته به بردار C است.

۳ حل معادله انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم

در این بخش، با استفاده از توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته و ماتریس عملگر انتگرال آنها، یک روش عددی برای حل معادله (۲.۱) معرفی می شود. در این راستا، ابتدا با قرار دادن $\mathcal{K}(t, s) := t^{-b-1} \varphi(t^{-1}s) q(t, s)$ معادله (۲.۱) به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$u(t) = g(t) + \int_0^t \mathcal{K}(t, s) u(s) ds. \quad (1.3)$$

پس از آن تابع مجهول $u(t)$ و تابع هسته $\mathcal{K}(t, s)$ با استفاده از توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به صورت زیر تقریب زده می شوند:

$$u(t) \simeq C^T \Phi(t) = \Phi^T(t) C, \quad \mathcal{K}(t, s) \simeq \Phi^T(t) K \Phi(s). \quad (2.3)$$

با استفاده از این مقادیر تقریبی و سپس استفاده از روابط (۱.۲.۲) و (۱.۴.۲)، عملگر انتگرال موجود در رابطه (۱.۳) به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{K}(t, s) u(s) ds &\simeq \int_0^t \Phi^T(t) K \Phi(s) \Phi^T(s) C ds = \Phi^T(t) K \int_0^t \Phi(s) \Phi^T(s) C ds \\ &= \Phi^T(t) K \int_0^t \tilde{C}^T \Phi(s) ds = \Phi^T(t) K \tilde{C}^T \mathcal{P} \Phi(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن ماتریس عملگر انتگرال معرفی شده در زیربخش (۲.۲) است. در نهایت، فرم کلی معادله (۱.۳) به صورت زیر قابل بیان است:

$$C^T \phi(t) = g(t) + \Phi^T(t) K \tilde{C}^T \mathcal{P} \Phi(t). \quad (4.3)$$

اکنون مجموعه نقاط زیر را به عنوان مجموعه نقاط هم محلی در نظر بگیرید:

$$t_j^{(\alpha, \beta)} := \left\{ \exp\left(-(\beta + 1)^{-1} x_j^{(\alpha)}\right) \right\}_{j=0}^n, \quad (5.3)$$

که در آن $x_j^{(\alpha)}$ به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ ، $(n + 1)$ -گره ریشه های چند جمله ای لاگر تعمیم یافته $\mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ است. با جایگذاری نقاط هم محلی (۵.۳) در رابطه (۴.۳) خواهیم داشت:

$$C^T \phi(t_j^{(\alpha, \beta)}) = g(t_j^{(\alpha, \beta)}) + \Phi^T(t_j^{(\alpha, \beta)}) K \tilde{C}^T \mathcal{P} \Phi(t_j^{(\alpha, \beta)}), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

رابطه (۶.۳) یک دستگاه معادلات خطی با $(n + 1)$ معادله و $(n + 1)$ مجهول است که از حل آن بردار ضرایب مجهول C حاصل می شود. در پایان، با جایگذاری بردار محاسبه شده C در رابطه (۲.۳)، جواب تقریبی معادله انتگرال (۱.۳) به دست می آید.

۴ همگرایی و آنالیز خطا

در این بخش، همگرایی روش و آنالیز خطای تقریب توسط توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته در تقریب جواب معادله (۲.۱) مورد بررسی قرار می گیرد. در ارائه مطالب مطرح شده از مرجع [۱۲] استفاده شده است. برای توصیف بهتر خطای تقریب یک تابع توسط توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته، به تعاریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱.۴. برای توابع متعامد لگاریتمی شبه-مشتق به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\partial}_t u := t \partial_t u. \quad (1.4)$$

همچنین، فضای سوبولف وزن دار غیر یکنواخت به صورت

$$A_{\alpha, \beta}^k(I) := \left\{ \nu \in L_{\chi^{\alpha, \beta}}(I) : \hat{\partial}_t^j \nu \in L_{\chi^{\alpha+j, \beta}}(I), j = 1, 2, \dots, k \right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

تعریف می شود که مجهز به نیم نرم و نرم زیر است:

$$\|\nu\|_{A_{\alpha, \beta}^m} := \|\hat{\partial}_t^m \nu\|_{\chi^{\alpha+m, \beta}}, \quad \|\nu\|_{A_{\alpha, \beta}^m} := \left(\sum_{k=0}^m \|\nu\|_{A_{\alpha, \beta}^k} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

تعریف ۲.۴. شبه- مشتق نسبت به توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\partial}_{\gamma,t} u := t^{1+\gamma} \partial_t \{t^{-\gamma} u\}. \quad (۴.۴)$$

بعلاوه، فضای سوبولف وزن دار غیر یکنواخت به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_{\alpha,\beta,\lambda}^k(I) := \left\{ \nu \in L_{\chi^{\alpha,\lambda}}^{\gamma}(I) : \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma},t}^j \nu \in L_{\chi^{\alpha+j,\lambda}}^{\gamma}(I), j = 1, 2, \dots, k \right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (۵.۴)$$

که مجهز به نیم نرم و نرم زیر است:

$$\|\nu\|_{A_{\alpha,\beta,\lambda}^m} := \|\hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma},t}^m \nu\|_{\chi^{\alpha+m,\lambda}}, \quad \|\nu\|_{A_{\alpha,\beta,\lambda}^m} := \left(\sum_{k=0}^m \|\nu\|_{A_{\alpha,\beta,\lambda}^k} \right)^{1/2}. \quad (۶.۴)$$

تعریف ۳.۴. با در نظر گرفتن مجموعه نقاط هم محلی $\{t_j^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^n$ که در رابطه (۵.۳) تعریف شد، عملگر درونیاب توابع متعامد لگاریتمی $\mathcal{I}_n^{\alpha,\beta}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n^{\alpha,\beta} : C(I) &\longrightarrow P_n^{\log(t)} \\ \mathcal{I}_n^{\alpha,\beta} v(t_j^{(\alpha,\beta)}) &= v(t_j^{(\alpha,\beta)}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

که در آن

$$P_n^{\log(t)} := \text{span} \left\{ 1, \log(t), (\log(t))^2, \dots, (\log(t))^n \right\}. \quad (۷.۴)$$

به سادگی می توان نشان داد که

$$\mathcal{I}_n^{\alpha,\beta} v(t) = \sum_{j=0}^n v(t_j^{(\alpha,\beta)}) l_j(x(t)), \quad x(t) = -(\beta + 1) \log(t), \quad (۸.۴)$$

که در آن توابع لاگرانژ نگاشت شده به صورت زیرند:

$$l_j(x(t)) = \frac{\prod_{i \neq j} (x(t) - x(t_i^{(\alpha,\beta)}))}{\prod_{i \neq j} (x(t_j^{(\alpha,\beta)}) - x(t_i^{(\alpha,\beta)}))} = \frac{\prod_{i \neq j} \log(t_i^{(\alpha,\beta)}/t)}{\prod_{i \neq j} \log(t_i^{(\alpha,\beta)}/t_j^{(\alpha,\beta)})}. \quad (۹.۴)$$

تعریف ۴.۴. مجموعه نقاط هم محلی $\{t_j^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^n$ که در رابطه (۵.۳) تعریف شد، را در نظر بگیرید. توابع لاگرانژ نگاشت شده به صورت زیر تعریف می شوند:

$$l_j^{(\beta,\lambda)}(x(t)) = \frac{t^{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}} \prod_{i \neq j} \log(t_i^{(\alpha,\beta)}/t)}{(t_j^{(\alpha,\beta)})^{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}} \prod_{i \neq j} \log(t_i^{(\alpha,\beta)}/t_j^{(\alpha,\beta)})}, \quad x(t) = -(\beta + 1) \log(t).$$

همچنین، عملگر درونیاب توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته $\mathcal{I}_n^{\alpha,\beta,\lambda}$ به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n^{\alpha,\beta,\lambda} : C(I) &\longrightarrow P_n^{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, \log(t)} \\ (\mathcal{I}_n^{\alpha,\beta,\lambda} v)(t_j^{(\alpha,\beta)}) &= v(t_j^{(\alpha,\beta)}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

که در آن

$$P_n^{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, \log(t)} := \left\{ t^{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}} p(t) : p \in P_n^{\log(t)} \right\},$$

به طوری که $P_n^{\log(t)}$ همان فضای تعریف شده در رابطه (۷.۴) است. علاوه بر این، داریم:

$$\mathcal{I}_n^{\alpha, \beta, \lambda} v(t) = \sum_{j=0}^n v(t_j^{(\alpha, \beta)}) l_j^{(\beta, \lambda)}(x(t)), \quad x(t) = -(\beta + 1) \log(t).$$

با توجه به روابط (۸.۴) و (۹.۴)، رابطه زیر بین درونیایی به کمک توابع متعامد لگاریتمی و نوع تعمیم یافته آنها برقرار است:

$$\mathcal{I}_n^{\alpha, \beta, \lambda} v(t) = t^{\frac{\beta-\lambda}{r}} \mathcal{I}_n^{\alpha, \beta} \left\{ t^{\frac{\lambda-\beta}{r}} v(t) \right\} \in P_n^{\frac{\beta-\lambda}{r}, \log(t)}.$$

در قضیه زیر، تخمین خطای حاصل از تقریب توسط توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته برای دسته‌ای از توابع تکین شرح داده شده است.

قضیه ۵.۴ ([۱۲]). تابع $g(t) = t^r (-\log(t))^k$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\lambda > -1 - 2r$ ، $k \in \mathbb{N}$ ، $r \geq 0$ و $\alpha, \beta > -1$ در این صورت داریم:

$$g \in L_{\chi^{\alpha, \lambda}}^r, \quad \mathbf{R}_{r, \beta, \lambda} = \left| \frac{2r + \lambda - \beta}{2r + 2 + \lambda + \beta} \right| < 1,$$

9

$$\|g - g_n\|_{\chi^{\alpha, \lambda}} \leq c(k+1)! n^{\frac{\alpha+1}{r} + k} (\mathbf{R}_{r, \beta, \lambda})^n, \quad (10.4)$$

وقتی که

$$n > -\frac{2k + \alpha + 2}{2 \log(\mathbf{R}_{r, \beta, \lambda})},$$

و در آن

$$c \approx \sqrt{\frac{2^{\alpha+1+k} (\beta+1)^{2\alpha+2-k}}{(\beta + \lambda + 2r + 2)^{\alpha+1+k}}}.$$

به خصوص، اگر $\alpha = \lambda = 0$ ، آنگاه یک برآورد دقیق توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته از توابع تکین در نرم L^2 به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\|g - g_n\| \leq \sqrt{2}^k (\beta+1)^{-k} k! n^k \sqrt{2(\beta+1)n} \left| \frac{2r - \beta}{2r + \beta + 2} \right|^{n-k}. \quad (11.4)$$

همچنین، برای $g(t) = t^r$ ، $r \geq 0$ داریم:

$$\|g - g_n\| \leq \sqrt{2(\beta+1)n} \left| \frac{2r - \beta}{2r + \beta + 2} \right|^n. \quad (12.4)$$

قضیه زیر برآورد خطای حاصل از تقریب با توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته را برای هر تابع دلخواه در فضای سوبولف وزن دار غیر یکنواخت بیان می‌کند.

قضیه ۶.۴ ([۱۲]). فرض کنید $m, n, k \in \mathbb{N}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha, \beta > -1$ برای هر $u \in A_{\alpha, \beta, \lambda}^m(I)$ و $0 \leq k \leq \tilde{m} = \min\{m, n+1\}$ داریم:

$$\|\hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{r}, t}^k (u - u_n)\|_{\chi^{\alpha+k, \lambda}} \leq \sqrt{(\beta+1)^{k-\tilde{m}} \frac{(n - \tilde{m} + 1)!}{(n - k + 1)!}} \|\hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{r}, t}^{\tilde{m}} u\|_{\chi^{\alpha+\tilde{m}, \lambda}}. \quad (13.4)$$

به خصوص، در حالت $\alpha = \beta = \lambda = k = 0$ و $m < n+1$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$\|u - u_n\| \leq cn^{-m/r} \|\hat{\partial}_t^m u\|_{\chi^m}, \quad (14.4)$$

که در آن $\chi^m = \chi^{m, 0} = (-\log(t))^m$.

همچنین، قضیه زیر خطای درون یابی به کمک توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته را برآورد می کند.

قضیه ۷.۴ ([۱۲]) فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند، $\alpha, \beta > -1$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. در این صورت برای هر $v \in C(I) \cap A_{\alpha, \beta, \lambda}^m(I)$ و $\hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{m-\alpha} v \in A_{\alpha, \beta, \lambda}^{m-\alpha}(I)$ خواهیم داشت:

$$\| \mathcal{I}_n^{\alpha, \beta, \lambda} v - v \|_{\chi^{\alpha, \lambda}} \leq \eta \sqrt{\frac{(n - \tilde{m} + 1)!}{(\beta + 1)^{\tilde{m} - \alpha} n!}} \left\{ c_1^\beta \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} v \|_{\chi^{\alpha+m-1, \lambda}} + c_2^\beta \sqrt{\log(n)} \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} v \|_{\chi^{\alpha+m, \lambda}} \right\} \quad (۱۵.۴)$$

که در آن $c_1^\beta = \sqrt{\max\{1, \beta + 1\}}$ ، $c_2^\beta = (\beta + 1)^{-1/2}$ و $\tilde{m} = \min\{m, n + 1\}$ مقدار ثابت است.

اکنون، در قضیه زیر خطای حاصل از به کار بردن روش پیشنهادی برای تقریب جواب معادله (۲.۱) تخمین زده می شود.

قضیه ۸.۴ معادله (۲.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $u(t)$ جواب دقیق و $u_n(t)$ بسط تقریبی $u(t)$ بر حسب توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به صورت زیر باشد:

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i \mathcal{S}_i^{\alpha, \beta, \lambda}(t) = C^T \Phi(t),$$

که در آن C و $\Phi(t)$ در رابطه (۹.۲) تعریف شده اند. همچنین، فرض کنید

$$\bar{u}_n(t) = \sum_{i=0}^n \bar{c}_i \mathcal{S}_i^{\alpha, \beta, \lambda}(t) = \bar{C}^T \Phi(t),$$

جواب تقریبی حاصل از روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته باشد که در آن $\bar{C} = [\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n]^T$. در این صورت

$$\| u - \bar{u}_n \|_{\chi^{\alpha, \lambda}} \leq \eta \left(\frac{(n - \tilde{m} + 1)!}{(\beta + 1)^{\tilde{m} - \alpha} n!} \right)^{1/2} \left\{ c_1^\beta \epsilon_1 + c_2^\beta (\log(n))^{1/2} \epsilon_2 \right\} + \mu, \quad (۱۶.۴)$$

که در آن $\epsilon_1 = \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} u \|_{\chi^{\alpha+m-1, \lambda}}$ ، $\epsilon_2 = \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} u \|_{\chi^{\alpha+m, \lambda}}$ و

$$\mu = \left(\sum_{i=0}^n |c_i - \bar{c}_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \gamma_i^{\alpha, \beta} \right)^{1/2}.$$

پارامترهای c_1^β ، c_2^β و \tilde{m} در قضیه ۷.۴ تعریف شده اند و η مقدار ثابت است.

اثبات. با توجه به فرضیات قضیه، برای عدد صحیح مثبت m ، توابع $u_n(t)$ و $\bar{u}_n(t)$ متعلق به فضای $A_{\alpha, \beta, \lambda}^m(I)$ و $u_n(t)$ بهترین تقریب $u(t)$ در $A_{\alpha, \beta, \lambda}^m(I)$ است. بنابراین می توان نوشت:

$$\| u - \bar{u}_n \|_{\chi^{\alpha, \lambda}} \leq \| u - u_n \|_{\chi^{\alpha, \lambda}} + \| u_n - \bar{u}_n \|_{\chi^{\alpha, \lambda}}. \quad (۱۷.۴)$$

با استفاده از قضیه ۷.۴، جمله اول در سمت راست نامساوی فوق دارای کران بالای زیر است:

$$\| u - u_n \|_{\chi^{\alpha, \lambda}} \leq \eta \left(\frac{(n - \tilde{m} + 1)!}{(\beta + 1)^{\tilde{m} - \alpha} n!} \right)^{1/2} \left\{ c_1^\beta \epsilon_1 + c_2^\beta (\log(n))^{1/2} \epsilon_2 \right\}, \quad (۱۸.۴)$$

که در آن η مقدار ثابت است، $\epsilon_1 = \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} u \|_{\chi^{\alpha+m-1, \lambda}}$ ، $\epsilon_2 = \| \hat{\partial}_{\frac{\beta-\lambda}{\gamma}, t}^{\tilde{m}} u \|_{\chi^{\alpha+m, \lambda}}$ و c_1^β ، c_2^β و \tilde{m} در قضیه ۷.۴ تعریف شده اند.

برای جمله دوم در سمت راست رابطه (۱۷.۴)، کران بالا به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \|u_n - \bar{u}_n\|_{\chi^{\alpha,\lambda}} &= \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n (c_i - \bar{c}_i) \mathcal{S}_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) \right)^2 \chi^{\alpha,\lambda}(t) dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n |c_i - \bar{c}_i|^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n |\mathcal{S}_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)|^2 \right) \chi^{\alpha,\lambda}(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n |c_i - \bar{c}_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \int_0^1 |\mathcal{S}_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)|^2 \chi^{\alpha,\lambda}(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n |c_i - \bar{c}_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \gamma_i^{\alpha,\beta} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (19.4)$$

که در آن $\gamma_i^{\alpha,\beta}$ مطابق رابطه (۴.۲) تعریف می شود. اکنون با قرار دادن

$$\mu = \left(\sum_{i=0}^n |c_i - \bar{c}_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \gamma_i^{\alpha,\beta} \right)^{1/2},$$

□

از روابط (۱۷.۴) - (۱۹.۴)، رابطه (۱۶.۴) حاصل می شود که اثبات را کامل می کند.

۵ نتایج عددی

در این بخش، کارایی و دقت روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته در تقریب جواب معادلات انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم با چند مثال عددی مورد ارزیابی قرار گرفته است. از آنجایی که دقت روش حاضر به پارامترهای λ و β که در این توابع متعامد ظاهر می شوند بستگی دارد، در هر مثال مقادیر متفاوتی برای این پارامترها در نظر گرفته شده است. نتایج عددی گزارش شده با استفاده از کدنویسی در محیط نرم افزار مپیل محاسبه و ارائه شده اند.

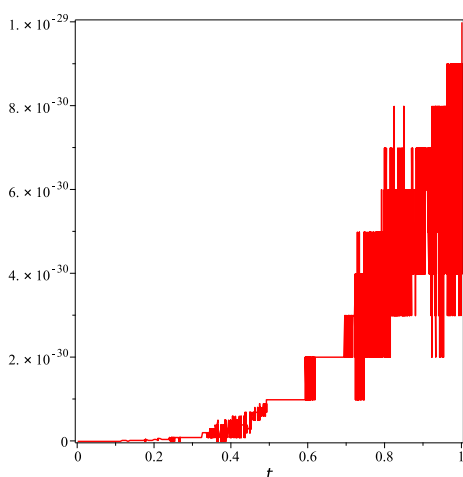
مثال ۱.۵. ([۴]) معادله انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$t^{\frac{1}{2}} u(t) = f(t) + \int_0^t t^{-1} (1-t^{-1}s)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3\pi}} (ts)^{\frac{1}{2}} u(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (1.5)$$

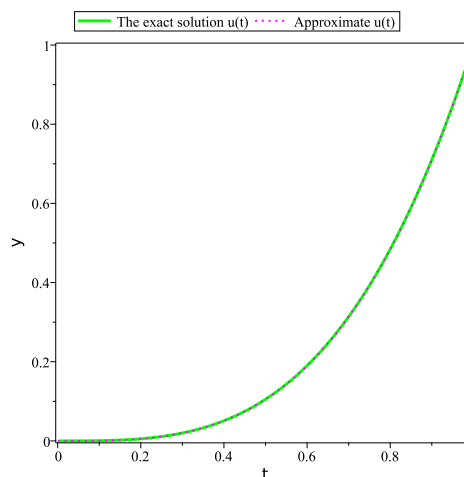
که در آن $f(t)$ به گونه ای است که $u(t) = t^{\frac{11}{2}}$ جواب دقیق است. برای تقریب جواب این معادله، روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته با پارامترهای $\alpha = 0, \beta = 7, \lambda = 0.5$ برای مقادیر مختلف n استفاده و نتایج به دست آمده گزارش شده است. در جدول ۱ قدرمطلق خطای روش حاضر با روش درونیابی مبتنی بر چند جمله ای های لاگرانژ [۴] مقایسه شده است. در شکل ۲ نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به همراه قدرمطلق خطا برای $n = 4$ نمایش داده شده است. با توجه به نتایج حاصل شده و مقایسه آنها با مقادیر گزارش شده قبلی، ملاحظه می شود که روش معرفی شده کارآمدتر و دقیق تر است.

جدول ۱: قدرمطلق خطای جواب تقریبی در مثال ۱.۵.

t	روش حاضر با $\lambda = 0.5$ و $\beta = 7, \alpha = 0$		
	n = 2	n = 4	n = 8
0	0	0	0
0.125	6.0×10^{-32}	1.0×10^{-32}	$3.78E - 7$
0.250	2.0×10^{-31}	1.0×10^{-31}	$1.25E - 7$
0.375	3.0×10^{-31}	4.0×10^{-31}	$2.25E - 8$
0.500	1.0×10^{-30}	0	6.8×10^{-10}
0.625	0	1.0×10^{-30}	$1.98E - 8$
0.750	0	3.0×10^{-30}	$1.43E - 8$
0.875	3.0×10^{-30}	3.0×10^{-30}	$8.29E - 9$
1.000	3.0×10^{-30}	0	$2.69E - 1$



(ب) قدرمطلق خطا



(ا) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۲: نتایج عددی برای $n = 4$ با $\lambda = 0.5$ و $\beta = 7, \alpha = 0$ در مثال ۱.۵.

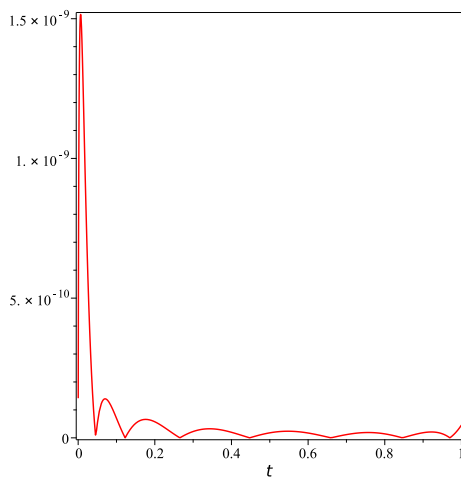
مثال ۲.۵. ([۴]) معادله انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$t^{\frac{1}{2}}u(t) = f(t) + \int_0^t t^{-1}(1 - t^{-1}s)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}} s u(s) ds, \tag{2.5}$$

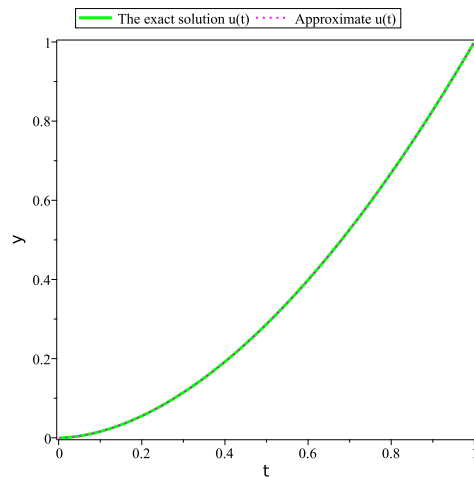
که در آن $f(t)$ به گونه ای است که $u(t) = t^{\frac{5}{2}}$ جواب دقیق معادله است. جواب تقریبی این مسئله با روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته با پارامترهای $\lambda = 1$ و $\beta = 5, \alpha = 0$ برای مقادیر مختلف n محاسبه و نتایج عددی گزارش شده است. در جدول ۲ قدرمطلق خطای جواب به دست آمده از روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته با روش درون یابی براساس چند جمله ای های لاگرانژ [۴] مقایسه شده است. در شکل ۳ نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به همراه قدرمطلق خطا برای $n = 6$ نشان داده شده است. نتایج عددی به دست آمده نشان می دهند که روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روش های ارائه شده از دقت بیشتری برخوردار است.

جدول ۲: قدرمطلق خطای جواب تقریبی در مثال ۲.۵.

t	روش حاضر با $\lambda = 1$ و $\beta = 5, \alpha = 0$			روش لاگرانژ اصلاح شده [۴]
	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$
۰	۰	۰	۰	۰
۰٫۱۲۵	$9,5987E - 5$	$2,6847E - 8$	$5,9741E - 12$	$1,4173E - 5$
۰٫۲۵۰	$5,5401E - 5$	$3,2536E - 8$	$1,3510E - 11$	$2,5488E - 6$
۰٫۳۷۵	$3,2768E - 6$	$2,3698E - 8$	$2,7986E - 11$	$1,6739E - 6$
۰٫۵۰۰	$1,9009E - 5$	$1,7065E - 8$	$1,7945E - 11$	$8,6366E - 7$
۰٫۶۲۵	$1,0168E - 5$	$1,3605E - 8$	$1,0692E - 11$	$7,0525E - 7$
۰٫۷۵۰	$1,1281E - 5$	$1,0323E - 8$	$1,8949E - 11$	$3,8207E - 7$
۰٫۸۷۵	$1,5914E - 5$	$1,7782E - 8$	$1,0836E - 11$	$5,7851E - 7$
۱٫۰۰۰	$3,2069E - 5$	$3,8355E - 8$	$4,5616E - 11$	$8,0376E - 7$



شکل (ب) قدرمطلق خطا



شکل (ا) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۳: نتایج عددی برای $n = 6$ با $\lambda = 1$ و $\beta = 5, \alpha = 0$ در مثال ۲.۵.

مثال ۳.۵. [۲۲] معادله انتگرال ولترای کوردیال نوع سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$t^{\frac{1}{2}}u(t) = f(t) + \int_0^t t^{-1}(1 - t^{-1}s)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}s^2u(s)ds, \quad (3.5)$$

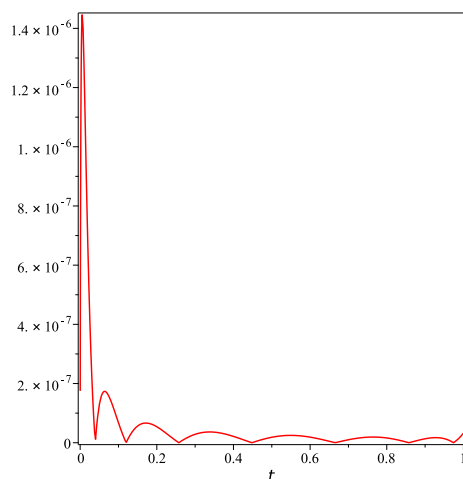
که در آن $f(t) = t^2 - B(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ و $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ تعریف بتا با تعریف $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ است. جواب دقیق این معادله تابع $u(t) = t^{\frac{1}{2}}$ است. با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\beta = 5, \alpha = 0$ در توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته، از روش پیشنهادی برای تقریب جواب معادله (۳.۵) استفاده شده است. نتایج عددی برای مقادیر مختلف n در جدول ۳ و شکل ۴ گزارش شده است. قدرمطلق خطای حاصل از روش توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته در جدول ۳ ارائه شده است. شکل ۴ نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق را به همراه قدرمطلق خطا برای $n = 6$ نمایش می دهد. همچنین، مقایسه ای بین نرم بی نهایت خطای جواب تقریبی به روش معرفی شده با روش ارائه شده در مرجع [۲۲] صورت گرفته که نتیجه آن در جدول ۴ ارائه شده است. از نتایج عددی به دست آمده نتیجه می شود که روش ارائه شده در این مقاله از کارایی و دقت قابل قبولی برخوردار است.

جدول ۴: مقایسه ماکزیمم خطای جواب تقریبی (مثال ۳.۵).

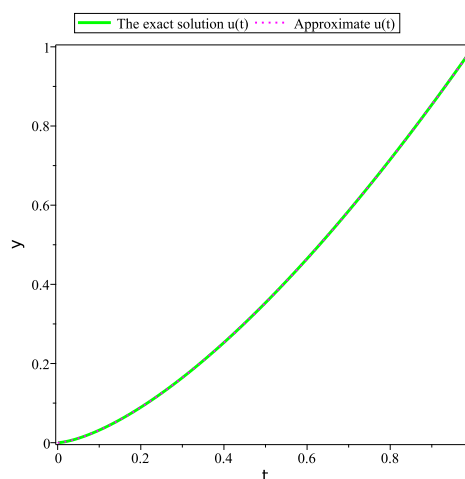
روش حاضر با $n = 6$ و پارامترهای $\lambda = 1$ و $\beta = 5, \alpha = 0$	روش هم محلی چندگامی با $n = 8$ [۲۲]
$1,43 \times 10^{-6}$	$7,28 \times 10^{-4}$

جدول ۳: قدرمطلق خطای جواب تقریبی در مثال ۳.۵.

t	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$
۰	۰	۰	۰
۰/۱	$1.9131E - 3$	$8.3255E - 6$	$6.7293E - 8$
۰/۲	$1.4263E - 3$	$8.3892E - 6$	$5.4004E - 8$
۰/۳	$4.7299E - 4$	$8.3395E - 6$	$2.8510E - 8$
۰/۴	$2.3848E - 4$	$4.0798E - 6$	$2.1348E - 8$
۰/۵	$5.1060E - 4$	$2.4727E - 6$	$1.8491E - 8$
۰/۶	$3.8808E - 4$	$1.3486E - 6$	$1.8857E - 8$
۰/۷	$4.6351E - 5$	$2.7595E - 6$	$1.0044E - 8$
۰/۸	$2.6318E - 4$	$4.1765E - 6$	$1.6091E - 8$
۰/۹	$2.4318E - 4$	$2.1863E - 6$	$1.3365E - 8$
۱/۰	$4.3203E - 4$	$3.8328E - 6$	$3.2222E - 8$



(ب) قدرمطلق خطا



(ا) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۴: نتایج عددی برای $n = 6$ با $\alpha = 0$ ، $\beta = 5$ و $\lambda = 1$ در مثال ۳.۵.

۶ نتیجه گیری

یک روش عددی برای تقریب جواب دسته خاصی از معادلات انتگرال ولترا که معادلات انتگرال ولترای کوردیال نامیده می‌شوند، ارائه شد. این دسته از معادلات انتگرال ولترا در یک نقطه اولیه رفتار تکین دارند که باعث پیچیدگی تقریب جواب آنها می‌شود. برای رفع تکینی این معادلات انتگرال، از توابع متعامد لگاریتمی تعمیم یافته به عنوان توابع پایه در روش طیفی استفاده شده است. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که این توابع متعامد به دلیل دقت مطلوبی که در رویارویی با مسائل با رفتار تکین دارند، گزینه مناسبی برای تقریب جواب این دسته از معادلات انتگرال به شمار می‌روند.

فهرست منابع

- [1] Allaei, S.S., Yang, Z.W. and Brunner, H., 2015. *Journal of Integral Equations and Applications*, 27, pp.325–342. doi: 10.1216/JIE-2015-27-3-325
- [2] Bart, G.R. and Warnock, R.L., 1973. Linear integral equations of the third kind. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 4(4), pp.609–622. doi: 10.1137/0504053

- [3] Bareiss, E.H. and Abu-Shumays, I.K., 1969. On the structure of isotropic transport operators in space. *Transport Theory, SIAM-AMS Proceedings, AMS, Providence, Rhode Island, 1* pp.37–78.
- [4] Bhat, I.A. and Mishra, L.N., 2022. Numerical solutions of Volterra integral equations of third kind and its convergence analysis. *Symmetry, 14(12)*, pp.2600. doi: 10.3390/sym14122600
- [5] Boyd, J.P., 2001. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Dover Publications.
- [6] Boyd, J.P., 1987. Exponentially convergent Fourier-Chebyshev quadrature schemes on bounded and infinite intervals. *Journal of scientific computing, 2*, pp.99–109. doi: 10.1007/BF01061480
- [7] Boyd, J.P., 1987. Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval. *Journal of computational physics, 69(1)*, pp.112–142. doi: 0021999187901586
- [8] Brunner, H., 2017. *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications (Vol. 30)*. Cambridge University Press.
- [9] Case, K.M., and Zweifel, P.F., 1967. *Linear Transport Theory*. Addison–Wesley Publishing Company Reading Massachusetts.
- [10] Chen, S. and Shen, J., 2018. Enriched spectral methods and applications to problems with weakly singular solutions. *Journal of Scientific Computing, 77(3)*, pp.1468–1489. doi: 10.1007/s10915-018-0862-z
- [11] Chen, S. and Shen, J., 2020. An efficient and accurate numerical method for the spectral fractional Laplacian equation. *Journal of Scientific Computing, 82(1)*, pp.17. doi: 10.1007/s10915-019-01122-x
- [12] Chen, S. and Shen, J., 2022. Log orthogonal functions: approximation properties and applications. *IMA Journal of Numerical Analysis, 42(1)*, pp.712–743. doi: 10.1093/imanum/draa087
- [13] Darbenas, Z. and Oliver, M., 2019. Uniqueness of solutions for weakly degenerate cordial Volterra integral equations. *Journal of Integral Equations and Applications, 31*, pp.307–327. doi: 10.1216/JIE-2019-31-3-307
- [14] Diogo, T. and Vainikko, G., 2013. Applicability of spline collocation to cordial Volterra equations. *Mathematical Modelling and Analysis, 18(1)*, pp.1–21. doi: 10.3846/13926292.2013.756072
- [15] Firoozjaee, M.A., 2021, November. Numerical solution of a class of third-kind Volterra integral equations using Ritz approximation. In *Proceedings of the 6th International Conference on Combinatorics, Cryptography, Computer Science and Computing, Tehran, Iran*, pp. 17–18.
- [16] Kangro, U., 2017. Cordial Volterra integral equations and singular fractional integro-differential equations in spaces of analytic functions. *Mathematical Modelling and Analysis, 22(4)*, pp.548–567. doi: 10.3846/13926292.2017.1333970
- [17] Majidian, H., 2017. Efficient quadrature rules for a class of cordial Volterra integral equations: A comparative study. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 43(5)*, pp.1245–1258.
- [18] Morin, P., Nochetto, R.H. and Siebert, K.G., 2002. Convergence of adaptive finite element methods. *SIAM review, 44(4)*, pp.631–658. doi: 10.1137/S0036144502409093
- [19] Nemati, S. and Lima, P.M., 2018. Numerical solution of a third-kind Volterra integral equation using an operational matrix technique. In *2018 European Control Conference (ECC)*, (pp. 3215–3220). IEEE. doi: 10.23919/ECC.2018.8550223

- [20] Nemati, S., Lima, P.M. and Torres, D.F., 2021. Numerical solution of a class of third-kind Volterra integral equations using Jacobi wavelets. *Numerical Algorithms*, 86, pp.675–691. doi: 10.48550/arXiv.2002.04736
- [21] Schumack, M.R., Schultz, W.W. and Boyd, J.P., 1991. Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids. *Journal of Computational Physics*, 94(1), pp.30–58. doi: 10.1016/0021-9991(91)90136-9
- [22] Shayanfar, F., Dastjerdi, H.L. and Ghaini, F.M., 2019. A numerical method for solving Volterra integral equations of the third kind by multistep collocation method. *Computational and Applied Mathematics*, 38, pp.1–13. doi: 10.1007/s40314-019-0947-9
- [23] Shen, J. and Wang, L.L., 2004. Error analysis for mapped Legendre spectral and pseudospectral methods. *SIAM journal on numerical analysis*, 42(1), pp.326–349. doi: 10.1137/S0036142903422065
- [24] Shen, J. and Wang, Y., 2016. Müntz–Galerkin Methods and Applications to Mixed Dirichlet–Neumann Boundary Value Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(4), pp.A2357–A2381. doi:10.1137/15M1052391
- [25] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L., 2011. *Spectral methods: algorithms, analysis and applications (Vol. 41)*. Springer Science & Business Media.
- [26] Strang, G. and Fix, G.J., 1973. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall, Inc.
- [27] Usta, F., 2021. Bernstein approximation technique for numerical solution of Volterra integral equations of the third kind. *Computational and Applied Mathematics*, 40(5), pp.161. doi: 10.1007/s40314-021-01555-x
- [28] Vainikko, G., 2009. Cordial Volterra integral equations 1. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 30(9-10), pp.1145–1172. doi: 10.1080/01630560903393188
- [29] Vainikko, G., 2010. Cordial Volterra integral equations 2. *Numerical functional analysis and optimization*, 31(2), pp.191–219. doi: 10.1080/01630561003666234
- [30] Vainikko, G., 2010. Spline collocation for cordial Volterra integral equations. *Numerical functional analysis and optimization*, 31(3), pp.313–338. doi: 10.1080/01630561003757710
- [31] Vainikko, G., 2010. Spline collocation-interpolation method for linear and nonlinear cordial Volterra integral equations. *Numerical functional analysis and optimization*, 32(1), pp.83–109. doi: 10.1080/01630563.2010.526412
- [32] Wang, L.L. and Shen, J., 2005. Error analysis for mapped Jacobi spectral methods. *Journal of Scientific Computing*, 24, pp.183–218. doi: 10.1007/s10915-004-4613-y
- [33] Yang, Z.W., 2015. Second-kind linear Volterra integral equations with noncompact operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 36(1), pp.104–131. doi: 10.1080/01630563.2014.951769



A numerical method based on generalized log orthogonal functions for solving cordial Volterra integral equations of the third kind

Saeideh Tayebinejad⁽¹⁾ and Fakhroddin Mohammadi^{(1) 2}

⁽¹⁾Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran

Communicated by: Gholamreza Hojjati

Received: 18 October 2023

Accepted: 27 September 2024

Abstract: This paper is devoted to solving cordial Volterra integral equations of the third kind. First, generalized log orthogonal functions are introduced and their properties are investigated. Then, by using this kind of orthogonal function as a basis function in the spectral collocation method, a numerical method is proposed to solve this kind of integral equation. The approximation error and convergence analysis of the presented method are investigated. To verify the efficiency and accuracy of the presented method several numerical examples have been considered. A comparison of computational results demonstrates that the current method is less expensive and more efficient than some previously proposed methods.

Keywords: Cordial Volterra integral equations, Generalized log orthogonal functions, Collocation method.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

²Corresponding author

E-mail addresses: (S. Tayebinejad) s.tayebi65@yahoo.com, (F. Mohammadi) f.mohammadi62@gmail.com