مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۱۴۴-۱۵۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.47095.2279

عملگرهای شرطی وزن‌دار روی فضای نیم‌هیلبرت $L^2(\Sigma)$

زهرا معیری‌زاده [۱]
گروه ریاضی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران
دبیر مسئول: غلامرضا آقاملایی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۳/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۲۱

چکیده: در این مقاله، عملگرهای شرطی وزن‌دار را روی فضای نیم‌هیلبرت $L^2(\Sigma)$ بررسی می‌کنیم، آنگاه شرایط لازم و کافی برای خودالحاقی، ایزومتری بودن و نرمال بودن این نوع عملگرها را روی این فضا ارائه می‌دهیم.
واژه‌هاي كليدي: فضاي نیم‌هیلبرت، عملگر امید شرطی، خودالحاقی، نرمال.
رده‌بندی ریاضی: 47B20,46C05,47A0

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ جبر همهٔ عملگرهای خطی کران‌دار روی فضای هیلبرت مختلط $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ بوده و همچنین فرض کنید $\mathbb{B}(\mathcal{H})^+ = \{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \langle Ax, x\rangle \geq 0; \forall x \in \mathcal{H}\}$ مجموعهٔ عملگرهای مثبت باشد. به‌ازای هر $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ برد آن را با نماد $\mathcal{R}(T)$، فضای پوچ آن را با $\mathcal{N}(T)$ و الحاقی آن را با T^* نمایش می‌دهیم. برای زیرفضای بستهٔ $\mathcal{M}$ از $\mathcal{H}$، $P_{\mathcal{M}}$ نشان‌دهندهٔ تصویر متعامد به‌روی $\mathcal{M}$ است. هر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^+$ یک نیم‌ضرب داخلی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به‌صورت $\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, y\rangle$ برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ القا می‌کند. نیم‌نرم القا شده توسط نیم‌ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ به‌فرم $\|A^{1/2}x\|^2 = \langle x, x\rangle_A = \|x\|_A^2$ برای هر $x \in \mathcal{H}$ ([۲]) می‌باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که $\|\cdot\|_A$ یک نرم روی $\mathcal{H}$ است، اگروتنها اگر A یک‌به‌یک باشد. علاوه بر این به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_A)$ کامل است اگروتنها اگر A دارای برد بسته باشد. برای $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ می‌گوییم که $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ یک A- الحاقی T است اگر برای هر $x, y \in \mathcal{H}$، $\langle Tx, y\rangle_A = \langle x, Xy\rangle_A$؛ یا به‌طور معادل، $AX = T^*A$. با استفاده از قضیهٔ مشهور دوگلاس[۳] معادلهٔ $AX = T^*A$ دارای جواب $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ اگروتنها اگر $\mathcal{R}(T^*A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ اگروتنها اگر برای $\lambda > 0$ و هر $x \in \mathcal{H}$، $\|ATx\| \leq \lambda\|Ax\|$. در این حالت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mathcal{R}(T^*A^{n+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^n)$. در بین جواب‌های معادلهٔ

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Z. Moayyerizadeh) moayerizadeh.za@lu.ac.ir

$AX = T^*A$، یک عملگر منحصر به‌فرد $T^\sharp \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ وجو دارد به‌طوری که $AT^\sharp = T^*A$، $\mathcal{R}(T^\sharp) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ و $\mathcal{N}(T^\sharp) = \mathcal{N}(T^*A)$. جوابی مانند $T^\sharp$ جواب تحویل یافته $AX = T^*A$ نامیده می‌شود. قرار دهید

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) &= \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H});\ \exists\lambda > ۰;\ \|ATx\| \leq \lambda\|Ax\|, \forall x \in \mathcal{H}\};\\
\mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H}) &= \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H});\ \exists\lambda > ۰;\ \|Tx\|_A \leq \lambda\|x\|_A, \forall x \in \mathcal{H}\};\\
\mathbb{B}^A(\mathcal{H}) &= \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H});\ \exists\lambda > ۰;\ \|Tx\|_A \leq \lambda\|x\|_A, \forall x \in \overline{\mathcal{R}(A)}\}.
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیهٔ ۱.۵ در [۶] داریم $\mathcal{R}(T^*A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ایجاب می‌کند $\mathcal{R}(T^*A^{۱/۲}) \subseteq \mathcal{R}(A^{۱/۲})$. بنابراین

$$\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H}) \subseteq \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \mathcal{R}(P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}T^*A^{۱/۲}) \subseteq \mathcal{R}(A^{۱/۲})\} = \mathbb{B}^A(\mathcal{H}).$$

برای $T \in \mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H})$ و $S \in \mathbb{B}^A(\mathcal{H})$ به‌ترتیب تعریف کنید $\|T\|_A = \sup\{\|Tx\|_A;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\|_A = ۱\}$ و $\|S\|^A = \sup\{\|Sx\|_A;\ x \in \overline{\mathcal{R}(A)},\ \|x\|_A = ۱\}$. عملگرهای متعلق به $\mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H})$، عملگرهای A- کران‌دار نامیده می‌شوند. فرض کنید T، A- کران‌دار و A دارای برد بسته باشد. چون $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^{۱/۲})$. در این‌صورت

$$\mathcal{R}(T^*A) = T^*\mathcal{R}(A) = T^*\mathcal{R}(A^{۱/۲}) = \mathcal{R}(T^*A^{۱/۲}) \subseteq \mathcal{R}(A^{۱/۲}) = \mathcal{R}(A),$$

و در نتیجه $T \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$. بنابراین، در این حالت $\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) = \mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H})$. به‌طور کلی

$$\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_{A^{۱/۲}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}^A(\mathcal{H}).$$

معکوس مور-پنروز $T \in B(\mathcal{H})$ عملگر یکتای $T^\dagger = (T_{|\mathcal{N}(T)^\perp})^{-۱}P_{\overline{\mathcal{R}(T)}}$ است، که در تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$TT^\dagger T = T, T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger, (TT^\dagger)^* = TT^\dagger = P_{\overline{\mathcal{R}(T)}}(T^\dagger T)^* = T^\dagger T = P_{\overline{\mathcal{R}(T^*)}}.$$

همچنین مشهور است که $T^\dagger \in B(\mathcal{H})$ اگروتنها اگر T دارای برد بسته باشد. فرض کنید $T \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$. در این‌صورت $A(A^\dagger T^*A) = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}T^*A = T^*A$ و $\mathcal{R}(A^\dagger T^*A) \subseteq \mathcal{R}(A^\dagger) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$. علاوه بر این، اگر $A^\dagger T^*Ax = ۰$، آنگاه $T^*Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}T^*Ax = AA^\dagger T^*Ax = ۰$. بنابراین $\mathcal{N}(A^\dagger T^*A) = \mathcal{N}(T^*A)$. در نتیجه

$$T^\sharp = A^\dagger T^*A.$$

فرض کنید $A = M_{g\bar{v}}EM_v \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^+$. در این‌صورت بنابر [۱]، $T = M_wEM_u \in \mathbb{B}(L^۲(\Sigma))$ یک A- ایزومتری نامیده می شود اگروتنها اگر $T^*AT = A$؛ یا به‌طور معادل برای هر $f \in L^۲(\Sigma)$، $\|Tf\|_A = \|f\|_A$.

فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی کامل باشد و فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیر σ- جبر متناهی از Σ باشد. از نماد $L^۲(\mathcal{A})$ برای نشان دادن فضای $L^۲(X, \mathcal{A}, \mu_{|\mathcal{A}})$ استفاده می‌کنیم و بنابراین به‌جای $\mu_{|\mathcal{A}}$ می‌نویسیم μ. همهٔ مقایسه‌ها بین دو تابع یا دو مجموعه به‌صورت تقریباً همه جا نسبت به اندازهٔ μ در نظر گرفته می‌شوند. فضای متشکل از همهٔ توابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X را با نماد $L^۰(\Sigma)$ نشان می‌دهیم. برای هر $f \in L^۰(\Sigma)$ تکیه‌گاه آن را به‌صورت $\sigma(f) = \{x \in X : f(x) \neq ۰\}$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $E^{\mathcal{A}} : L^۲(\Sigma) \to L^۲(\mathcal{A})$ عملگر امید شرطی باشد، بنابراین برای $f \in L^۲(\Sigma)$، $E(f)$ یک تابع $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر یکتاست به‌طوری که برای هر $A \in \mathcal{A}$ داریم $\int_A f d\mu = \int_A E^{\mathcal{A}}(f)d\mu$. این عملگر $E = E^{\mathcal{A}}$ روی فضای $L^۲(\Sigma)$ یک عملگر مثبت و تصویر متعامد از $L^۲(\Sigma)$ بروی $L^۲(\mathcal{A})$ است. توجه کنید که $\mathcal{D}(E)$، شامل $L^۲(\Sigma) \cup \{f \in L^۰(\Sigma) : f \geq ۰\}$ می‌باشد. جزئیات بیشتر دربارهٔ E در [۷، ۱۰، ۱۲] ارائه شده است. این عملگر یکی از ابزارهای اصلی کار ما خواهد بود، بنابراین برخی از خواص مهم آن را در اینجا بیان می‌کنیم. در خواص زیر فرض براین است که $f, g, fg \in \mathcal{D}(E)$.

- $\chi_A f = f$ هرجا که $\sigma(f) \subseteq A \in \Sigma$.
- $E(g) = g$ اگروتنها اگر g، $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر باشد.
- اگر g، $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $E(fg) = E(f)g$.

∘ اگر $f \geq 0$ آنگاه $E(f) \geq 0$ و $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$.
∘ $|E(fg)|^2 \leq E(|f|^2)E(|g|^2)$ (نامساوی کشی-شوارتز شرطی)، و در نتیجه

$$\sigma(fg) \subseteq \sigma(E(|f|^2)) \cap \sigma(E(|g|^2)).$$

عملگرهای امید شرطی ارتباط بسیار نزدیکی با عملگرهای ضربی و عملگرهای انتگرال دارند. فرض کنید $1 < p < \infty$. در [۱۱] نشان داده شده است که اگر $T \in \mathbb{B}(L^p(\Sigma))$، $T(L^\infty(\Sigma)) \subset L^\infty(\Sigma)$ و برای هر $f, g \in L^\infty(\Sigma)$، $T(fT(g)) = T(f)T(g)$، آنگاه برای $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$، $T = E^{\mathcal{A}}M_u$. برای $w, u \in \mathcal{D}(E)$، نگاشت

$$T : L^2(\Sigma) \supseteq \mathcal{D}(T) \to L^2(\Sigma)$$

که برای $f \in \mathcal{D}(T) = \{f \in L^2(\Sigma) : T(f) \in L^2(\Sigma)\}$ به‌فرم $T(f) = wE(uf)$ میباشد، خوش‌تعریف و خطی است. این عملگر، عملگر شرطی وزن‌دار القا شده توسط جفت (w, u) نامیده می‌شود ([۷، ۸، ۱۰]).

در این مقاله به مطالعهٔ عملگرهای شرطی وزن‌دار روی فضای $L^2(\Sigma)$ با نیم‌ضرب داخلی که توسط عملگر مثبت کران‌دار $A = M_{g\bar{v}}EM_v$ که در آن $0 \leq g \in L^0(\mathcal{A})$ می‌پردازیم. به‌بیانی دیگر برای هر $f, h \in L^2(\Sigma)$، داریم $\langle f, h\rangle_A = \int g\overline{hv}E(vf)d\mu$. بنابراین با استفاده از نمایش ماتریسی، شرایط لازم و کافی برای A -خودالحاقی، A -ایزومتری بودن و A -نرمال بودن این نوع عملگرها را روی $L^2(\Sigma)$ به‌عنوان یک فضای نیم‌هیلبرت به‌دست می‌آوریم. سپس مثال‌هایی را در رابطه با برخی نتایج ارائه می‌دهیم.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید $E = E^{\mathcal{A}}$ و $u, w \in L^0(\Sigma)$ به‌طوری که $uL^2(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}(E)$، که در آن منظور از $\mathcal{D}(E)$ دامنه E است. یادآوری می‌کنیم که عملگر $T : L^2(\Sigma) \to L^0(\Sigma)$ تعریف شده به فرم $T = T_{w,u} = M_wEM_u$ القا شده توسط جفت (u, w) عملگر شرطی وزن‌دار نامیده می‌شود، که در آن M_w و M_u عملگرهای ضربی هستند مشهور است که [۵] $T \in \mathbb{B}(L^2(\Sigma))$ اگروتنها اگر $E(|w|^2)E(|u|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})$. در این حالت $\|T\|^2 = \|E(|w|^2)E(|u|^2)\|_\infty$. قرار دهید

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \{M_wEM_u : u, w \in L^0(\Sigma), uL^2(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}(E), E(|w|^2)E(|u|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})\}.$$

در این‌صورت $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{B}(L^2(\Sigma))$.
از اینجا به‌بعد فرض می‌کنیم که $A = M_{g\bar{v}}EM_v$، که در آن به‌ازای $0 \leq g \in L^0(\mathcal{A})$ داریم $gE(|v|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})$. بنابراین با استفاده از قضیهٔ ۲۴.۲ در [۹] نتیجه می‌شود که A مثبت است. فرض کنید f و g توابع متناهی-مقدار باشند. در این‌صورت با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز شرطی داریم:

$$\sigma(E(fg)) \subseteq \sigma(E(|f|^2)) \cap \sigma(E(|g|^2)).$$

علاوه بر این، اگر $A \in \Sigma$ و $\sigma(f) \subseteq A$ آنگاه $\chi_A f = \chi_{(\sigma(f)\cap A)} f = \chi_{\sigma(f)} f = f$. با توجه به تجزیهٔ جمع مستقیم $L^2(\Sigma) = \mathcal{R}(E) \oplus \mathcal{N}(E)$ برای هر $f \in L^2(\Sigma)$ می‌توان به‌طور یکتایی نوشت $f = f_1 + f_2$، که در آن $f_1 = E(f) \in L^2(\mathcal{A})$ و $f_2 = f - f_1 \in \mathcal{N}(E)$. توجه داشته باشید که $\mathcal{R}(E) = L^2(\mathcal{A}), \sigma(f_1) \in \mathcal{A}$ و $E(f_2) = 0$. بنابراین، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

نتیجه ۱.۲. برای $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(E)$ و $S_i = \sigma(E(|f_i|^2))$ به‌ازای $i = 1, 2$، داریم
(الف) $f_i\chi_{S_i} = f_i$ برای $i = 1, 2$،
(ب) $E(f_1f_2)\chi_{S_i} = E(f_1f_2)$.

لم ۲.۲. فرض کنید $G = E(|v|^2)E(|u|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})$. در این‌صورت احکام زیر معادلند:
(الف) $\bar{v_2}E(vw)E(u_2f) = \bar{u_2}E(\overline{vw})E(v_2f)$ برای هر $f \in \mathcal{N}(E)$،
(ب) $\bar{u_2}E(\overline{vw})E(|v_2|^2) = \bar{v_2}E(vw)E(u_2\bar{v_2})$.

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف): چون $\mathcal{A}$، σ- متناهی است، پس $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری که $A_n \subseteq A_{n+1}$، $X = \cup_n A_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mu(A_n) < \infty$. در این حالت $\chi_{A_n} \nearrow \chi_X$. قراردهید $f_n = \bar{v}_2 \sqrt{E(|u_2|^2)}\chi_{A_n}$. بنابراین داریم

$$\|f_n\|^2 = \int_{A_n} E(|v_2|^2)E(|u_2|^2)d\mu \le \|G\|_\infty \mu(A_n) < \infty,$$

در نتیجه $\sigma(E(u\bar{v}))$ و $\sigma(u)$ مشمول در $\sigma(E(|u|^2))$ می‌باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}(\text{الف}) &\Longrightarrow \bar{v}_2 E(vw)E(u_2\bar{v}_2\sqrt{E(|u_2|^2)}\chi_{A_n}) = \bar{u}_2 E(\overline{vw})E(v_2\bar{v}_2\sqrt{E(|u_2|^2)}\chi_{A_n})\\ &\Longrightarrow \bar{v}_2 E(vw)E(u_2\bar{v}_2)\chi_{A_n} = \bar{u}_2 E(\overline{vw})E(|v_2|^2)\chi_{A_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که هرگاه $n \to \infty$، آنگاه $\bar{v}_2 E(vw)E(u_2\bar{v}_2) = \bar{u}_2 E(\overline{vw})E(|v_2|^2)$.
(الف) $\Rightarrow$ (ب): ابتدا طرفین تساوی (ب) را در v_2 ضرب کرده و و سپس با اعمال عملگر E خواهیم داشت $E(v_2\bar{u}_2)E(|v_2|^2)E(\overline{vw}) = E(|v_2|^2)E(u_2\bar{v}_2)E(vw)$ بنابراین با استفاده از نتیجهٔ (۱.۲) داریم

$$E(v_2\bar{u}_2)E(\overline{vw}) = E(u_2\bar{v}_2)E(vw). \tag{۱.۲}$$

براي $f \in \mathcal{N}(E)$. چون $\sigma(E(vf))$ و $\sigma(v)$ مشمول در $\sigma(E(|v|^2))$ هستند. در این‌صورت، بنابر مزدوج رابطهٔ (ب) به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}u_2 E(|v_2|^2)E(vw) = v_2 E(v_2\bar{u}_2)E(\overline{vw}) &\xrightarrow[E]{\times f} E(u_2 f)E(|v_2|^2)E(vw) = E(v_2 f)E(v_2\bar{u}_2)E(\overline{vw})\\ &\xrightarrow[(1.2)]{\times \bar{v}_2} \bar{v}_2 E(u_2 f)E(|v_2|^2)E(vw) = \bar{v}_2 E(v_2 f)E(u_2\bar{v}_2)E(vw)\\ &\xrightarrow{(c)} \bar{v}_2 E(vw)E(|v_2|^2)E(u_2 f) = \bar{u}_2 E(\overline{vw})E(|v_2|^2)E(v_2 f).\end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

دقت کنید که برای $T = M_w E M_u$ و $A = M_{g\bar{v}} E M_v$، داریم $AT = M_{g\bar{v}E(vw)} E M_u$ و در نتیجه برای هر $f \in L^2(\Sigma)$ خواهیم داشت:

$$\|f\|_A^2 = \langle Af, f\rangle = \int_X g\bar{v}E(vf)\bar{f}d\mu = \int_X g|E(vf)|^2 d\mu.$$

گزاره ۳.۲. فرض کنید $T = M_w E M_u \in \mathcal{K}$ و $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^+$. در این‌صورت، اگر $uE(vw) = vE(uw)$ آنگاه $T \in \mathbb{B}_A(L^2(\Sigma))$.

اثبات. فرض کنید $f \in L^2(\Sigma)$. در این صورت، داریم

$$\begin{aligned}\|ATf\|^2 = \langle ATf, ATf\rangle &= \int_X |g\bar{v}E(vw)|^2|E(uf)|^2 d\mu\\ &= \int_X |g\bar{v}|^2|E(uE(vw)f)|^2 d\mu\\ &= \int_X gE(|w|^2)vE(uf)\bar{v}E(\overline{uf})d\mu\\ &= \int_X |E(uw)|^2)|g\bar{v}|^2|E(vf)|^2 d\mu\\ &\le \|T\|^2 \int_X |g\bar{v}|^2|E(vf)|^2 d\mu = \|T\|^2\|Af\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین $T \in \mathbb{B}_A(L^2(\Sigma))$. $\square$

حال می‌خواهیم شرایط لازم و کافی برای A- خودالحاقی عملگر T را به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا نمایش ماتریسی $AT = M_{g\bar{v}E(\overline{vw})}EM_u \in \mathbb{B}(L^2(\Sigma))$ نسبت به تجزیهٔ $L^2(\Sigma) = L^2(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}(E)$ را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EAT|_{L^2(\mathcal{A})} & EAT|_{\mathcal{N}(E)} \\ (I-E)AT|_{L^2(\mathcal{A})} & (I-E)AT|_{\mathcal{N}(E)} \end{bmatrix}.$$

با جایگزینی $E(f)$ و $f - E(f)$ به‌ترتیب توسط f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم

$$AT = \begin{bmatrix} M_{g\bar{v}_1u_1E(vw)} & EM_{g\bar{v}_1u_2E(vw)} \\ M_{g\bar{v}_2u_1E(vw)} & M_{g\bar{v}_2E(vw)}EM_{u_2} \end{bmatrix}. \tag{۲.۲}$$

آن‌گاه بنابر (۲.۲) داریم

$$T^*A = \begin{bmatrix} M_{gv_1\bar{u}_1E(\overline{vw})} & EM_{gv_2\bar{u}_1E(\overline{vw})} \\ M_{gv_1\bar{u}_2E(\overline{vw})} & M_{g\bar{u}_2E(\overline{vw})}EM_{v_2} \end{bmatrix}. \tag{۳.۲}$$

نتیجهٔ بعدی به‌طور مستقیم از (۲.۲) و (۳.۲) حاصل می‌شود

نتیجه ۴.۲. فرض کنید $T \in \mathcal{K}$، در این‌صورت T، A- خودالحاق است اگروتنها اگر احکام زیر درست باشند:
(الف) $\bar{v}_1u_1E(vw) = v_1\bar{u}_1E(\overline{vw})$،
(ب) $\bar{v}_1u_2E(vw) = v_2\bar{u}_1E(\overline{vw})$،
(ج) $\bar{v}_2E(vw)E(u_2f) = \bar{u}_2E(\overline{vw})E(v_2f)$ برای هر $f \in \mathcal{N}(E)$.

لم ۵.۲. $uE(\bar{v}E(vw)) = vE(\bar{u}E(\overline{vw}))$ اگروتنها اگر $u_1\bar{v}_1E(vw) = v_1\bar{u}_1E(\overline{vw})$، و $u_2\bar{v}_1E(vw) = v_2\bar{u}_1E(\overline{vw})$.

اثبات. برای هر $1 \leq i \neq j \leq 2$ داریم $u_iv_j \in \mathcal{N}(E)$ و چون $v_1u_1 \in L^2(\mathcal{A})$. بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} uE(\bar{v}E(vw)) = vE(\bar{u}E(\overline{vw})) &\iff (u_1+u_2)\bar{v}_1E(vw) = (v_1+v_2)\bar{u}_1E(\overline{vw}) \\ &\iff u_1\bar{v}_1E(vw) + u_2\bar{v}_1E(vw) = v_1\bar{u}_1E(\overline{vw}) + v_2\bar{u}_1E(\overline{vw}) \\ &\iff u_1\bar{v}_1E(vw) = v_1\bar{u}_1E(\overline{vw}), u_2\bar{v}_1E(vw) = v_2\bar{u}_1E(\overline{vw}). \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

لم ۶.۲. اگر $\bar{u}E(\overline{vw})E(|v|^2) = \bar{v}E(vw)E(u\bar{v})$ آن‌گاه، احکام زیر درست هستند:
(الف) $E(u\bar{v})E(vw) = E(v\bar{u})E(\overline{vw})$،
(ب) $\bar{u}E(\overline{vw})E(v) = \bar{v}E(vw)E(u)$.

اثبات. (الف) ابتدا طرفین $\bar{u}E(\overline{vw})E(|v|^2) = \bar{v}E(vw)E(u\bar{v})$ را در v ضرب کرده و سپس با اعمال عملگر E به‌دست می‌آوریم: $E(\bar{u}v)E(\overline{vw})E(|v|^2) = E(|v|^2)E(vw)E(u\bar{v})$. حال اگر قرار دهیم $S = \sigma(E(|v|^2))$. در این‌صورت

$$E(\bar{u}v)E(\overline{vw})E(|v|^2)\chi_S = E(|v|^2)E(vw)E(u\bar{v})\chi_S,$$

بنابراین $E(\bar{u}v)E(\overline{vw}) = E(u\bar{v})E(vw)$.
(ب) می‌دانیم که $\bar{v}\chi_S = \bar{v}$. در این صورت بنابر فرض و قسمت (الف) داریم:

$$\begin{aligned}\overline{uE(vw)}E(v) &= \overline{uE(vw)}E(v)\chi_S = E(v)\frac{\bar{v}E(u\bar{v})E(vw)}{E(|v|^2)}\chi_S\\ &= \frac{\bar{v}E(vE(u\bar{v})E(vw)}{E(|v|^2)}\chi_S\\ &= \frac{\bar{v}E(vE(v\bar{u})E(\overline{vw})}{E(|v|^2)}\chi_S\\ &= \frac{\bar{v}E(uE(|v|^2)E(vw)}{E(|v|^2)}\chi_S\\ &= \bar{v}E(u)E(vw)\chi_S = \bar{v}E(u)E(vw).\end{aligned}$$

□

گزاره ۷.۲. احکام زیر هم‌ارزند:
(الف) $\bar{u}E(\overline{vw})E(|v|^2) = \bar{v}E(vw)E(u\bar{v})$،
(ب) $\bar{u}_2E(\overline{vw})E(|v_2|^2) = \bar{v}_2E(vw)E(u_2\bar{v}_2)$.

اثبات. با انجام محاسبات مستقیم داریم

$$\begin{aligned}&(\bar{u}_1+\bar{u}_2)(|v_1|^2+|v_2|^2)E(\overline{vw}) = (\bar{v}_1+\bar{v}_2)(u_1\bar{v}_1 + E(u_2\bar{v}_2)E(\overline{vw})\\ &\Leftrightarrow \overline{u_1v_1}v_1E(\overline{vw}) + \overline{u_2v_1}v_1E(\overline{vw}) + \overline{u_1}E(|v_2|^2)(\overline{vw}) + \overline{u_2}E(|v_2|^2)E(\overline{vw})\\ &= \overline{v_1v_1}u_1E(vw) + \overline{v_1}E(u_2\bar{v}_2)E(vw) + \overline{v_2v_1}u_1E(vw) + \overline{v_2}E(u_2\bar{v}_2)E(vw).\end{aligned}$$

با استفاده از لم (۶.۲) این معادل است با $\bar{u}_2E(\overline{vw})E(|v_2|^2) = \bar{v}_2E(vw)E(u_2\bar{v}_2)$. □

در قضیهٔ بعدی شرط لازم و کافی برای A-خودالحاقی عملگر شرطی وزن‌دار، $T = M_wEM_u$ را ارائه می‌دهیم:

قضیه ۸.۲. فرض کنید $G = E(|v|^2)E(|u|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})$ و $T = M_wEM_u \in \mathcal{K}$. در این صورت T، A-خودالحاق است اگروتنها اگر احکام زیر درست باشند:
(الف) $uE(\bar{v}E(vw)) = vE(\bar{u}E(\overline{vw}))$،
(ب) $\bar{u}E(\overline{vw})E(|v|^2) = \bar{v}E(vw)E(u\bar{v})$.

اثبات. فرض کنید T، A-خودالحاق باشد، بنابر نتیجهٔ (۴.۲) داریم $v_1\bar{u}_1E(\overline{vw}) = \bar{v}_1u_1E(vw)$ و $\bar{v}_1u_2E(vw) = v_2\bar{u}_1E(\overline{vw})$. و طبق لم (۵.۲) این شرایط معادل هستند با این که $uE(\bar{v}E(vw)) = vE(\bar{u}E(\overline{vw}))$، و این حکم (الف) را ثابت می‌کند. از طرف دیگر A-خودالحاق بودن T، قسمت (ج) در نتیجهٔ (۴.۲) را نیز ایجاب می‌کند که بنابر لم (۲.۲) این شرط با درستی رابطهٔ $\bar{u}_2E(\overline{vw})E(|v_2|^2) = \bar{v}_2E(vw)E(u_2\bar{v}_2)$ معادل است. بنابراین طبق گزارهٔ (۷.۲) به‌سادگی حکم قسمت (ب) ثابت می‌شود.
برعکس: طبق فرض داریم $uE(\bar{v}E(vw)) = vE(\bar{u}E(\overline{vw}))$، در این صورت با استفاده از لم (۵.۲) خواهیم داشت: $\bar{v}_1u_1E(vw) = v_1\bar{u}_1E(\overline{vw})$، $\bar{v}_1u_2E(vw) = v_2\bar{u}_1E(\overline{vw})$. همچنین، بنابر فرض قسمت (ب) داریم: $\bar{u}E(\overline{vw})E(|v|^2) = \bar{v}E(vw)E(u\bar{v})$. این با استفاده از لم (۲.۲) و (۷.۲) قسمت (ج) نتیجهٔ (۴.۲) را ایجاب می‌کنند. در این‌صورت بنابر (۴.۲) به‌آسانی مشاهده می‌شود که T، A-خودالحاق است. □

توجه کنید که $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ یک A-ایزومتری است اگروتنها اگر $T^*AT = A$. بنابراین با نوشتن فرم ماتریسی T^*AT نسبت به تجزیه مستقیم $L^2(\Sigma) = L^2(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}(E)$ و مقایسه آن با فرم ماتریسی A شرایط لازم و کافی

برای A -ایزومتری بودن این نوع عملگرها را به‌دست می‌آوریم. داریم

$$(T^*A)T = \begin{bmatrix} M_{g\bar{u}_1 v_1 E(\overline{vw})} & EM_{gv_2\bar{u}_1 E(\overline{vw})} \\ M_{g\bar{u}_2 v_1 E(\overline{vw})} & M_{g\bar{u}_2 E(\overline{vw})} EM_{v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{w_1 u_1} & EM_{w_1 u_2} \\ M_{w_2 u_1} & M_{w_2} EM_{u_2} \end{bmatrix} \qquad (۴.۲)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$T^*AT = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_1 &= M_{g\bar{u}_1 v_1 E(\overline{vw})} M_{w_1 u_1} + EM_{gv_2\bar{u}_1 E(\overline{vw})} M_{w_2} M_{u_1} \\ &= M_{g|u_1|^2 (v_1 w_1 E(\overline{vw}) + E(v_2 w_2) E(\overline{vw}))} \\ &= M_{g|u_1|^2 |E(vw)|^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= M_{g\bar{u}_1 v_1 E(\overline{vw})} EM_{w_1 u_2} + EM_{gv_2\bar{u}_1 E(\overline{vw})} M_{w_2} EM_{u_2} \\ &= M_{g\bar{u}_1 E(\overline{vw})(v_1 w_1 + E(v_2 w_2))} EM_{u_2} \\ &= EM_{g\bar{u}_1 u_2 |E(vw)|^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= M_{g\bar{u}_2 v_1 E(\overline{vw})} M_{w_1 u_1} + M_{g\bar{u}_2 E(\overline{vw})} EM_{v_2} M_{w_2} u_1 \\ &= M_{g\bar{u}_2 u_1 E(\overline{vw})(v_1 w_1 + E(v_2 w_2)} \\ &= M_{g\bar{u}_2 u_1 |E(vw)|^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= M_{g\bar{u}_2 v_1 E(\overline{vw})} EM_{w_1 u_2} + M_{g\bar{u}_2 E(\overline{vw})} EM_{v_2} M_{w_2} EM_{u_2} \\ &= M_{g\bar{u}_2 E(\overline{vw})(v_1 w_1 + E(v_2 w_2)} EM_{u_2} \\ &= M_{g\bar{u}_2 (|E(vw)|^2)} EM_{u_2}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$T^*AT = \begin{bmatrix} M_{g|u_1|^2 |E(vw)|^2} & EM_{g\bar{u}_1 u_2 |E(vw)|^2} \\ M_{g\bar{u}_2 u_1 |E(vw)|^2} & M_{g\bar{u}_2 (|E(vw)|^2)} EM_{u_2} \end{bmatrix}.$$

چون نمایش ماتریسی $A = M_{g\bar{v}} EM_v$ به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} M_{g|v_1|^2} & EM_{gv_2\bar{v}_1} \\ M_{g\bar{v}_2 v_1} & M_{\bar{v}_2} EM_{gv_2} \end{bmatrix}, \qquad (۵.۲)$$

می‌باشد، بنابراین $T = M_w EM_u \in \mathbb{B}_A(L^2(\Sigma))$، A -ایزومتری است اگروتنها اگر شرایط زیر درست باشند:

(الف) $g|u_1|^2 |E(vw)|^2 = g|v_1|^2$،

(ب) $g\bar{u}_2 u_1 |E(vw)|^2 = g\overline{v_2} v_1$،

(ج) $g\bar{u}_2(|E(vw)|^2) E(u_2 f) = g\bar{v}_2 E(v_2 f)$، برای هر $f \in \mathcal{N}(E)$.

و از مطالب فوق، قضیهٔ بعدی را نتیجه می‌گیریم

قضیه ۹.۲. فرض کنید $T = M_w E M_u \in \mathbb{B}_A(L^2(\Sigma))$ و $A = M_{g\bar{v}} E M_v \in \mathbb{B}(L^2(\Sigma))$. در این‌صورت، T A-ایزومتری است اگروتنها اگر $w = \frac{\bar{v}}{E(|v|^2)}\chi_{\sigma(E|v|^2)}$ و $u = v$.

اکنون می‌خواهیم شرایط لازم و کافی برای A-نرمال بودن عملگر $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ را به‌دست آوریم. بنابر [۱۳] داریم $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر A-نرمال است اگروتنها اگر $T^\sharp T = TT^\sharp$. می‌دانیم که $T^\sharp = A^\dagger T^* A$.

از طرفی بنابر [۴] داریم: نمایش ماتریسی $A^\dagger$ نسبت به تجزیه مستقیم $L^2(\Sigma) = L^2(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}(E)$ به‌فرم

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} M_{zg|v_1|^2} & M_{zg} E M_{v_2\bar{v}_1} \\ M_{zg\bar{v}_2 v_1} & M_{zg\bar{v}_2} E M_{v_2} \end{bmatrix}, \tag{۶.۲}$$

است، که در اینجا $z = \frac{\chi_{\sigma(S)}}{S}$ و $S = (gE(|v|^2))^2$، در نتیجه با استفاده از (۶.۲) و (۳.۲) و انجام برخی محاسبات مستقیم خواهیم داشت

$$T^\sharp = A^\dagger T^* A = \begin{bmatrix} M_{zg^2|v_1|^2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} & EM_{zg^2\bar{v}_1 v_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} \\ M_{zg^2\bar{v}_2 v_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} & M_{zg^2\bar{v}_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} EM_{v_2} \end{bmatrix}. \tag{۷.۲}$$

براي بررسي شرایط A-نرمال بودن عملگر شرطي وزن‌دار $T = M_w E M_u$، ابتدا ماتریس نمایش عملگر $T^\sharp T$ را به‌دست می‌آوریم:

$$T^\sharp T = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_1 &= M_{zg^2\bar{v}_1 E(\overline{vw})v_1 E(v\bar{u})} M_{w_1u_1} + EM_{zg^2 v_2\bar{v}_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} M_{w_2u_1} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_1 u_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})(v_1w_1 + E(v_2w_2))} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_1 u_1 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= M_{zg^2\bar{v}_1 E(\overline{vw})v_1 E(v\bar{u})} EM_{w_1u_2} + EM_{zg^2 v_2\bar{v}_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} M_{w_2} EM_{u_2} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})(v_1w_1 + E(v_2w_2))} EM_{u_2} \\ &= EM_{zg^2\bar{v}_1 u_2 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= M_{zg^2 v_1\bar{v}_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} M_{w_1u_1} + M_{zg^2\bar{v}_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} EM_{v_2} M_{w_2u_1} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_2 u_1 E(\overline{vw})E(v\bar{u})(v_1w_1) + E(v_2w_2)} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_2 u_1 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= M_{zg^2 v_1\bar{v}_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})} EM_{w_1u_2} + M_{zg^2\bar{v}_2 E(\overline{vw})} E(M_{v_2}) M_{w_2} EM_{u_2} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_2 E(\overline{vw})E(v\bar{u})(v_1w_1 + E(v_2w_2))} EM_{u_2} \\ &= M_{zg^2\bar{v}_2 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})} EM_{u_2}. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$T^\sharp T = \begin{bmatrix} M_{zg^2\bar{v}_1 u_1 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})} & EM_{zg^2\bar{v}_1 u_2 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})} \\ M_{zg^2\bar{v}_2 u_1 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})} & M_{zg^2\bar{v}_2 |E(vw)|^2 E(v\bar{u})} EM_{u_2} \end{bmatrix} \tag{۸.۲}$$

و با انجام محاسبات مشابه به‌دست می‌آوریم

$$TT^{\sharp}=\begin{bmatrix} M_{zg^{۲}v_{۱}\bar{u}_{۱}\|E(vw)\|^{۲}E(\bar{v}u)} & EM_{zg^{۲}\bar{u}_{۱}v_{۲}\|E(vw)\|^{۲}E(\bar{v}u)} \\ M_{zg^{۲}\bar{u}_{۲}v_{۱}\|E(vw)\|^{۲}E(\bar{v}u)} & M_{zg^{۲}\bar{u}_{۲}\|E(vw)\|^{۲}E(\bar{v}u)}EM_{v_{۲}}. \end{bmatrix} \tag{۹.۲}$$

بنابراین $T=M_wEM_u\in\mathbb{B}_A(L^{۲}(\Sigma))$، A-نرمال است اگروتنها اگر شرایط زیر درست باشند:
(الف) $\bar{v}_{۱}u_{۱}E(v\bar{u})=v_{۱}\bar{u}_{۱}E(\bar{v}u)$،
(ب)$\bar{v}_{۱}u_{۲}E(v\bar{u})=\bar{u}_{۱}v_{۲}E(\bar{v}u)$،
(ج)$\bar{v}_{۲}E(v\bar{u})E(u_{۲}f)=\bar{u}_{۲}E(\bar{v}u)E(v_{۲}f)$، $\forall f\in\mathcal{N}(E)$.
بنابر مطالب فوق،لم‌های (۵.۲) و (۶.۲) قضیهٔ بعدی را نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $T=M_wEM_u\in\mathbb{B}_A(L^{۲}(\Sigma))$ و $A=M_{g\bar{v}}EM_v\in\mathbb{B}(L^{۲}(\Sigma))$. در این‌صورت T، A-نرمال است اگروتنها اگر $uE(\bar{v}E(v\bar{u}))=vE(\bar{u}E(u\bar{v}))$ و $\bar{u}E(u\bar{v})E(\|v\|^{۲})=\bar{v}\|E(u\bar{v})\|^{۲}$.

۳ مثال‌ها

مثال ۱.۳. فرض کنید $X=\{۱,۲,۳,۴\}$، $\Sigma=۲^X$، $\mu(\{n\})=۱/۴$ و $\mathcal{A}$، σ- جبر تولید شده توسط $\{\{۱,۴\},\{۲,۳\}\}$ باشد. در این‌صورت $L^{۲}(\Sigma)\cong\mathbb{C}^{۴}$ و

$$\begin{aligned} E(f)&=\Big(\frac{۱}{\mu(A_{۱})}\int_{A_{۱}}fd\mu\Big)\chi_{A_{۱}}+\Big(\frac{۱}{\mu(A_{۲})}\int_{A_{۲}}fd\mu\Big)\chi_{A_{۲}}\\ &=\frac{f_{۱}+f_{۴}}{۲}\chi_{A_{۱}}+\frac{f_{۲}+f_{۳}}{۲}\chi_{A_{۲}}\end{aligned}$$

که در آن $A_{۱}=\{۱,۴\}$ و $A_{۲}=\{۲,۳\}$. آنگاه ماتریس نمایش E نسبت به تجزیهٔ استاندارد پایهٔ متعامد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲}\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰\\ \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}.$$

برای $w=(w_{۱},w_{۲},w_{۳},w_{۴})$ و $u=(u_{۱},u_{۲},u_{۳},u_{۴})\in\mathbb{C}^{۴}$ داریم

$$T=M_wEM_u=\begin{bmatrix} \frac{w_{۱}u_{۱}}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{w_{۱}u_{۴}}{۲}\\ ۰ & \frac{w_{۲}u_{۲}}{۲} & \frac{w_{۲}u_{۳}}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{w_{۳}u_{۲}}{۲} & \frac{w_{۳}u_{۳}}{۲} & ۰\\ \frac{w_{۴}u_{۱}}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{w_{۴}u_{۴}}{۲}\end{bmatrix}.$$

قرار دهید $u=(i,۰,-۲,i)$ و $w=(i,۱,۰,i)$. در این‌صورت

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}.$$

همچنین برای $v=(v_۱,v_۲,v_۳,v_۴)$، داریم

$$A=M_{g\bar{v}}EM_v=g\begin{bmatrix}\frac{\bar{v}_۱v_۱}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{\bar{v}_۱v_۴}{۲}\\ ۰ & \frac{\bar{v}_۲v_۲}{۲} & \frac{\bar{v}_۲v_۳}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{\bar{v}_۳v_۲}{۲} & \frac{\bar{v}_۳v_۳}{۲} & ۰\\ \frac{\bar{v}_۴v_۱}{۲} & ۰ & ۰ & \frac{\bar{v}_۴v_۴}{۲}\end{bmatrix}.$$

اگر قرار دهیم $v=(i,۰,۱,i)$، به‌آسانی می‌توان مشاهده کرد که برای هر $g\in L^{\circ}(\mathcal{A})$، $AT=T^*A$، بنابراین T، A- خودالحاق است. اما T، A -ایزومتري نیست. توجه کنید که اگر قرار دهیم $u=v=(۱,۰,i,۱)$، آنگاه

$$E(|v|^۲)=\Big(\frac{|v_۱|^۲+|v_۴|^۲}{۲},\frac{|v_۲|^۲+|v_۳|^۲}{۲},\frac{|v_۲|^۲+|v_۳|^۲}{۲},\frac{|v_۱|^۲+|v_۴|^۲}{۲}\Big),$$

بنابراین

$$\frac{\bar{v}}{E(|v|^۲)}=\Big(\frac{۲\bar{v}_۱}{|v_۱|^۲+|v_۴|^۲},\frac{۲\bar{v}_۲}{|v_۲|^۲+|v_۳|^۲},\frac{۲\bar{v}_۳}{|v_۲|^۲+|v_۳|^۲},\frac{۲\bar{v}_۴}{|v_۱|^۲+|v_۴|^۲}\Big).$$

بنابر قضیهٔ (۹.۲)، اگر قرار دهیم $w=(۱,۰,-۲i,۱)$، آنگاه T، A- ایزومتری روی $\sigma(E(|v|^۲))$ است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که در این حالت $T^*AT=T$.

مثال ۲.۳. فرض کنید $X=\{۱,۲,۳,۴\},\Sigma=۲^X,\mu(\{n\})=۱/۴$ و $\mathcal{A}$، σ- جبر تولید شده توسط $\{\{۱,۲\},\{۳,۴\}\}$. در این‌صورت $L^۲(\Sigma)\cong\mathbb{C}^۴$ و

$$\begin{aligned}E(f)&=\Big(\frac{۱}{\mu(A_۱)}\int_{A_۱}fd\mu\Big)\chi_{A_۱}+\Big(\frac{۱}{\mu(A_۲)}\int_{A_۲}fd\mu\Big)\chi_{A_۲}\\&=\frac{f_۱+f_۲}{۲}+\chi_{A_۱}+\frac{f_۳+f_۴}{۲}\chi_{A_۲},\end{aligned}$$

که در آن $A_۱=\{۱,۲\}$ و $A_۲=\{۳,۴\}$. آنگاه ماتریس نمایش E نسبت به تجزیهٔ استاندارد پایهٔ متعامد به‌صورت زیر می‌باشد

$$\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}.$$

برای $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$، $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ و $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ متعلق به $\mathbb{C}^4$ داریم

$$T = M_w E M_u = \begin{bmatrix} \frac{w_1 u_1}{2} & \frac{w_1 u_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{w_2 u_1}{2} & \frac{w_2 u_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w_3 u_3}{2} & \frac{w_3 u_4}{2} \\ 0 & 0 & \frac{w_4 u_3}{2} & \frac{w_4 u_4}{2} \end{bmatrix} \quad A = M_{g\bar{v}} E M_v \ = g \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}_1 v_1}{2} & \frac{\bar{v}_1 v_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\bar{v}_2 v_1}{2} & \frac{\bar{v}_2 v_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}_3 v_3}{2} & \frac{\bar{v}_3 v_4}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}_4 v_3}{2} & \frac{\bar{v}_4 v_4}{2} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $w = (1, 0, 0, 0)$، $u = (i, 0, 0, 0)$ و $v = (0, i, 0, -i)$ در نتیجه داریم

$$T = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

در نتیجه برای $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$، داریم $Ax = g(0, \frac{1}{2}x_1, 0, \frac{1}{2}x_4)$، $Tx = \frac{i}{2}x_1$ و $ATx = 0$. پس $\|Tx\|_A^2 = \langle ATx, Tx \rangle = 0$، و $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2}|x_2|^2 - \frac{1}{2}|x_4|^2$. بنابراین $T \in \mathbb{B}_{A^{\frac{1}{2}}}(L^2(\Sigma))$.

فهرست منابع

[1] Arias, M. L., Corach, G. and Gonzalez, M. C., 2008. Partial isometries in semi-Hilbertian spaces. Linear Algebra Appl., 428(7), pp.1460-1475. doi:10.1016/j.laa.2007.09.31

[2] Barnes, B. A., 2000. The spectral properties of certain linear operators and their extensions. Proc. Amer. Math. Soc., 128(5), pp.1371-1375. doi: 10.1090/S0002-9939-99-05326-5

[3] Douglas, R. G., 1966. On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc., 17, pp.713-416. doi:10.1090/S0002-9939-1966-0203464-1

[4] Emamalipour, H. and Jabbarzadeh, M. R., 2020. Lambert conditional operators on $L^2(\Sigma)$. Complex Anal. Oper. Theory, 14(1), pp. doi: 10.1007/s11785-020-00982-8

[5] Estaremi, Y., and Jabbarzadeh, M. R., 2013. Weighted Lambert type operators on L^p spaces. Oper. Matrices, 7(1), pp. 101-116. doi: 10.7153/oam-07-05

[6] Hassi, S., Sebestyén, Z., and de Snoo, H. S. V., 2005. On the nonnegativity of operator products. Acta Math. Hungar., 109(1-2), pp. 1-14. doi: 10.1007/s10474-005-0231-x

[7] Herron, J. D., 2011. Weighted conditional expectation operators. Oper. Matrices, 5(1), pp. 107-118. doi: 10.7153/oam-05-07

[8] Jabbarzadeh, M. R., 2010. A conditional expectation type operator on L^p spaces. Oper. Matrices, 4(3), pp. 445-453. doi: 10.7153/oam-04-24

[9] Jabbarzadeh, M. R., and Sharifi, M. H., 2019. Lambert conditional type operators on $L^2(\Sigma)$. Linear Multilinear Algebra, 67(10), pp. 2030-2047. doi: 10.1080/03081087.2018.1479372

[10] Lambert, A., 1991. Localising sets for sigma-algebras and related point transformations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., 118(1-2), pp. 111-118. doi: 10.1017/S0308210500028948

[11] Moy, S.-T. C., 1954. Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces. Pacific J. Math., 4(1), pp. 47-63. doi: 10.2140/pjm.1954.4.47

[12] Rao, M. M., 1993. Conditional measure and applications. Marcel Dekker, New York.

[13] Saddi, A., 2012. A-normal operators in semi Hilbertian spaces. Aust. J. Math. Anal. Appl., 9(1), pp. 1-12.

Conditional Weighted Operators in $L^2(\Sigma)$-Semi-Hibertian space

Zahra Moayyerizadeh [2]

Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran
Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 6 June 2024 Accepted: 12 October 2024

Abstract: In this paper, we consider weighted conditional operators on $L^2(\Sigma)$-semi-Hilbertian space. Then, we give necessary and sufficient conditions for self-adjointness, isometry, and normality of these types of operators in this space.

Keywords: Semi-Hilbert space, Conditional expectation operator, self-adjoint, normal operator.

---

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (Z. Moayyerizadeh) moayerizadeh.za@lu.ac.ir,