مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۱-۱۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.47076.2278

جواب‌های مثبت برای مساله نیم‌خطی بیضوی با شرط مرزی غیرخطی روی فضاهای سوبولف مخروطی

مرتضی کوزه‌گر کالجی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک، ایران

دبیر مسئول: مرتضی فتوحی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۳/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱

چکیده: در این مقاله یک دستگاه معادلات بیضوی به همراه یک آشوب یا اختلال در دستگاه و نیز شرایط مرزی نویمن غیرخطی در نزدیکی نقطه تکینی روی یک خمینه با نقطه تکین مخروطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با معرفی فضای سوبولف مخروطی و استفاده از روش‌های تغییراتی و روش خمینه نهاری وجود حداقل دو جواب مثبت را برای این دستگاه روی فضای سوبولف مخروطی ثابت خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: معادله بیضوی نیم‌خطی، مساله مرزی غیرخطی، روش‌های تغییراتی، فضای سوبولف مخروطی.

رده‌بندی ریاضی: 35J61; 35J65; 35A15; 46E35

۱ مقدمه و پیش‌گفتار

از مهترین ابزارها برای مدل‌سازی ریاضی یک مساله از جهان واقعی ، استفاده از معادلات دیفرانسیل است. به دلیل پیچده‌گی بسیاری از مسائل در فیزیک و مکانیک ، معادلات مورد استفاده در این سیستم‌ها دچار تباهیده‌گی و تکینگی [۱] در خود هستند. به‌عنوان مثال اگر در قسمتی از فضا نیروی گرانش طوری زیاد باشد که جسم را تا حد یک نقطه فشرده کند، از نظر فیزیکی گویند در این مکان تکینگی رخ داده است [۷، ۸] البته این تکینگی در بسیاری از موارد از منظر فیزیکی ممکن است نمایان نباشد اما در معادلات ریاضی توصیف کننده آن سیستم فیزیکی خود را نشان خواهد داد. از دیدگاه ریاضی این تکینی‌ها می‌تواند به دو شکل نمایان شود یک نوع آن در فضای زمینه که توصیف کننده توابع متناظر به جواب این سیستم‌ها هستند و نوع دیگر نیز تکینگی در ضرایب عملگرهای ظاهر شده در معادلات هستند. بررسی و مطالعه معادله شرودینگر با هامیلتونی‌های پیچیده و نیز تباهیده‌گی در منبع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. از آنجا که یافتن جواب برای چنین معادلاتی دشواری‌های خاص خود را دارد استفاده از مدل‌های اختلالی می‌تواند در توصیف این سیستم‌ها مفید باشد. بنابراین در این مقاله قصد داریم درخصوص وجود جواب برای یک سیستم از معادله شرودینگر مستقل از زمان که اطراف یک نقطه تکینگی روی یک خمینه با نقطه تکین مخروطی دسته بندی شده است، به مطالعه بپردازیم.

[1] Degeneracy and Singularity

(M. K. Kalleji) m-koozehgarkalleji@araku.ac.ir

درواقع، قصد داریم در خصوص وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت مساله نیم‌خطی ناهمگن روی یک خمینه مرزدار با نقطه تکین مخروطی همراه با یک شرط نویمن غیرخطی در همسایگی نقطه تکین مخروطی بحث کنیم. به‌طور دقیق‌تر مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{B}} u + u = a(x)|u|^{p-2}u + g(x) & x \in \mathbb{B} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda b(x)|u|^{q-2}u & on \ \partial\mathbb{B} \end{cases} \tag{1.1}$$

که در آن $\mathbb{B}$ یک خمینه با نقطه تکین مخروطی است که به‌طور موضعی در همسایگی نقطه تکینی به‌صورت $[0, 1) \times X$ است که در آن X یک خمینه بسته فشرده $(N-1)$ بعدی بوده و $\partial\mathbb{B} = \{0\} \times X$. توصیف کامل‌تری از این خمینه‌ها در بخش بعد ارائه شده است. به‌علاوه، عملگر $\Delta_{\mathbb{B}}$ در مساله ۱.۱ عملگر لاپلاسین تباهیده در $x_1 = 0$ نامیده می‌شود که در واقع یک عملگر شبه‌دیفرانسیلی نوع فوشین [2] از مرتبه دو بوده و به‌صورت $(x_1\partial_{x_1})^2 + \partial_{x_2}^2 + \ldots + \partial_{x_N}^2$ تعریف می‌شود. همچنین گرادیان متناظر به آن به صورت

$$\nabla_{\mathbb{B}} = (x_1\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_N})$$

است. در نزدیکی مرز یعنی $\partial\mathbb{B}$ اغلب از مختصات $(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x_1, x') \in [0, 1) \times X$ استفاده خواهیم کرد. توجه کنید که در مساله ۱.۱ دو جمله غیرخطی وجود دارد. یک جمله $|u|^{p-2}u$ در معادله داده شده و دیگری جمله $|u|^{q-2}u$ روی مرز خمینه داده شده است. در این مطالعه، فرض می‌کنیم که دو نمای p, q برای $N \geq 3$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$1 < q < 2_{\partial}^* = \frac{2(N-1)}{N-2}, \quad 1 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad q < p. \tag{2.1}$$

با توجه به شرایط نمای q ضمن وجود تکینگی در مرز امکان تباهیدگی در شرایط مرزی داده شده بر اساس نمای q وجود خواهد داشت که یکی از وجوه متمایز این کار با سایر کارها انجام شده در این زمینه است. توابع وزن مثبت $a, b : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ طوری هستند که $a, b \in C(\mathbb{B}) \bigcap L^{\infty}(\mathbb{B})$. جمله اختلالی g که باعث ایجاد ناهمگنی در معادله می‌شود، فرض می‌کنیم در شرط زیر صدق کند: $g(x) = g(|x|) \in L_2^{\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ ، یعنی g دارای خاصیت تقارن شعاعی [3] باشد که در آن بر اساس نمایش نقاط در نزدیکی مرز خمینه به شکل $x = (x_1, x')$ خواهیم داشت: $|x| = \left(|ln(x_1)|^2 + |x'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. با استفاده از جمله اختلالی در مساله عملگر زیر را که در ادامه در تعریف تابعک انرژی روی فضای سوبولوف مخروطی استفاده می‌شود، درنظر می‌گیریم:

$$K_g : \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}) \to \mathbb{R} \quad ; \quad K_g(\varphi) := \int_{\mathbb{B}} g(x)\varphi(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'.$$

در این صورت با استفاده از فرض روی تابع اختلالی g و قضیه نشاندن سوبولوف [۴، ۱۳] $\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}) \hookrightarrow L_2^{\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ نتیجه می‌شود که یک ثابت مثبت C_g وجود دارد به‌طوری که

$$\|K_g(\varphi)\| \leq C_g \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{n}{2}}(\mathbb{B})}.$$

یک مساله مشابه اما با شرایط مرزی دیریکله و بدون تابع وزن در سمت راست معادله یعنی

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{B}} u + u = |u|^{p-2}u + g(x) & x \in \mathbb{B} \\ u = 0 & on \ \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

در مرجع [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. در آنجا نویسندگان وجود حداقل دو جواب ، یکی با انرژی مثبت و دیگری با انرژی منفی، برای مساله دیریکله مورد نظرشان به دست آوردند. همچنین نویسندگان در [۹] مساله دیریکله مطرح شده فوق را با اصلاح روش استفاده شده در [۱] برای نمای بحرانی سوبولوف یعنی $p = 2^*$ مطالعه کردند و وجود حداقل دو جواب با انرژی‌های مثبت و منفی را ثابت کردند. بررسی وجود و چندگانگی جواب‌ها در حالت همگن یعنی وقتی $g(x) \equiv 0$ هم در حضور تابع پتانسیل و هم در غیاب تابع پتانسیل به همرا به شرط مرزی دیریکله یعنی مساله‌هایی به صورت

[2] Fuchsian pseudo-differential operator
[3] Radial Symmetry

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{B}} u + V(x)u = |u|^{p-2}u & x \in \mathbb{B} \\ \\ u = 0 & on \ \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است [۴-۶]. از طرف دیگر مساله مشابه با شرط مرزی نویمن برای دامنه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ در مراجع مختلف مانند [۳، ۱۴] مطالعه شده است. تا جایی که نویسنده اطلاع دارد، در خصوص مطالعه وجود جواب و چندگانگی جواب‌ها برای یک مساله نمیه‌خطی ناهمگن روی یک خمینه با نقطه تکین مخروطی مطالعه‌ای انجام نشده است. تفاوت مهم این کار با کارهای ذکر شده قبلی ضمن در نظر گرفتن شرط غیرخطی نویمن به جای شرط دیریکله با در نظر گرفتن یک ناهمگنی به عنوان یک اختلال در سیستم شرودینگر مستقل از زمان، برای مساله ۱.۱ وجود دو جواب با انرژی‌های مثبت را ثابت می‌کنیم. برای حل مساله ۱.۱ از روش تغییراتی که به منظور مطالعه تابعک انرژی متناظر به مساله که به‌شکل زیر تعریف می‌شود، استفاده خواهیم کرد:

$$J(u) := I(u) - K_g(u) \tag{۳.۱}$$

که در آن

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}} \left(|\nabla_{\mathbb{B}} u|^2 + |u|^2\right) \frac{dx_1}{x_1} dx' - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_1}{x_1}dx' - \frac{\lambda}{q}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx'$$

و همچنین

$$K_g(u) = \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'.$$

با توجه به شرایط ۲.۱ و بر اساس تعریف تابعک انرژی ۳.۱ نتیجه می‌شود که $J \in C^1\left(\mathcal{H}_2^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}); \mathbb{R}\right)$ که در آن $\mathcal{H}_2^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ فضای سوبولف مخروطی است که در بخش بعد معرفی می‌شود. بنابراین به ازای هر $\varphi \in \mathcal{H}_2^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ مشتق ضعیف تابعک انرژی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \langle J'(u), \varphi\rangle = &\int_{\mathbb{B}} [\nabla_{\mathbb{B}} u \nabla_{\mathbb{B}}\varphi + u\varphi]\,\frac{dx_1}{x_1}dx' - \int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^{p-2}\,\varphi\frac{dx_1}{x_1}dx' \\ &- \int_{\mathbb{B}} g(x)\varphi(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' - \lambda\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^{q-2}\,u\varphi dx' \end{aligned}$$

با توجه به مشتق ضعیف تابعک انرژی، جواب‌های ضعیف مساله ۱.۱ معادل با نقاط بحرانی تابعک ۳.۱ در فضای سوبولوف مخروطی خواهند بود. به عبارت دیگر u یک جواب از مساله است هرگاه $\langle J'(u), u\rangle = 0$.

با توجه به توضیحات داده شده در خطوط بالا اکنون نتیجه اصلی این مقاله که وجود دو جواب مثبت برای مساله ۱.۱ به ازای مقادیر مثبتی از λ خواهد بود را بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه بر اساس نتایجی که در بخش‌های بعد بیان می‌شوند در انتها بیان خواهد شد.

قضیه ۱.۱. اگر $\lambda \in (0, \lambda_0)$ در این صورت مساله ۱.۱ حداقل دو جواب مثبت u_1, u_2 را می‌پذیرد که در آن وجود λ_0 در لم ۱.۴ اثبات می‌شود .

۲ فضای سوبولف مخروطی

در این بخش با در نظر گرفتن یک خمینه با نقطه تکین مخروطی به معرفی اجمالی از فضای سوبولف روی این خمینه‌ها می‌پردازیم که به فضاهای سوبولف مخروطی معروف هستند. برای مطالعه عمیق‌تر در خصوص خمینه‌ها با نقاط تکین مخروطی و ویژگی‌های فضاهای سوبولف روی آنها مراجع زیر مفید خواهند بود [۱۱، ۱۳]. به‌طورکلی منظور از یک خمینه با نقاط تکین مخروطی، یک خمینه فشرده B همراه با متریک ریمانی g که شامل یک زیرمجموعه متناهی از نقاط مانند B_0 از B است به‌طوری که $(B - B_0, g)$ یک خمینه ریمانی هموار بوده و یک همسایگی از هر نقطه تکین در B_0 با یک مخروط $C_{(0,1]}(X)$ همئومورف خواهد بود که در آن X یک خمینه فشرده هموار ریمانی با متریک ریمانی h_0 است. تعریف دقیق‌تر آن به شکل زیر است.

تعریف ۱.۲. یک چهارتایی $(B, d, g, B_0 = \{x_1, ..., x_k\})$ را یک خمینه ریمانی فشرده با نقاط تکین مخروطی گویند هرگاه
الف) (B, d) یک فضای متریک فشرده باشد،
ب) $B - B_0$ یک خمینه ریمانی هموار $N = (n+1)-$بعدی باشد به‌طوری که متریک d روی $B - B_0$ توسط متریک ریمانی g القا شده است،
پ) هر نقطه تکین $x_i \in B_0$ به ازای هر $1 \le i \le k$، دارای همسایگی U_{x_i} است به‌طوری که $U_{x_i} \cap B_0 = \{x_i\}$ و نیز یک دیفئومورفیسم

$$\psi_{x_i} : U_{x_i} - \{x_i\} \to X^\wedge(x_i) = (0, \epsilon_i) \times X(x_i)$$

وجود دارد به‌طوری که $g|_{U_{x_i} - \{x_i\}}$ یکریخت است با $dr^2 + r^2 h_r$ که در آن برای $\epsilon_i > 0$، $r \in (0, \epsilon_i)$ و h_r یک متریک ریمانی هموار روی $X_i = X(x_i)$ است به‌طوری که وقتی $r \to 0$، $h_r = h_0 + o(r^{\alpha_i})$ که در آن $\alpha_i > 0$ و h_0 متریک ریمانی هموار روی X_i است.

در ادامه مقاله به منظور ساده‌سازی محاسبات با یک نقطه تکین کار خواهد شد. در واقع اگر یک نقطه x_1 بخواهد نقطه تکین مخروطی باشد لازم است که متریک ریمانی g در یک همسایگی این نقطه با متریک مخروطی $dr^2 + r^2 h_0$ به ازای متریک ریمانی ثابت شده h_0 روی بخش برشی $X = X(x_1)$ یکریخت باشد.

مثال ۲.۲. فرض کنید $\tilde{X}$ یک خمینه هموار بسته فشرده دلخواه باشد. در این صورت یک عدد صحیح N و یک زیرخمینه هموار X از کره $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \quad : \quad |x| = 1\}$ وجود دارد به‌طوری که با $\tilde{X}$ دیفئومورف است. بنابراین

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^N - \{0\} \quad : \quad \frac{x}{|x|} \in X \right\} \cup \{0\}$$

یک مخروط نامتناهی با پایه X است که در واقع یک خمینه با نقطه تکین مخروطی $\{0\}$ خواهد بود.

با توجه به مطالب در مراجع [۱۰، ۱۳] همواره یک خمینه منبسط شده [۴] $\mathbb{B}$ برای خمینه مخروطی B وجود دارد که هموار بوده و دارای مرز فشرده هموار $\partial\mathbb{B} = X(x_1)$ است به‌طوری که به ازای همسایگی باز $U \subset B$ از نقطه تکین مخروطی x_1 و نیز همسایگی $V \subset \mathbb{B}$ که به‌صورت $V \simeq [0, 1) \times X(x_1)$ است، یک دیفئومورفیسم $B - B_0 \simeq \mathbb{B} - \partial\mathbb{B}$ با تحدید به این همسایگی‌ها یعنی، $U - B_0 \simeq V - \partial\mathbb{B}$ وجود خواهد داشت. بنا به نتایج بیان شده در [۱۳] یک عملگر دیفرانسیلی روی یک خمینه با نقطه تکین مخروطی در همسایگی $x_1 = 0$ که به عملگر نوع فیوشین [۵] نیز معروف است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A = x_1^{-m} \sum_{k=0}^{m} a_k(x_1) \left(-x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^k$$

به‌طوری که $(x_1, x_2, ..., x_N) \in X^\wedge$ و $a_k(x_1) \in C^\infty \left(\mathbb{R}_+, Diff^{m-k}(X) \right)$. برای مشاهده نتایج با جزییات بیشتر می‌توان مراجع [۴، ۱۰، ۱۳] را مد نگریست. اکنون برای معرفی عملگرهای گرادیان و لاپلاسین نوع فوشین که در مساله ۱.۱ ظاهر شده اند، از متریک مخروطی مناسب به‌صورت

$$g_{cone}(x_1, ..., x_N) = dx_1^2 + x_1^2 h_0(x_2, ..., x_N)$$

روی خمینه منبسط شده مخروطی $X^\wedge$ با $x_1 \in [0, 1)$ و h_0 به‌عنوان یک متریک ریمانی هموار ثابت شده روی برش $X(x_1)$ استفاده خواهیم کرد. توجه کنید که خارج $[0, 1) \times \partial\mathbb{B}$ متریک مخروطی g_{cone} با متریک ریمانی هموار g معادل است یعنی یک ثابت $C \ge 1$ وجود دارد که

$$\frac{1}{C} g(\xi, \xi)(p) \le g_{cone}(\xi, \xi) \le C g(\xi, \xi)(p) \qquad \forall \xi \in T_p(\mathbb{B}), \;\; p \in \mathbb{B}.$$

اکنون نسبت به این متریک مخروطی داده شده، کلاف مماسی مخروطی متناظر به خمینه منبسط شده $\mathbb{B}$ یعنی $T\mathbb{B}$ یک پایه را می‌پذیرد که در مختصات موضعی به شکل $\{x_1 \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_N}\}$ قابل نمایش است. درنتیجه پایه دوگان متناظر برای کلاف هم مماسی مخروطی $T\mathbb{B}^*$ به شکل $\{\frac{dx_1}{x_1}, dx_2, ..., dx_N\}$ خواهد بود. از این رو با فرض اینکه

$$x = (x_1, x') = (x_1, x_2, ..., x_N) \in [0, 1) \times \partial\mathbb{B} \simeq [0, 1) \times X(x_1)$$

[4] Stretched manifold
[5] Fuchsian

عملگر گرادیان مخروطی به صورت $\nabla_{\mathbb{B}}=(x_1\partial_{x_1},\partial_{x_2},...,\partial_{x_N})\in Diff^1_{cone}(\mathbb{B},T\mathbb{B})$ و نیز عملگر لاپلاسین نوع فوشین یا لاپلاسین مخروطی به‌صورت $\Delta_{\mathbb{B}}=(x_1\partial_{x_1})^2+\sum_{i=2}^N\partial^2_{x_N}$ تعریف می‌شوند. اکنون به منظور تعریف فضای مناسب برای جواب‌های ضعیف از مساله ۱.۱ فضاهای سوبولف مخروطی متناظر به خمینه منبسط شده $\mathbb{B}$ از خمینه مخروطی B را معرفی می‌کنیم. برای این تعاریف، ابتدا فضاهای لبگ و سوبولف وزن‌دار روی $\mathbb{R}^N_+$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $\gamma\in\mathbb{R}$ و $1<p<\infty$. تابع $u\in L^\gamma_p(\mathbb{R}^N_+)$ هرگاه $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+)$ و همچنین

$$\|u\|_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^N_+)}=\left(\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|x_1^{\frac{N}{p}-\gamma}u(x)\right|^p\frac{dx_1}{x_1}dx'\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنید $\gamma\in\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{N}$ و $1<p<\infty$. تابع $u\in\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{R}^N_+)$ هرگاه $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+)$ به‌طوری که به ازای هر اندیس $\alpha\in\mathbb{B}$، $\beta\in\mathbb{N}^{N-1}$ که $|\alpha|+|\beta|\le k$،

$$(x_1\partial_{x_1})^\alpha(\partial_{x'})^\beta u(x)\in L^\gamma_p(\mathbb{R}^N_+).$$

به‌علاوه $\mathcal{H}^{k,\gamma}_{p,0}((\mathbb{R}^N_+)$ را بستار فضای $C^\infty_0(\mathbb{R}^N_+)$ در فضای $\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{R}^N_+)$ در نظر خواهیم گرفت.

اکنون برای تعریف فضای سوبولف مخروطی به کمک تعریف‌های بالا، مشابه [۱، ۴، ۱۰] ابتدا این فضا را روی مخروط منبسط شده $X^\wedge$ تعریف کرده و سپس آن را به روی خمینه $\mathbb{B}$ تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $\gamma\in\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{N}_0$ و $1<p<\infty$. به‌علاوه فرض کنید $\mathcal{U}=\{U_1,...,U_m\}$ یک پوشش باز از همسایگی‌های مختصاتی برای X باشد. اگر یک افراز واحد $\{\kappa_1,...,\kappa_m\}$ و نیز کارت‌های مختصاتی $\chi_i:U_i\subset\partial\mathbb{B}\to\mathbb{R}^{N-1}$ را برای $i=1,...,m$ در نظر بگیریم . در این صورت گوییم $u\in\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(X^\wedge)$ هرگاه $u\in\mathcal{D}'(X^\wedge)$ و همچنین

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(X^\wedge)}=\left\{\sum_{i=1}^m\left\|(1\times\chi_i^*)^{-1}\kappa_i u\right\|^p_{\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{R}^N_+)}\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

که در آن $1\times\chi_i^*:C^\infty_0(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{N-1})\to C^\infty_0(\mathbb{R}_+\times U_i)$ یک تابع برگشت [6] نسبت به $1\times\chi_i:\mathbb{R}_+\times U_i\to\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{N-1}$ است . همچنین فضای $\mathcal{H}^{k,\gamma}_{p,0}(X^\wedge)$ را به‌عنوان زیرفضای $\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(X^\wedge)$ تعریف می‌کنیم که در واقع بستار فضای $C^\infty_0(X^\wedge)$ نسبت به نرم $\|.\|_{\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(X^\wedge)}$ است.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $\mathbb{B}$ یک خمینه مخروطی منبسط شده نسبت به خمینه با نقطه تکین مخروطی B باشد. به‌علاوه فرض کنید $\gamma\in\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{N}_0$ و $1<p<\infty$. در این صورت فضای مخروطی سوبولف $\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{B})$ یک زیرفضا از فضای سوبولف $H^{k,p}_{loc}(int\mathbb{B})$ است یعنی

$$\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{B})=\left\{u\in H^{k,p}_{loc}(int\mathbb{B})\quad;\quad\omega u\in\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(X^\wedge)\right\}$$

برای هر تابع برش ω با محمل در یک همسایگی از $\partial\mathbb{B}\times[0,1)$. همچنین زیرفضای $\mathcal{H}^{k,\gamma}_{p,0}(\mathbb{B})$ از فضای سوبولف مخروطی $\mathcal{H}^{k,\gamma}_p(\mathbb{B})$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد :

$$\mathcal{H}^{k,\gamma}_{p,0}(\mathbb{B})=[\omega]\mathcal{H}^{k,\gamma}_{p,0}(X^\wedge)+[1-\omega]H^{k,p}_0(int\mathbb{B})$$

که در آن ω همان تابع برش توصیف شده در بالا است. همچنین $H^{k,p}_0(int\mathbb{B})$ بستار فضای $C^\infty_0(int\mathbb{B})$ در فضای سوبولف $H^{k,p}(\tilde{X})$ است به‌طوری که $\tilde{X}$ یک خمینه هموار فشرده بسته شامل $\mathbb{B}$ به‌عنوان یک زیر خمینه مرزدار است .

توجه نمایید که با استفاده از تعریف فضای سوبولف مخروطی فوق، می‌توان فضای لبگ وزن‌دار روی خمینه $\mathbb{B}$ را تعریف نمود.

تعریف ۷.۲. فرض کنید $\gamma\in\mathbb{R}$، $1<p<\infty$. در این صورت $u\in L^\gamma_p(\mathbb{B})$ هرگاه $u\in\mathcal{H}^{0,\gamma}_P(\mathbb{B})$. به عبارت دیگر $u\in L^\gamma_P(\mathbb{B})$ هرگاه

$$\|u\|_{L^\gamma_P(\mathbb{B})}=\left(\int_{\mathbb{B}}\left|x_1^{\frac{N}{p}-\gamma}u(x)\right|^p\frac{dx_1}{x_1}dx'\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

[6] pull-back function

یک نتیجه‌ای که از تعریف فوق می‌توان به‌دست آورد، نامساوی هولدر است. در واقع اگر فرض کنیم $\gamma_1 = \frac{N}{p}$ و $\gamma_2 = \frac{N}{q}$ به‌طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ در این صورت به ازای هر $u \in L_p^{\gamma_1}(\mathbb{B})$ و هر $v \in L_q^{\gamma_2}(\mathbb{B})$ نتیجه می‌شود که

$$\int_{\mathbb{B}} \left|u(x_1,x')v(x_1,x')\right| \frac{dx_1}{x_1}dx' \leq \left(\int_{\mathbb{B}} \left|u(x_1,x')\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{B}} \left|v(x_1,x')\right|^q \frac{dx_1}{x_1}dx'\right)^{\frac{1}{q}}.$$

قضیه ۸.۲. [۴] فرض کنید برای $k, l \in \mathbb{N}_0$ که $l < k$ و به ازای $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ و $1 < p < \infty$، $l < \frac{N}{p}$. در این صورت برای هر $q \in [1, q_m]$ یک نگاشت نشاندن پیوسته

$$\mathcal{H}_p^{k,\gamma_1}(\mathbb{B}) \hookrightarrow \mathcal{H}_q^{m,\gamma_2}(\mathbb{B})$$

وجود دارد به‌طوری که $\frac{1}{q_m} = \frac{1}{p} - \frac{k-m}{N}$، $m = k - l$ و $\gamma_2 = \gamma_1 - l$ وجود دارد. بنابراین به ازای هر $u \in \mathcal{H}_p^{k,\gamma_1}(\mathbb{B})$ یک ثابت C وجود دارد به‌طوری که

$$\|u\|_{\mathcal{H}_q^{m,\gamma_2}(\mathbb{B})} \leq C\,\|u\|_{\mathcal{H}_p^{k,\gamma_1}(\mathbb{B})}.$$

۳ توصیف روش

همان‌طور که در بخش اول اشاره شد، جواب‌های مساله ۱.۱ متناظر به نقاط بحرانی تابعک انرژی J است. در واقع هرگاه تابعک J روی فضای $\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ از پایین کراندار باشد ، J به یک کمینه‌کننده خود روی این فضا می‌رسد. اما در بسیاری از مساله‌های واقعی تابعک متناظر در مساله ، ویژگی از پایین کرانداری روی کل فضای سوبولف مخروطی را ندارد ، در صورتی که روی یک زیرمجموعه‌ای از آن که به خمینه نهاری [7] معروف است [۱۲] ، از پایین کراندار خواهد بود. در این بخش ابتدا به معرفی خمینه نهاری برای مساله ۱.۱ پرداخته و سپس نتایج کمکی برای اثبات قضیه اصلی فراهم خواهیم کرد.

مجموعه نهاری را به صورت زیر روی فضای سوبولف مخروطی در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{N}(\mathbb{B}) := \left\{u \in \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}) - \{0\} \quad : \quad \langle J'(u), u\rangle = 0\right\}$$

که در آن $\langle .,.\rangle$ دوگانی بین فضای سوبولف مخروطی $\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ و دوگان آن یعنی $(\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}))^* = \mathcal{H}^{-1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ است. با توجه به تعریف $\mathcal{N}(\mathbb{B})$ نقاط بحرانی تابعک J باید در این مجموعه قرار بگیرند. بنابراین $u \in \mathcal{N}(\mathbb{B})$ اگر و تنها اگر

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u(x)|^p\,\frac{dx_1}{x_1}dx' - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' - \lambda \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,\frac{dx_1}{x_1}dx' = 0. \tag{۱.۳}$$

اکنون مشابه روش استفاده شده در [۳، ۱۴] به ازای $u \in \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ دلخواه و ثابت ، نگاشت‌های تاری [8] به‌صورت

$$\phi_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

به‌طوری که $\phi_u(t) := I(tu) - \frac{1}{2}K_g(t^2u)$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر $u \in \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ در این صورت

$$\begin{aligned}\phi_u'(t) = t\,\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - t^{p-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u(x)|^p\,\frac{dx_1}{x_1}dx' - \\ \lambda\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx' - t\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

[7] Nehari manifold
[8] Fibering maps

و همچنین

$$\phi_u''(t) = \|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - (p-۱)t^{p-۲}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u(x)|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' - \lambda(q-۱)t^{q-۲}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx' - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_۱}{x_۱}dx'. \tag{۳.۳}$$

از رابطه‌های ۱.۳ و ۲.۳ نتیجه می‌شود که $u\in\mathcal{N}(\mathbb{B})$ اگر و تنها اگر $\phi_u'(۱)=۰$. از این رو به‌طور کلی‌تر می‌توان نتیجه گرفت که $tu\in\mathcal{N}(\mathbb{B})$ اگر وتنها اگر $\phi_u'(tu)=۰$. بنابراین به ازای هر $u\in\mathcal{N}(\mathbb{B})$

$$\begin{aligned}\phi_u''(۱) &= \|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - (p-۱)\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' - \\ &\quad \lambda(q-۱)\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u(x)|^q\,dx' - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_۱}{x_۱}dx' \\ &= (۲-p)\,\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} + \lambda(p-q)\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u(x)|^q\,dx' + (p-۲)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_۱}{x_۱}dx' \\ &= (۲-q)\,\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} + (q-p)\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' + (q-۲)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_۱}{x_۱}dx' \\ &= (۲-p)\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' + \lambda(۲-q)\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx'.\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

بنابراین می‌توان مجموعه نهاری را به سه مدل زیر به ترتیب بر اساس نقاط بیشینه، کمینه و عطف نگاشت تاری تقسیم کرد:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_+(\mathbb{B}) &:= \left\{u\in\mathcal{N}(\mathbb{B}) \;\;;\;\; \phi_u''(۱)>۰\right\} \\ \mathcal{N}_-(\mathbb{B}) &:= \left\{u\in\mathcal{N}(\mathbb{B}) \;\;;\;\; \phi_u''(۱)<۰\right\} \\ \mathcal{N}_۰(\mathbb{B}) &:= \left\{u\in\mathcal{N}(\mathbb{B}) \;\;;\;\; \phi_u''(۱)=۰\right\}.\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

در ادامه برای اثبات وجود جواب برای مساله ۱.۱ به جستجو در خصوص وجود کمینه‌کننده برای تابعک انرژی مساله یعنی J روی خمینه نهاری $\mathcal{N}(\mathbb{B})$ خواهیم پرداخت.

لم ۱.۳. فرض کنید $u_۰$ یک کمینه‌کننده موضعی برای تابعک J روی خمینه نهاری $\mathcal{N}(\mathbb{B})$ باشد و همچنین $u_۰\notin\mathcal{N}_۰(\mathbb{B})$. در این صورت $u_۰$ یک نقطه بحرانی برای تابعک انرژی J است.

اثبات. به شیوه مشابه در [۲، ۳] است. □

با توجه به شرایط ۲.۱ فرض می‌کنیم که

$$۱<q<۲<p<۲^*.$$

اکنون با توجه به شرایط فرض شده در مساله ۱.۱ مشاهداتی در خصوص نگاشت‌های تاری ϕ_u بیان می‌کنیم. برای $t>۰$ از تعریف خمینه نهاری نتیجه می‌شود که $tu\in\mathcal{N}(\mathbb{B})$ اگر و تنها اگر

$$t\,\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - t^{p-۱}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' - \lambda t^{q-۱}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx' - t\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_۱}{x_۱}dx' = ۰. \tag{۶.۳}$$

تابع $\psi:(۰,\infty)\to\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(t) := t^{q-۲}\,\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - t^{p-q}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_۱}{x_۱}dx' - t^{q-۲}\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x).$$

بنابراین با توجه به رابطه ۶.۳ و تعریف تابع ψ نتیجه می‌شود که $tu \in \mathcal{N}(\mathbb{B})$ اگر و تنها اگر t یک جواب از معادله

$$\psi(t) = \lambda \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\, |u|^q \, dx' \tag{۷.۳}$$

باشد. با استفاده از شرط $p - q > ۲ - q$ تابع ψ دارای نقطه بیشینه است. در واقع

$$\begin{aligned}
\psi(t)' = ۰ \iff & (۲-q)t^{۱-q} \|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - (p-q)t^{p-q-۱} \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' - \\
& (۲-q)t^{۱-q} \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' = ۰ \\
& \iff (۲-q) \left(\|u\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right) t^{۱-q} = t^{p-q-۱} \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \\
& \iff t = t_۰ = \left(\frac{(۲-q)\left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right)}{(p-q)\int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx'} \right)^{\frac{۱}{p-۲}} .
\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

توجه کنید که وقتی u یک جواب برای مساله ۱.۱ باشد از تعریف جواب ضعیف برای مساله خواهیم داشت

$$\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' = \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' + \lambda \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\, |u|^q \, dx'$$

و با توجه به فرض مثبت بودن تابع وزن a و از تعریف و پیوستگی عملگر K_g نتیجه می‌شود که $t_۰ > ۰$ است و همچنین

$$\begin{aligned}
\psi''(t_۰) = & (۱-q)(۲-q)t_۰^{-q} \left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right) \\
& - (p-q)(p-q-۱)t_۰^{p-q-۲} \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' < ۰.
\end{aligned} \tag{۹.۳}$$

در نتیجه $t_۰$ یک نقطه بیشنه برای تابع ψ خواهد بود. با توجه به اینکه $b > ۰$ و $\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\, |u|^q \, dx' > ۰$ نتیجه می‌شود که معادله ۷.۳ برای هر λ که در شرط زیر صدق کند، جواب نخواهد داشت :

$$\begin{aligned}
\psi(t_۰) = & t_۰^{۲-q} \left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right) - t_۰^{p-q} \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' = \\
& \left(\frac{(۲-q)\left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right)}{(p-q)\int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱}} \right)^{\frac{۲-q}{p-۲}} \left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right) \\
& - \left(\frac{(۲-q)\left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right)}{(p-q)\int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱}} \right)^{\frac{p-q}{p-۲}} \int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' = \\
& \left[\left(\frac{۲-q}{p-q} \right)^{\frac{۲-q}{p-۲}} - \left(\frac{۲-q}{p-q} \right)^{\frac{p-q}{p-۲}} \right] \frac{\left(\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right)^{\frac{p-q}{p-۲}}}{\left(\int_{\mathbb{B}} a(x)\, |u|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \right)^{\frac{۲-q}{p-۲}}} \\
& > \lambda \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\, |u|^q \, dx'
\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

بعلاوه از ۲.۳ و ۷.۳ نتیجه می‌شود که $\phi_u'(t) < 0$. بنابراین برای هر $t \in (0, \infty)$، $tu \notin \mathcal{N}(\mathbb{B})$. از طرف دیگر اگر λ در رابطه

$$0 < \lambda \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\, |u|^q \, dx' < \psi(t_0) \tag{۱۱.۳}$$

صدق کند در این صورت معادله ۷.۳ دو جواب t_1, t_2 دارد که $t_1 < t_0 < t_2$ به‌طوری که

$$\phi_u'(t_1) = \phi_u'(t_2) = 0, \qquad \psi'(t_1) > 0, \quad \psi'(t_2) < 0.$$

لم ۲.۳. برای هر λ که در نامساوی ۱۱.۳ صدق کند ، t_0 یک نقطه عطف ϕ_u است.

اثبات. با فرض اینکه t_1, t_2 دو ریشه معادله ۷.۳ باشند بر اساس محاسبات قبل از این لم،

$$\begin{aligned}\phi_u''(t_1) =& t_1^{q-1}\Bigg((2-q)t_1^{1-q}\, \|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - (p-q)t_1^{p-q-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\, \frac{dx_1}{x_1}dx' \\ &- (2-q)t_1^{1-q}\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'\Bigg) = t_1^{q-1}\psi'(t_1)\end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

و

$$\begin{aligned}\phi_u''(t_2) =& t_2^{q-1}\Bigg((2-q)t_2^{1-q}\, \|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - (p-q)t_2^{p-q-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\, \frac{dx_1}{x_1}dx' \\ &- (2-q)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'\Bigg) = t_2^{q-1}\psi'(t_2).\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

از روابط ۱۲.۳ و ۱۳.۳ نتیجه می‌شود که $\phi_u''(t_1) > 0$ و $\phi_u''(t_2) < 0$ بنابراین نگاشت تاری ϕ_u دارای کمینه موضعی در t_1 و بیشینه موضعی در t_2 دارد به‌طوری که $t_1 u \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ و $t_2 u \in \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$. اکنون با در نظر گرفتن توابع ψ و ϕ_u در نقطه $t = t_0$، چون $\psi'(t_0) = 0$ و نیز

$$\begin{aligned}\phi_u''(t_0) =& (2-q)\, \|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - (p-q)t_0^{p-q-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\, \frac{dx_1}{x_1}dx' \\ &- (2-q)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' = t_0^{q-1}\psi'(t_0) = 0\end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

بنابراین $\phi_u''(t_0) = 0$ و لذا t_0 یک نقطه عطف برای نگاشت ϕ_u است. □

۴ اثبات قضیه اصلی

در این بخش با ارائه برخی نتایج و گزاره‌های کمکی زمینه را برای اثبات ادعای اصلی مقاله یعنی قضیه ۱.۱ فراهم می‌کنیم.

لم ۱.۴. فرض کنید $0 < C_g < 1$ باشد. یک ثابت $\lambda_0 > 0$ وجود دارد که برای هر $0 < \lambda < \lambda_0$، $\mathcal{N}_0(\mathbb{B}) = \emptyset$.

اثبات. با توجه به خط سوم در اتحاد ۴.۳ و با استفاده از فرضیات روی تابع b و عملگر K_g و نیز قضیه نشاندن اثر سوبولف [9] روی مرز یعنی

[9] Sobolev Trace embedding

$$\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}) \hookrightarrow L_2^{\frac{N}{2}}(\partial\mathbb{B})$$

$$\begin{aligned} 0 = \phi_u''(1) =& (2-p)\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} + \lambda(p-q)\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^q\,dx' \\ &+ (p-2)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' \Rightarrow \\ &(p-2)(1-C_g)\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \le \lambda(p-q)S^q\|b\|_\infty\|u\|^q_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \Rightarrow \\ &\|u\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \le \left(\frac{\lambda(p-q)\|b\|_\infty S^q}{(p-2)(1-C_g)}\right)^{\frac{1}{2-q}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

به‌علاوه با استفاده مجدد از اتحاد ۴.۳ خط چهارم، و نیز به کارگیری فرضیات روی تابع a و عملگر K_g و همچنین با بکار گیری قضیه نامساوی سوبولف ۸.۲ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 0 = \phi_u''(1) =& (2-q)\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} + (p-q)\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^p\,\frac{dx_1}{x_1}dx' + \\ &(q-2)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' \Rightarrow \\ &(2-q)(1-C_g)\|u\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \le (p-q)\|a\|_\infty C^p\|u\|^p_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \Rightarrow \\ &\|u\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \ge \left(\frac{(2-q)(1-C_g)}{(p-q)\|a\|_\infty C^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

با استفاده از نامساوی‌های ۱.۴ و ۲.۴ قرار می‌دهیم

$$\lambda_0 = \left(\frac{(2-q)(1-C_g)}{\|a\|_\infty C^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\left(\frac{1}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\left(\frac{p-2}{\|b\|_\infty S^q}\right).$$

اکنون با استفاده از فرض خلف نتیجه حاصل خواهد شد. در واقع اگر فرض کنیم برای یک $0 < \lambda < \lambda_0$ مجموعه $\mathcal{N}_0(\mathbb{B})$ غیرتهی باشد در این صورت با استفاده از نامساوی‌های ۱.۴ و ۲.۴ داریم

$$\left(\frac{(2-q)(1-C_g)}{(p-q)\|a\|_\infty C^p}\right)^{\frac{1}{p-2}} \le \|u\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \le \left(\lambda\frac{(p-q)\|b\|_\infty S^q}{(p-2)}\right)^{\frac{1}{2-q}}$$

که نتیجه می‌دهد $\lambda \ge \lambda_0$ و این تناقض است. بنابراین برای λ_0 به دست آمده ، مجموعه $\mathcal{N}_0(\mathbb{B})$ برای هر $0 < \lambda < \lambda_0$ تهی است. □

گزاره ۲.۴. تابعک انرژی J اجباری [10] و از پایین کراندار است.

اثبات. با توجه به فرضیات روی مساله ، توابع وزن مثبت $a, b \in C(\mathbb{B}) \cap L^\infty(\mathbb{B})$ ، تعریف عملگر اختلالی K_g و به‌علاوه با استفاده

[10] Coercive

از قضیه‌های نشاندن و اثر سوبولف نتیجه می‌شود که :

$$
\begin{aligned}
J(u) =& \\
& \frac{۱}{۲}\int_{\mathbb{B}}\left(|\nabla_{\mathbb{B}}u|^{۲}+|u|^{۲}\right)\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' - \frac{۱}{p}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u|^{p}\,\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \qquad (۳.۴)\\
& - \int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' - \frac{\lambda}{q}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^{q}\,dx' \\
& = \left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{p}\right)\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \lambda\left(\frac{۱}{q}-\frac{۱}{p}\right)\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u|^{q}\,dx' - \left(۱-\frac{۱}{p}\right)\int_{\mathbb{B}} g(x)u(x)\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \\
& \geq \frac{p-۲}{۲p}\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \lambda\left(\frac{p-q}{pq}\right)S^{q}\,\|b\|_{\infty}\,\|u\|^{q}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \frac{p-۱}{p}\|g\|_{L_{۲}^{\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})}\|u\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} \\
& \geq \frac{p-۲}{۲p}\|u\|^{۲}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \lambda\left(\frac{p-q}{pq}\right)S^{q}\,\|b\|_{\infty}\,\|u\|^{q}_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \frac{C_{g}(p-۱)}{p}\|u\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})}. \qquad (۴.۴)
\end{aligned}
$$

بنابراین هرگاه $\|u\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} \to \infty$ در این صورت $J(u)\to\infty$ و کرانداری از پایین آن نیز از نامساوی ۳.۴ به دست می‌آید. $\square$

از لم ۱.۴ و نیز گزاره ۲.۴ نتیجه می‌شود که برای هر $\circ < \lambda < \lambda_{\circ}$

$$\mathcal{N}(\mathbb{B}) = \mathcal{N}_{+}(\mathbb{B}) \cup \mathcal{N}_{-}(\mathbb{B}).$$

تابعک J روی زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})$ و $\mathcal{N}_{-}(\mathbb{B})$ از خمینه نهاری، از پایین کراندار است. بنابراین می‌توان بزرگ‌ترین کران پایین تابعک J را روی این زیر مجموعه‌ها تعریف کرد:

$$m_{\circ}^{+} := \inf_{u\in\mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})} J(u), \qquad m_{\circ}^{-} := \inf_{u\in\mathcal{N}_{-}(\mathbb{B})} J(u).$$

اکنون گزاره زیر در خصوص یک جواب مثبت را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

گزاره ۳.۴. فرض کنید $\circ < C_{g} < ۱$ باشد. اگر $\circ < \lambda < \lambda_{\circ}$، در این صورت تابعک J دارای یک کمینه‌کننده $u_{۱} \in \mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})$ است که در خواص زیر صدق می‌کند :

الف) $\inf_{u\in\mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})} J(u) = J(u_{۱}) < \circ$،

ب) $u_{۱}$ یک جواب مثبت از مساله ۱.۱ است.

اثبات. الف) براساس گزاره ۲.۴ ، تابعک J روی مجموعه $\mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})$ از پایین کراندار است. لذا یک دنباله کمینه‌کننده برای این تابعک مانند $\{u_{n}\}_{n=۱}^{\infty} \subset \mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})$ وجود دارد به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} J(u_{n}) = \inf_{u\in\mathcal{N}_{+}(\mathbb{B})} J(u)$. بنابراین دنباله $\{u_{n}\}$ در فضای سوبولف $\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})$ که یک فضای هیلبرت است ، کراندار خواهد بود. در حد انتخاب کردن یک زیردنباله، می‌توان فرض کرد که $u_{۱} \in \mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})$ وجود دارد به‌طوری که همگرایی‌های زیر را خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
u_{n} &\rightharpoonup u_{۱} \quad && in \quad && \mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B}) \\
u_{n} &\to u_{۱} \quad && in \quad && L_{r}^{\frac{N}{r}}(\mathbb{B}) \\
u_{n} &\to u_{۱} \quad && in \quad && L_{s}^{\frac{N}{s}}(\partial\mathbb{B}) \qquad (۵.۴)
\end{aligned}
$$

به‌طوری که برای $N \geq ۳$ ، $۱ \leq r < ۲^{*} = \frac{۲N}{N-۲}$ و $۱ \leq s < ۲^{*}_{\partial} = \frac{۲(N-۱)}{N-۲}$. با توجه به همگرایی‌های ۵.۴ نتیجه می‌شود که وقتی $n\to\infty$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_{n}(x)|^{p}\,\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \to \int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_{۱}(x)|^{p}\,\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \\
&\int_{\mathbb{B}} g(x)u_{n}(x)\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \to \int_{\mathbb{B}} g(x)u_{۱}(x)\frac{dx_{۱}}{x_{۱}}dx' \\
&\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_{n}(x)|^{q}\,dx' \to \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_{۱}(x)|^{q}\,dx' \qquad (۶.۴)
\end{aligned}
$$

با توجه به نگاشت‌های تاری ϕ_u در بخش قبل و ویژگی‌های به دست آمده برای آنها، یک عنصر $t_1 \in (0,\infty)$ وجود دارد که $t_1u_1 \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ و همچنین $J(t_1u_1) < 0$ ، $\inf_{u\in\mathcal{N}_+(\mathbb{B})} J(u) < 0$. اکنون ثابت می‌کنیم $u_n \to u_1$ به‌طور قوی در فضای سوبولف $\mathcal{H}^{1,\frac{n}{2}}(\mathbb{B})$ همگرا است. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت $\|u_1\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})}$. بنابراین برای $u_n \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \phi_u'(t_1) = \\
&\lim_{n\to\infty}\Bigg(t_1 \|u_n\|_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} - t_1^{p-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_n|^p \frac{dx_1}{x_1}dx' \\
&- \lambda t_1^{q-1}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_n|^q\,dx' - t_1\int_{\mathbb{B}} g(x)u_n(x)\frac{dx_1}{x_1}dx'\Bigg) > t_1\|u_1\|^2_{\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})} \\
&- t_1^{p-1}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_1(x)|^p\frac{dx_1}{x_1}dx' - \lambda t_1^{q-1}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_1(x)|^q\,dx' \\
&- t_1\int_{\mathbb{B}} g(x)u_1(x)\frac{dx_1}{x_1}dx' = \phi_{u_1}'(t_1) = 0.
\end{aligned} \tag{۷.۴}
$$

به عبارت دیگر برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n داریم $\phi_{u_n}(t_1) > 0$. چون به ازای $t = 1$ می‌توان نوشت که

$$u_n = 1.u_n \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$$

بنابراین برای هر $t \in (0,1)$ نتیجه می‌شود که $\phi_{u_n}(t) < 0$ و نیز برای هر n، $\phi_{u_n}(1) = 0$. لذا t_1 باید بزرگتر اکید از یک باشد. از طرف دیگر، $\phi_{u_1}(t)$ برای $t \in (0,t_1)$ یک نگاشت کاهشی است و

$$J(t_1u_1) < J(u_1) < \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}_+(\mathbb{B})} J(u) \tag{۸.۴}$$

که تناقض است. بنابراین $u_n \to u_1$ به‌طور قوی در فضای سوبولف $\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ همگرا باید باشد. در نتیجه وقتی $n \to \infty$ نتیجه می‌شود که

$$J(u_n) \to J(u_1) = \inf_{u\in\mathcal{N}_+(\mathbb{B})} J(u).$$

بنابراین u_1 یک کمینه‌کننده تابعک J روی مجموعه $\mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ است . به‌علاوه چون $J(u_1) = J(|u_1|)$ از این رو $|u_1| \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ و طبق لم ۱.۳ ، u_1 یک جواب مثبت برای مساله ۱.۱ است. □

اکنون در گزاره زیر درخصوص وجود کمینه‌کننده تابعک J روی مجموعه $\mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ بحث می‌کنیم.

گزاره ۴.۴. فرض کنید $0 < C_g < 1$ و $0 < \lambda < \lambda_0$ ، در این صورت تابعک J یک کمینه‌کننده u_2 روی مجموعه $\mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ را می‌پذیرد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

الف) $J(u_2) = \inf_{u\in\mathcal{N}_-(\mathbb{B})} J(u)$،

ب) u_2 یک جواب مثبت برای مساله ۱.۱ است.

اثبات. برای اثبات از شیوه مشابه در اثبات گزاره ۴.۴ استفاده می‌کنیم. چون تابعک J روی مجموعه $\mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ از پایین کراندار است لذا یک دنباله کمینه‌کننده مانند $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}_-(\mathbb{B})} J(u).$$

با استفاده از گزاره ۲.۴ دنباله $\{u_n\}$ در فضای سوبولف $\mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ کراندار است. بنابراین در حد انتخاب یک زیردنباله در این فضا، $u_2 \in \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B})$ وجود دارد که همگرایی‌های زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u_2 \qquad in \qquad \mathcal{H}^{1,\frac{N}{2}}(\mathbb{B}) \\
u_n &\to u_2 \qquad \in \qquad L_r^{\frac{N}{r}}(\mathbb{B}) \\
u_n &\to u_2 \qquad in \qquad L_s^{\frac{N}{s}}(\partial\mathbb{B})
\end{aligned} \tag{۹.۴}
$$

به‌طوری که برای $N \geq ۳$، $۱ \leq r < ۲^* = \frac{۲N}{N-۲}$ و $۱ \leq s < ۲^*_\partial = \frac{۲(N-۱)}{N-۲}$. بنابه همگرایی‌های ۹.۴ و نیز پیوستگی توابع a, b, g نتیجه می‌شود که وقتی $n \to \infty$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_n|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \to \int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_۲|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \\
&\int_{\mathbb{B}} g(x) u_n(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \to \int_{\mathbb{B}} g(x) u_۲(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \\
&\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_n|^q\, dx' \to \int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_۲|^q\, dx'.
\end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

با توجه به نتایج پیرامون نگاشت‌های تاری ϕ_u در بخش قبل، می‌دانیم که $t_۱, t_۲ \in (۰, \infty)$ وجود دارد که $t_۱ < t_۰ < t_۲$ و به‌علاوه $t_۱ u \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ و $t_۲ u \in \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ به‌طوری که

$$J(t_۱ u) \leq J(tu) \leq J(t_۲ u).$$

اکنون ثابت می‌کنیم که همگرایی $u_n \to u_۲$ در فضای سوبولف $\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})$ به‌طور قوی برقرار خواهد بود. اگرچنین نباشد آنگاه باید داشته باشیم:

$$\|u_۲\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})}.$$

چون $u_n \in \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$، برای هر $t \geq t_۰$ نتیجه می‌شود که $J(u_n) \geq J(tu_n)$ و همچنین

$$\begin{aligned}
&J(t_۲ u_۲) = \\
&\frac{t_۲^۲}{۲}\|u_۲\|^۲_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_۲(x)|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx' \qquad (۱۱.۴)\\
&- t_۲ \int_{\mathbb{B}} g(x) u_۲(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' - \frac{\lambda t_۲^q}{q}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_۲|^q\, dx' \\
&< \lim_{n\to\infty}\left(\frac{t_۲^۲}{۲}\|u_n\|^۲_{\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})} - \frac{t_۲^p}{p}\int_{\mathbb{B}} a(x)\,|u_n|^p \frac{dx_۱}{x_۱} dx'\right.\\
&\left. - t_۲\int_{\mathbb{B}} g(x) u_n(x) \frac{dx_۱}{x_۱} dx' - \frac{\lambda t_۲^q}{q}\int_{\partial\mathbb{B}} b(x)\,|u_n|^q\, dx'\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} J(t_۲ u_n) \leq \lim_{n\to\infty} j(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}_-(\mathbb{B})} J(u) \qquad (۱۲.۴)
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین دنباله u_n در فضای سوبولف مخروطی $\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})$ به $u_۲$ به‌طور قوی همگرا است. در نتیجه وقتی $n \to \infty$ داریم

$$J(u_n) \to J(u_۲).$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، $J(u_n) \to J(u_۲)$. لذا $u_۲$ یک کمینه‌کننده برای تابعک J روی مجموعه $\mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ است. از طرفی چون $J(u_۲) = J(|u_۲|)$ و همچنین $|u_۲| \in \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ طبق لم ۱.۳، $u_۲$ یک جواب مثبت برای مساله ۱.۱ است. □

اثبات قضیه اصلی

اثبات. با استفاده از گزاره‌های ۲.۴، ۳.۴ و ۴.۴ نتیجه می‌شود که مساله ۱.۱ دو جواب $u_۱ \in \mathcal{N}_+(\mathbb{B})$ و $u_۲ \in \mathcal{N}_-(\mathbb{B})$ را در فضای سوبولف مخروطی $\mathcal{H}^{۱,\frac{N}{۲}}(\mathbb{B})$ می‌پذیرد که با توجه به اینکه برای مجموعه‌های نهاری داریم

$$\mathcal{N}_+(\mathbb{B}) \cap \mathcal{N}_-(\mathbb{B}) = \emptyset$$

بنابراین $u_۱$ و $u_۲$ دو جواب مثبت مجزا برای مساله ۱.۱ هستند. □

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک دستگاه بیضوی ناهمگن به همراه شرایط مرزی نویمان غیرخطی در یک همسایگی از نقطه تکین مخروطی مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از روش‌های تغییراتی و روش خمینه نهاری به ازای مقادیر $0 < \lambda < \lambda_0$ و نیز برای اختلال کوچک در دستگاه که به ازای مقدار مناسب از ثابت نشاندن آن یعنی $0 < C_g < 1$ ، وجود حداقل دو جواب مثبت اثبات شد. با توجه به نتایج بیان شده در [۱، ۹] که یک جواب مثبت و یک جواب منفی برای مساله مطرح شده در آنجا اثبات شد و نیز با توجه به اثبات حداقل دو جواب مثبت برای مساله مطرح شده در این مقاله ، مطالعه در خصوص وجود بیشتر از دو جواب برای هریک از این مسائل می‌تواند جالب باشد.

فهرست منابع

[1] Alimohammady, M., Jafari, A.A. and Koozehgar Kalleji, M., 2017. Multiple solutions for non-homogeneous degenerate Schrödinger equations in cone Sobolev spaces. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **48(1)**, pp. 133–146. DOI: 10.1007/s13226-017-0215-x

[2] Binding, P.A., Drabek, P. and Huang, X.Y., 1997. On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations. *Electronic journal of differential equations*, **5**. pp. 1–11. ejde.math.swt.edu or 147.26.103.110 or 129.120.3.113

[3] Brwon, K.J. and Zhang, Y., 2003. The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign-changing weight function. *Journal of Differential Equations*, **193**. pp. 481–499. doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00121-9

[4] Chen, H., Liu, X. and Wei, Y., 2012. Cone Sobolev inequality and Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations on manifold with conical singularities. *Calculus of Variations*, **43**. pp. 463–484. doi.org/10.1007/s00526-011-0418-7

[5] Chen, H., Liu, X. and Wei, Y., 2011. Existence theory for a class of semilinear totally characteristic elliptic equations with critical cone Sobolev exponents. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **37**. pp. 27–43. doi.org/10.1007/s10455-010-9226-0

[6] Chen, H., Wei, Y. and Zhou, B. 2012. Existence of solutions for degenerate elliptic equations with singular potential on conical singular manifolds. *Mathematische Nachrichten*, **25(N.11-12)**. pp. 1370–1384. doi.org/10.1002/mana.201100088

[7] Gambini, R., Olmedo, J. and Pullin, J., 2014. Quantum black holes in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity* , **31**. 095009. DOI 10.1088/0264-9381/31/9/095009.

[8] Hawking, S., 2014. Singularities and the geometry of spacetime. *The European Physical Journal H*, **39**. pp. 413–503. doi.org/10.1140/epjh/e2014-50013-6

[9] Koozehgar Kalleji, M., Alimohammady, M. and Jafari, A.A., 2019. Multiple solutions for a class of nonhomogeneous semilinear equations with critical cone Sobolev exponent. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **147(2)**. pp. 597–608. DOI: 10.1090/proc/14332

[10] Ma, L. and Schulze, B.W., 2010. Operators on manifolds with conical singularities. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, **1**. pp. 55–74. doi.org/10.1007/s11868-010-0002-5

[11] Nazaikinskii, V.E., Yu. Savin, A., Schulze, B.W. and Yu. Sternin, B., 2006. *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, Published by Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group.

[12] Nehari, Z., 1960. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **95**. pp. 101–123. doi.org/10.1090/S0002-9947-1960-0111898-8

[13] Schulze, B. W., 1998. *Boundary value problems and singular pseudo-differential operators*, Wiley, Chichester.

[14] Wu, T.F., 2010. Multiplicity of positive solutions for a semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N_+$ with non-linear boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **6**. pp. 1675–1696. Doi: 10.3934/cpaa.2010.9.1675

Positive solutions for semilinear elliptic problem with nonlinear boundary condition on conical Sobolev spaces

Morteza Koozehgar Kalleji [11]

Department of Mathematics, Faculty of Sciences Arak University, Arak, 38156-8-8349, Iran

Communicated by: Morteza Fotouhi

Received: 3 June 2024 Accepted: 22 October 2024

Abstract: In this paper, a system of elliptic equations with a perturbation in the system and also the nonlinear Neumann boundary conditions near a conical singular point are studied. By introducing the conical Sobolv space and using variational methods and Nehari manifold method, we will prove the existence of at least two positive solutions for this problem on the conical Sobolev space.

Keywords: Semilinear Elliptic Equation, Nonlinear Boundary Problems, Variational Methods, Cone sobolev Spaces.

[11] Corresponding author

E-mail addresses: (M. K. Kalleji) m-koozehgarkalleji@araku.ac.ir