مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۱۷-۲۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.46281.2263

ایده‌آل‌ها، گریل‌ها، اولیه‌ها و پالایه‌ها از دیدگاه رسته

قاسم میرحسین‌خانی (۱) [۱] و امین طلابیگی (۲)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور تهران، تهران، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی‌آباد

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۹

چکیده: در این مقاله، ویژگی‌های رسته‌ای مفاهیم ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه را که نقش اساسی و مهمی در مطالعه فضاهای توپولوژی دارند مورد بررسی قرار می‌دهیم. بعضی محققین بدون توجه به دیدگاه رسته، نشان داده‌اند که همه‌ی این مفاهیم معادل‌اند. در اینجا ریخت‌ها و در نتیجه رسته هر یک از این مفاهیم را تعریف و سپس نشان می‌دهیم که همه‌ی آنها به‌جزء رسته پالایه‌ها باهم یکریخت‌اند. به‌عنوان یک نتیجه مهم نشان داده شده است که این رسته‌ها به‌جزء رسته پالایه‌ها، رسته‌های توپولوژیکی‌اند، در نتیجه کامل و هم‌کامل‌اند اما جبری نیستند. بنابراین، بسیاری از خواص توپولوژی را به‌راحتی می‌توان برحسب هر یک از این مفاهیم بیان و بررسی کرد. سرانجام، بعضی ساختارهای رسته ایده‌آل‌ها شرح داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل، گریل، اولیه، پالایه، رسته.

رده‌بندی ریاضی: 54A20; 54A99; 55U40; 18A30

۱ مقدمه

ایده‌آل [۲]، گریل [۳]، اولیه [۴] و پالایه [۵] ساختارهای کلاسیکی‌اند که نقش اساسی و مهمی در مطالعه فضاهای توپولوژی دارند. مطالعه پالایه‌ها روشی بسیار طبیعی برای توصیف همگرایی در فضای توپولوژی عمومی است. پالایه‌ها در سال ۱۹۳۷ توسط کارتان [۷، ۸] معرفی شدند. در سال ۱۹۴۰ بورباکی از پالایه‌ها برای اثبات چندین نتیجه در مباحث خود استفاده کرد [۶]. تکیه کامل به پالایه‌ها

[۱] نویسنده مسئول مقاله

[2] Ideal
[3] Grill
[4] Primal
[5] Filter

(G. Mirhosseinkhani) gh.mirhosseini@sirjantech.ac.ir, (A. Talabeigi)talabeigi@pnu.ac.ir

برای توسعه توپولوژی را می‌توان توسط کوالسکی در [۱۵] یافت. ردپایی از مفهوم پالایه در اوایل سال ۱۹۱۴ در مقاله روت [۲۱] وجود دارد. اخیراً، پالایه‌ها نقش اساسی در توسعه فضاهای فازی دارند که در علوم کامپیوتر و مهندسی کاربرد دارند. پالایه‌ها همچنین ابزار مهمی هستند که توسط محققان برای توصیف مفاهیم همگرایی غیر توپولوژیکی در آنالیز تابعی استفاده می‌شود [۴]. کوراتوفسکی ایده ایده‌آل را به‌عنوان مفهوم دوگان پالایه معرفی کرد [۱۶] و سپس بسیاری از محققین از ایده‌آل برای مطالعه و بررسی خواص فضاهای توپولوژی استفاده کردند. یانکوویچ و هملت [۱۳] فضای توپولوژی جدیدی را با استفاده ایده‌آل از یک توپولوژی معین روی یک مجموعه معرفی کردند.

به‌طور مشابه، یکی دیگر از ساختارهای کلاسیک توپولوژی گریل است که توسط شوکه در سال ۱۹۴۷ ارائه شد [۱۱]. بعدها، ترون [۳۰] ساختارهای مجاورتی را در گریل‌ها معرفی کرد. در سال ۱۹۷۷، ترون و شادوپدیای [۹] ایده‌های توسیع فضای بستار را بر حسب گریل بیان کردند. علاوه بر این، شادوپدیای و همکاران [۱۰]، گریل را برای مطالعه فضاهای مروتوپیک مورد استفاده قرار دادند. از آن زمان، ساختار گریل به شدت در توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته است. روی و موکرجی [۲۲-۲۴] خواص توپولوژیکی مختلفی را با گریل‌ها مورد مطالعه قرار دادند. عملگرها بر اساس گریل توسط روی و همکاران [۲۵]، ناصف و عزام [۲۰] و بسیاری دیگر معرفی شدند. موداک فضای پالایه-گریل و خواص مرتبط را مورد مطالعه قرار داد [۱۷، ۱۸]. هوسنی [۱۲] ساختارهای گریل را در δ-مجموعه‌ها مورد بررسی قرار داد. سیستم‌های بستار از طریق گریل‌ها در [۲۹] شرح داده شدند. علاوه بر این، نتایج مختلف پیشرفته فضاها از طریق گریل‌ها در [۳، ۱۹] و بسیاری دیگر مورد بررسی قرار گرفتند. طلابیگی به‌ترتیب در [۲۶] و [۵] با بهره‌گیری از گریل، قضایای معروف فشرده‌سازی الکساندرف و فشردگی تیخونوف را تعمیم داد، به‌علاوه معادل بودن قضیه دوم (تعمیم فشردگی تیخونوف) را با اصل انتخاب اثبات نمود. همچنین طلابیگی در [۲۷] و [۲۸] با استفاده از گریل، روشهایی جهت تغییر توپولوژی یک فضای توپولوژیک را معرفی کرد. اخیراً، مفهوم اولیه به‌عنوان ساختار دوگان گریل توسط آچاریا و همکاران [۱] جهت ساختن یک فضای توپولوژی جدید از یک توپولوژی معین ارائه شده است.

در این مقاله، ویژگی‌های رسته‌ای مفاهیم ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. در مقاله [۱۴] نویسندگان نشان داده‌اند که ایده‌آل و گریل، در نتیجه بسیاری از مفاهیم توپولوژیکی که برحسب آنها بیان شده معادل‌اند. این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، مفاهیم و مقدمات مورد نیاز در مقاله بیان می‌شوند، همچنین شرط معادل دیگری برای تعریف هر یک از این مفاهیم بیان و با استفاده از آن نشان داده می‌شود که ایده‌آل، گریل، اولیه با هم معادل‌اند، اما پالایه‌ها با گردایه کوچکتری از ایده‌آل‌ها یعنی ایده‌آل‌های سره معادل‌اند. در بخش ۳، دو نوع از توابع را برای هر کدام از این مفاهیم و در نتیجه دو نوع رسته را معرفی و سپس نشان می‌دهیم که در هر دو حالت رسته‌های ایده‌آل‌ها، گریل‌ها و اولیه‌ها با هم یکریخت‌اند. به‌علاوه، رسته پالایه‌ها با زیررسته پر ایده‌آل‌های سره یکریخت است. به‌عنوان یک نتیجه مهم نشان می‌دهیم که همه‌ی این رسته‌ها به‌جز رسته پالایه‌ها، رسته‌های توپولوژیکی‌اند، در نتیجه کامل و هم‌کامل‌اند اما جبری نیستند. سرانجام در بخش ۴، بعضی ساختارهای حدی و هم‌حدی، مانند ضرب‌ها، هم‌ضرب‌ها، برابرسازها و هم‌برابرسازها را در رسته ایده‌آل‌ها شرح می‌دهیم.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲. [۱۶] گردایه $\mathcal{I}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی X را یک ایده‌آل روی X می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\mathcal{I} \neq \emptyset$

۲. اگر $A \in \mathcal{I}$ و $B \subseteq A$، آن‌گاه $B \in \mathcal{I}$،

۳. اگر $A \in \mathcal{I}$ و $B \in \mathcal{I}$، آن‌گاه $A \cup B \in \mathcal{I}$.

تعریف ۲.۲. [۱۱] گردایه $\mathcal{G}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی X را یک گریل روی X می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\emptyset \notin \mathcal{G}$،

۲. اگر $A \in \mathcal{G}$ و $A \subseteq B$، آن‌گاه $B \in \mathcal{G}$،

۳. اگر $A \cup B \in \mathcal{G}$، آن‌گاه $A \in \mathcal{G}$ یا $B \in \mathcal{G}$.

در این مقاله برای راحتی نمادگذاری‌ها از A^c برای متمم مجموعه A در مجموعه مربوطه استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم اگر $\mathcal{G}$ یک گریل ناتهی روی مجموعه X باشد، آنگاه $X \in \mathcal{G}$. در نتیجه برای هر زیرمجموعه A از X یا $A \in \mathcal{G}$ یا $A^c \in \mathcal{G}$. این ویژگی خوب گریل کمک می‌کند تا خواص توپولوژی را راحت‌تر بتوان برحسب آن بیان کرد.

تعریف ۳.۲. [۱] گردایه $\mathcal{P}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی X را یک اولیه روی X می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $X \notin \mathcal{P}$،

۲. اگر $A \in \mathcal{P}$ و $B \subseteq A$، آن‌گاه $B \in \mathcal{P}$،

۳. اگر $A \cap B \in \mathcal{P}$، آن‌گاه $A \in \mathcal{P}$ یا $B \in \mathcal{P}$.

تعریف **۴.۲.** [۱۶] گردایه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی X را یک پالایه روی X می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ و $\mathcal{F} \neq \emptyset$،

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ و $A \subseteq B$، آن‌گاه $B \in \mathcal{F}$،

۳. اگر $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{F}$.

ملاحظه **۵.۲.** شرایط (۱) و (۲) در تعریف ایده‌آل نتیجه می‌دهند که هر ایده‌آل شامل مجموعه تهی است. بنابراین، $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$ و $\mathcal{I} = P(X)$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین ایده‌آل‌ها روی مجموعه ناتهی X می‌باشند، که در آن $P(X)$ مجموعه توانی X است. ایده‌آل $\mathcal{I}$ را سره می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{I} \neq P(X)$ به‌عبارت دیگر $X \notin \mathcal{I}$.

ملاحظه **۶.۲.** شرایط (۱) و (۲) در تعریف پالایه نتیجه می‌دهند که هر پالایه شامل مجموعه X است. بنابراین، $\mathcal{F} = \{X\}$ کوچکترین پالایه روی X است. از طرف دیگر $\emptyset = \mathcal{P} = \mathcal{G}$ کوچکترین گریل و اولیه روی X، اما $\mathcal{G} = P(X) \setminus \{\emptyset\}$ و $\mathcal{P} = P(X) \setminus \{X\}$ به‌ترتیب بزرگترین گریل و اولیه روی X هستند. همچنین به‌راحتی دیده می‌شود که اگر X حداقل دو عنصر داشته باشد، آن‌گاه $\mathcal{F} = P(X) \setminus \{\emptyset\}$ یک پالایه روی X نیست.

در [۲۶] طلابیگی شرایط (۲) و (۳) تعریف گریل را تحت یک شرط به‌صورت زیر بیان کرده است:

$$A \cup B \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{G} \ \ \vee \ \ B \in \mathcal{G}.$$

به‌طور مشابه، گزاره زیر را که به‌راحتی از تعاریف نتیجه می‌شود داریم.

گزاره **۷.۲.** شرایط (۲) و (۳) در تعاریف ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه را به‌ترتیب می‌توان تحت یک شرط به‌صورت زیر بیان کرد:

۱. $A \cup B \in \mathcal{I}$ اگر و فقط اگر $A \in \mathcal{I}$ و $B \in \mathcal{I}$.

۲. $A \cap B \in \mathcal{P}$ اگر و فقط اگر $A \in \mathcal{P}$ یا $B \in \mathcal{P}$.

۳. $A \cap B \in \mathcal{F}$ اگر و فقط اگر $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{F}$.

تعریف **۸.۲.** فرض کنید $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل روی مجموعه ناتهی X باشد. در این‌صورت متناظر با $\mathcal{I}$ گردایه‌های $\mathcal{G}(\mathcal{I})$، $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ و $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $\mathcal{G}(\mathcal{I}) := \{A \subseteq X \mid A \notin \mathcal{I}\}$،

۲. $\mathcal{P}(\mathcal{I}) := \{A \subseteq X \mid A^c \notin \mathcal{I}\}$،

۳. $\mathcal{F}(\mathcal{I}) := \{A \subseteq X \mid A^c \in \mathcal{I}\}$.

گزاره **۹.۲.** فرض کنید $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل روی مجموعه ناتهی X باشد. در این‌صورت گردایه‌های $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ و $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ به‌ترتیب گریل و اولیه روی X هستند. به‌علاوه، اگر $\mathcal{I}$ سره باشد، آن‌گاه $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ پالایه روی X است.

اثبات. چون $\emptyset \in \mathcal{I}$، پس $\emptyset \notin \mathcal{G}(\mathcal{I})$. از طرف دیگر، بنابر گزاره ۷.۲، داریم:

$$A \cup B \in \mathcal{G}(\mathcal{I}) \Longleftrightarrow A \cup B \notin \mathcal{I} \Longleftrightarrow A \notin \mathcal{I} \ \ \vee \ \ B \notin \mathcal{I} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{G}(\mathcal{I}) \ \ \vee \ \ B \in \mathcal{G}(\mathcal{I}).$$

بنابراین، $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ یک گریل است. برهان بقیه حالات هم به‌طور مشابه است. □

تعریف **۱۰.۲.** فرض کنید $\mathcal{G}$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{F}$ به‌ترتیب گریل، اولیه و پالایه روی مجموعه ناتهی X اند. در این‌صورت گردایه‌های $\mathcal{I}(\mathcal{G})$، $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ و $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $\mathcal{I}(\mathcal{G}) := \{A \subseteq X \mid A \notin \mathcal{G}\}$

۲. $\mathcal{I}(\mathcal{P}) := \{A \subseteq X \mid A^c \notin \mathcal{P}\}$

۳. $\mathcal{I}(\mathcal{F}) := \{A \subseteq X \mid A^c \in \mathcal{F}\}$

با توجه به تعاریف و مشابه برهان گزاره ۹.۲، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱۱.۲. فرض کنید $\mathcal{G}$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{F}$ به‌ترتیب گریل، اولیه و پالایه روی مجموعه ناتهی X باشند. در این‌صورت گردایه‌های $\mathcal{I}(\mathcal{G})$، $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ و $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ ایده‌آلهایی روی مجموعه X اند.

گزاره ۱۲.۲. فرض کنید $\mathcal{I}$، $\mathcal{G}$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{F}$ به‌ترتیب ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه روی مجموعه ناتهی X باشند. در این‌صورت روابط زیر برقرارند:

۱. $\mathcal{I}(\mathcal{G}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ و $\mathcal{G}(\mathcal{I}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

۲. $\mathcal{I}(\mathcal{P}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ و $\mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$.

۳. اگر $\mathcal{I}$ سره باشد، آن‌گاه $\mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ و $\mathcal{F}(\mathcal{I}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

اثبات. به‌راحتی از تعریف ۱۰.۲، نتیجه برقرار است. □

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت گردایه تمام ایده‌آل‌ها روی X را با $\mathbf{Id(X)}$، گردایه تمام گریل‌ها روی X را با $\mathbf{Gr(X)}$، گردایه تمام اولیه‌ها روی X را با $\mathbf{Pr(X)}$، گردایه تمام پالایه‌ها روی X را با $\mathbf{Fi(X)}$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، گردایه تمام ایده‌آل‌های سره روی X را با $\mathbf{Id_p(X)}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۲. یکریختی (تناظر یک‌به‌یک) زیر از مجموعه‌ها را داریم:

$$\mathbf{Id(X)} \cong \mathbf{Gr(X)} \cong \mathbf{Pr(X)}, \quad \mathbf{Id_p(X)} \cong \mathbf{Fi(X)}.$$

اثبات. بنابر گزاره ۱۲.۲، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که توابع $\Phi : \mathbf{Id(X)} \to \mathbf{Gr(X)}$، $\Psi : \mathbf{Id(X)} \to \mathbf{Pr(X)}$ و $\Omega : \mathbf{Id_p(X)} \to \mathbf{Fi(X)}$ با ضابطه‌های $\Phi(\mathcal{I}) = \mathcal{G}(\mathcal{I})$، $\Psi(\mathcal{I}) = \mathcal{P}(\mathcal{I})$ و $\Omega(\mathcal{I}) = \mathcal{F}(\mathcal{I})$ همگی تناظر یک‌به‌یک اند. □

مثال ۱۴.۲. هر یک از گردایه‌های زیر ایده‌آلی روی مجموعه ناتهی X است:

۱. زیرمجموعه‌های متناهی X،

۲. زیرمجموعه‌های شمارای X،

۳. زیرمجموعه‌های کراندار یک فضای متریک X،

۴. زیرمجموعه‌های کلاًکراندار یک فضای متریک X،

۵. زیرمجموعه‌های با بستار فشرده‌ی یک فضای متریک X.

بنابر قضیه ۱۳.۲، متناظر با هر کدام از ایده‌آل‌های مثال قبل، مثالهایی از گریل‌ها و اولیه‌ها را داریم.

۳ رسته ایده‌آل‌ها، گریل‌ها، اولیه‌ها و پالایه‌ها

در این بخش، ابتدا دو نوع ریخت و در نتیجه دو نوع رسته برای هر یک از مفاهیم کلاسیک تعریف شده در بخش قبل را معرفی و سپس نشان می‌دهیم که در هر دو حالت رسته‌های ایده‌آل‌ها، گریل‌ها و اولیه‌ها با هم یکریخت‌اند. به‌علاوه، رسته پالایه‌ها با زیررسته پر ایده‌آل‌های سره یکریخت است. به‌عنوان یک نتیجه مهم نشان می‌دهیم که همه‌ی این رسته‌ها به‌جز رسته پالایه‌ها، رسته‌های توپولوژیکی‌اند، در نتیجه کامل و هم‌کامل‌اند اما جبری نیستند. برای مفاهیم اساسی و جزئیات بیشتر نظریه رسته می‌توانید مرجع [۲] را ببینید.

تعریف **۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{I}$، $\mathcal{G}$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{F}$ به‌ترتیب ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه روی مجموعه ناتهی X باشند. در این‌صورت زوجهای $(X,\mathcal{I})$، $(X,\mathcal{G})$، $(X,\mathcal{P})$ و $(X,\mathcal{F})$ را به‌ترتیب فضای ایده‌آل، فضای گریل، فضای اولیه و فضای پالایه می‌نامیم.

برای تعریف توابع بین فضاهای ایده‌آل و در نتیجه مفاهیم هم‌ارز دیگر آن، با توجه به استفاده ایده‌آل‌ها در فضاهای توپولوژی دو دیدگاه وجود دارد، یکی توابعی که ایده‌آل‌ها را حفظ می‌کنند و دیگری توابعی که ایده‌آل‌ها را برمی‌گردانند. یکی از ایده‌آل‌های اساسی در مطالعه فضاهای توپولوژی متریک، گردایه تمام مجموعه‌های کراندار است. معمولاً توابعی که مجموعه‌های کراندار را برمی‌گردانند، توابع سره نامیده می‌شوند. بنابراین تعاریف زیر را داریم.

تعریف **۲.۳.**
۱. تابع $f:(X,\mathcal{I})\to(Y,\mathcal{I}')$ بین فضاهای ایده‌آل را یک نگاشت ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه برای هر $A\in\mathcal{I}$، داشته باشیم $f(A)\in\mathcal{I}'$.

۲. تابع $f:(X,\mathcal{G})\to(Y,\mathcal{G}')$ بین فضاهای گریل را یک نگاشت گریل می‌نامیم، هرگاه برای هر $A\notin\mathcal{G}$، داشته باشیم $f(A)\notin\mathcal{G}'$.

۳. تابع $f:(X,\mathcal{P})\to(Y,\mathcal{P}')$ بین فضاهای اولیه را یک نگاشت اولیه می‌نامیم، هرگاه برای هر $A\notin\mathcal{P}$، داشته باشیم $(f(A^c))^c\notin\mathcal{P}'$.

۴. تابع $f:(X,\mathcal{F})\to(Y,\mathcal{F}')$ بین فضاهای پالایه را یک نگاشت پالایه می‌نامیم، هرگاه برای هر $A\in\mathcal{F}$، داشته باشیم $(f(A^c))^c\in\mathcal{F}'$.

تعریف **۳.۳.**
۱. تابع $f:(X,\mathcal{I})\to(Y,\mathcal{I}')$ بین فضاهای ایده‌آل را یک نگاشت سره ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه برای هر $B\in\mathcal{I}'$، داشته باشیم $f^{-1}(B)\in\mathcal{I}$.

۲. تابع $f:(X,\mathcal{G})\to(Y,\mathcal{G}')$ بین فضاهای گریل را یک نگاشت سره گریل می‌نامیم، هرگاه برای هر $B\notin\mathcal{G}'$، داشته باشیم $f^{-1}(B)\notin\mathcal{G}$.

۳. تابع $f:(X,\mathcal{P})\to(Y,\mathcal{P}')$ بین فضاهای اولیه را یک نگاشت سره اولیه می‌نامیم، هرگاه برای هر $B\notin\mathcal{P}'$، داشته باشیم $f^{-1}(B)\notin\mathcal{P}$.

۴. تابع $f:(X,\mathcal{F})\to(Y,\mathcal{F}')$ بین فضاهای پالایه را یک نگاشت سره پالایه می‌نامیم، هرگاه برای هر $B\in\mathcal{F}'$، داشته باشیم $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

گزاره **۴.۳.** تابع $f:(X,\mathcal{I})\to(Y,\mathcal{I}')$ بین فضاهای ایده‌آل، یک نگاشت ایده‌آل است اگر و فقط اگر تابع $f:(X,\mathcal{G}(\mathcal{I}))\to(Y,\mathcal{G}(\mathcal{I}'))$ یک نگاشت گریل باشد. به‌طور مشابه، تابع $f:(X,\mathcal{G})\to(Y,\mathcal{G}')$ بین فضاهای گریل، یک نگاشت گریل است اگر و فقط اگر تابع $f:(X,\mathcal{I}(\mathcal{G}))\to(Y,\mathcal{I}(\mathcal{G}'))$ یک نگاشت ایده‌آل باشد. به‌علاوه، با جایگذاری $\mathcal{P}$ $(\mathcal{F})$ به‌جای $\mathcal{G}$ در گزاره، نتیجه مشابه برای نگاشت اولیه (پالایه)، همچنین نگاشتهای سره نیز برقرار است.

اثبات. بنابر تعاریف ۸.۲، ۲.۳ و ۳.۳ با یک بررسی ساده نتیجه برقرار است. □

به‌راحتی می‌توان دید که ترکیب نگاشت‌های ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه)، نگاشتی ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه) است. به‌طور مشابه، ترکیب نگاشت‌های سره ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه)، نگاشتی سره ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه) است. بنابراین دو نوع رسته براساس ریخت‌ها می‌توانیم تعریف کنیم. نوع اول، رسته‌ای که اشیاء آن همه‌ی فضاهای ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه) و ریختهای آن همه‌ی نگاشتهای ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه) است را با نماد $\mathbf{Ide}$ (به‌ترتیب $\mathbf{Gri}$، $\mathbf{Pri}$، $\mathbf{Fil}$) نمایش و نوع دوم، رسته‌ای که اشیاء آن همه‌ی فضاهای ایده‌آل (به‌ترتیب گریل، اولیه، پالایه) و ریختهای آن همه‌ی نگاشتهای سره ایده‌آل (به ترتیب گریل، اولیه، پالایه) است را با نماد $\overline{\mathbf{Ide}}$ (به‌ترتیب $\overline{\mathbf{Gri}}$، $\overline{\mathbf{Pri}}$، $\overline{\mathbf{Fil}}$) نمایش می‌دهیم. همچنین، زیررسته‌های پر از $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ که اشیاء آن همه‌ی فضاهای ایده‌آل سره است را به‌ترتیب با نمادهای $\mathbf{Ide_p}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}_\mathbf{p}$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه **۵.۳**. همان‌طور که در تعاریف ایده‌آل، گریل، اولیه و پالایه می‌بینید مجموعه X را ناتهی فرض گرفتیم. در حالت خاص $X=\emptyset$، گردایه $\{\emptyset\}$ در شرایط تعریف ایده‌آل و گردایه $\emptyset$ در شرایط تعریف هم گریل و هم اولیه صدق می‌کند، اما هیچ‌کدام از این گردایه‌ها در شرایط تعریف پالایه صدق نمی‌کنند. در اینجا، همانند رسته فضاهای توپولوژی که شامل فضای توپولوژی تهی است، فضای ایده‌آل تهی $(\emptyset, \{\emptyset\})$، فضای گریل تهی $(\emptyset, \emptyset)$ و فضای اولیه تهی $(\emptyset, \emptyset)$ را به‌عنوان فضای تهی به‌ترتیب در رسته‌های $\mathbf{Ide}$، $\mathbf{Gri}$ و $\mathbf{Pri}$ در نظر می‌گیریم. به‌علاوه، فضای تهی در رسته‌های $\mathbf{Fil}$ و $\mathbf{Ide_p}$ قرار ندارد. از دیدگاه رسته‌ای، این بدین معنی است که شیء ابتدایی در رسته‌های $\mathbf{Ide}$، $\mathbf{Gri}$ و $\mathbf{Pri}$ فضای تهی است، اما در رسته‌های $\mathbf{Fil}$ و $\mathbf{Ide_p}$ شیء ابتدایی وجود ندارد. همچنین، نتیجه مشابه برای رسته‌های نوع دوم نیز برقرار است.

قضیه **۶.۳**. یکریختی‌های رسته‌ای زیر برقرارند:

$$\mathbf{Ide} \cong \mathbf{Gri} \cong \mathbf{Pri}, \qquad \mathbf{Fil} \cong \mathbf{Ide_p},$$

$$\overline{\mathbf{Ide}} \cong \overline{\mathbf{Gri}} \cong \overline{\mathbf{Pri}}, \qquad \overline{\mathbf{Fil}} \cong \overline{\mathbf{Ide_p}}.$$

اثبات. بنابر گزاره‌های ۱۲.۲ و ۴.۳، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تابعگون‌های $F:\mathbf{Ide}\to\mathbf{Gri}$، $G:\mathbf{Ide}\to\mathbf{Pri}$ و $H:\mathbf{Ide_p}\to\mathbf{Fil}$ با ضابطه‌های زیر همگی یکریختی بین رسته‌های مورد نظراند:

$$F((X,\mathcal{I})\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{I}')) = (X,\mathcal{G}(\mathcal{I}))\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{G}(\mathcal{I}')),$$

$$G((X,\mathcal{I})\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{I}')) = (X,\mathcal{P}(\mathcal{I}))\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{P}(\mathcal{I}')),$$

$$H((X,\mathcal{I})\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{I}')) = (X,\mathcal{F}(\mathcal{I}))\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{F}(\mathcal{I}')).$$

به‌علاوه، همان تابعگون‌ها برای رسته‌های نوع دوم نیز صادق‌اند. □

تعریف **۷.۳**. اگر $U:\mathcal{A}\to\mathcal{X}$ یک تابعگون باوفا باشد، آن‌گاه زوج $(\mathcal{A},U)$ را یک رسته ملموس روی $\mathcal{X}$ می‌نامیم. یک رسته ملموس روی رسته مجموعه‌ها (که با $\mathbf{Set}$ نمایش می‌دهیم) را یک ساختار می‌نامیم. همچنین، برای هر شیء $X\in\mathcal{X}$، رده‌ی تمام اشیاء $A\in\mathcal{A}$ که $U(A)=X$ به‌همراه رابطه پیش‌جزئی زیر را تار X می‌نامیم:
$A\le B$ اگر و فقط اگر $id_X:U(A)\to U(B)$ یک $\mathcal{A}$-ریخت باشد، به عبارت دیگر ریخت $f:A\to B$ موجود باشد، به‌طوری‌که $U(f)=id_X$، که در اینجا id_X نماد ریخت همانی است.

تعریف **۸.۳**. تابعگون $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ را بخششی می‌نامیم، هرگاه یک $\mathcal{A}$-یکریختی f، ریخت همانی است درصورتی‌که $F(f)$ ریخت همانی باشد. به‌علاوه، رسته ملموس $(\mathcal{A},U)$ را بخششی گوییم، هرگاه تابعگون U بخششی باشد.

توجه کنید رسته ملموس $(\mathcal{A},U)$ بخششی است اگر و فقط اگر رده‌ی تارهای آن جزئا مرتب باشد.

تعریف **۹.۳**. رسته ملموس $(\mathcal{A},U)$ را تار-کوچک گوییم، هرگاه رده‌ی تارهای آن یک مجموعه باشد.

ملاحظه **۱۰.۳**. فرض کنید $U:\mathbf{Ide}\to\mathbf{Set}$ و $\bar{U}:\overline{\mathbf{Ide}}\to\mathbf{Set}$ تابعگون‌های فراموش‌کار باشند. در این‌صورت برای هر مجموعه X، تار X نسبت به U تا حد یکریختی گردایه $\mathbf{Id}(X)$ به همراه رابطه جزئاً مرتب شمول است، به عبارت دیگر $I\le I'$ اگر وفقط اگر $I\subseteq I'$، اما نسبت به $\bar{U}$ گردایه $\mathbf{Id}(X)$ به همراه رابطه جزئاً مرتب ابرشمول است، به عبارت دیگر $I\le I'$ اگر وفقط اگر $I'\subseteq I$. بنابراین، تارهای رسته‌های $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ مجموعه‌های جزئا مرتب‌اند، در نتیجه هر دو رسته‌هایی ملموس بخششی و تار-کوچک روی رسته مجموعه‌ها هستند.

فرض کنید $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ یک تابعگون باشد. یک رده از ریخت‌ها در رسته $\mathcal{B}$ به‌صورت $(B\xrightarrow{f_i}GA_i)_{i\in I}$، که در آن B یک شیء در $\mathcal{B}$ و $\{A_i\mid i\in I\}$ یک رده از اشیاء در $\mathcal{A}$ است را یک منبع G-ساختار می‌نامیم.

تعریف **۱۱.۳**. فرض کنید $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ یک تابعگون باشد. منبع $S=(A\xrightarrow{f_i}A_i)_{i\in I}$ در رسته $\mathcal{A}$ را G-ابتدایی می‌نامیم، هرگاه برای هر منبع $T=(B\xrightarrow{g_i}A_i)_{i\in I}$ در رسته $\mathcal{A}$ و هر $\mathcal{B}$-ریخت $h:GB\to GA$ که $GT=GS\circ h$، ریخت یکتا $\bar{h}:B\to A$ موجود باشد، به‌طوری‌که $T=S\circ\bar{h}$ و $G\bar{h}=h$.

تعریف **۱۲.۳**. تابعگون $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ را توپولوژیک می‌نامیم، هرگاه هر منبع G-ساختار دارای یک بالابر G-ابتدایی یکتا باشد. به‌علاوه، رسته ملموس $(\mathcal{A},U)$ را توپولوژیک گوییم، هرگاه تابعگون U توپولوژیک باشد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید $(\mathcal{A}, U)$ یک رسته‌ی ملموس تار-کوچک باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $(\mathcal{A}, U)$ توپولوژیک است،

۲. هر چاهک ساختار کوچک $(UA_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ دارای یک بالابر انتهایی یکتا است.

برای اثبات قضیه اساسی این بخش نیاز داریم بعضی ساختارهای ایده‌آل‌ها را یادآوری کنیم. از آنجا که اشتراک هر خانواده دلخواه از ایده‌آل‌ها، ایده‌آل است، بنابراین برای هر گردایه از زیرمجموعه‌های X مانند $\mathcal{S}$، کوچکترین ایده‌آل شامل $\mathcal{S}$، اشتراک همه ایده‌آل‌ها شامل $\mathcal{S}$ است که با نماد $<\mathcal{S}>$ نمایش می‌دهیم. با توجه به تعریف، دو لم زیر را داریم:

لم ۱۴.۳. زیر مجموعه B از X متعلق به ایده‌آل $<\mathcal{S}>$ است اگر و فقط اگر خانواده متناهی $\{A_i \mid i \in I\}$ از عناصر $\mathcal{S}$ موجود باشد به‌طوری‌که $B \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

لم ۱۵.۳. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $\{(Y_i, \mathcal{I}_i) \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از فضاهای ایده‌آل و $\{f_i : X \to Y_i \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از توابع با دامنه مشترک X باشند. در این‌صورت:

۱. اگر $\mathcal{I}_* := \{A \subseteq X \mid f(A) \in \mathcal{I}_i, \forall\ i \in J\}$ آن‌گاه $\mathcal{I}_*$ کوچکترین ایده‌آل روی X است به‌طوری‌که همه‌ی توابع $f_i : (X, \mathcal{I}_*) \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشتهای ایده‌آلی‌اند.

۲. اگر $\mathcal{S}$ گردایه $\bigcup_{i\in J}\{f_i^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{I}_i\}$ و $\mathcal{I}^* :=< \mathcal{S} >$ آن‌گاه $\mathcal{I}^*$ کوچکترین ایده‌آل روی X است به‌طوری‌که همه‌ی توابع $f_i : (X, \mathcal{I}^*) \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشتهای سره ایده‌آلی‌اند.

ایده‌آل‌های $\mathcal{I}_*$ و $\mathcal{I}^*$ در لم قبل را به‌ترتیب ایده‌آل‌های القایی نوع اول و نوع دوم توسط منبع $(f_i)_{i\in J}$ می‌نامیم.

قضیه ۱۶.۳. تابعگون‌های فراموش‌کار $U : \mathbf{Ide} \to \mathbf{Set}$ و $\bar{U} : \overline{\mathbf{Ide}} \to \mathbf{Set}$ توپولوژیک‌اند، به‌عبارت دیگر رسته‌های $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ ساختارهای توپولوژیکی‌اند.

اثبات. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $\{(Y_i, \mathcal{I}_i) \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از فضاهای ایده‌آل و $\{f_i : X \to Y_i \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از توابع باشند. ابتدا نشان می‌دهیم U توپولوژیک است. فرض کنید $\mathcal{I}_*$ ایده‌آل القایی نوع اول توسط منبع $(f_i)_{i\in J}$ تعریف شده در لم ۱۵.۳ باشد. در این‌صورت همه‌ی توابع $f_i : (X, \mathcal{I}_*) \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشتهای ایده‌آل‌اند. اکنون نشان می‌دهیم که منبع $(f_i)_{i\in J}$، نسبت به U ابتدایی است. فرض کنید $(Z, \mathcal{I}')$ یک فضای ایده‌آل دلخواه و $g : Z \to X$ یک تابع به‌طوری‌که برای هر $i \in J$، تابع $f_i \circ g : (Z, \mathcal{I}') \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشت ایده‌آل باشد. اگر $B \in \mathcal{I}'$، آن‌گاه به‌ازای هر $i \in J$، $f_i(g(B)) \in \mathcal{I}_i$. در نتیجه، طبق تعریف ایده‌آل $\mathcal{I}_*$، $g(B) \in \mathcal{I}_*$، که نشان می‌دهد g یک نگاشت ایده‌آل است. برای اثبات توپولوژیک بودن تابعگون $\bar{U}$ فرض کنید $\mathcal{I}^*$ ایده‌آل القایی نوع دوم توسط منبع $(f_i)_{i\in J}$ تعریف شده در لم ۱۵.۳ باشد. در این‌صورت همه‌ی توابع $f_i : (X, \mathcal{I}^*) \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشتهای سره ایده‌آلی‌اند. اکنون نشان می‌دهیم که منبع $(f_i)_{i\in J}$ نسبت به $\bar{U}$ ابتدایی است. دوباره فرض کنید $(Z, \mathcal{I}')$ یک فضای ایده‌آل دلخواه و $g : Z \to X$ یک تابع به‌طوری‌که برای هر $i \in J$، تابع $f_i \circ g : (Z, \mathcal{I}') \to (Y_i, \mathcal{I}_i)$ نگاشت سره ایده‌آل باشد. اگر $A \in \mathcal{S}$، آن‌گاه عنصر $i \in J$ و $B \subseteq Y_i$ موجود است به‌طوری‌که $A = f_i^{-1}(B)$. در نتیجه، $g^{-1}(A) = g^{-1}(f_i^{-1}(B)) \in \mathcal{I}^*$. از آنجا که ایده‌آل $\mathcal{I}^*$ توسط گردایه $\mathcal{S}$ تولید می‌شود، بنابر لم ۱۴.۳ یک بررسی ساده نشان می‌دهد g یک نگاشت سره ایده‌آل است. سرانجام، یکتایی منبع به‌راحتی از خاصیت بخششی بودن رسته‌های ایده‌آل‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین، طبق قضیه ۱۳.۳، برهان کامل است. □

بنابر قضیه قبل و خواص مهم رسته‌های توپولوژیک، خصوصاً ساختارهای توپولوژیک، نتایج زیر را داریم:

نتیجه ۱۷.۳. فرض کنید f ریختی در رسته $\mathbf{Ide}$ یا $\overline{\mathbf{Ide}}$ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. f تکریختی است اگر و فقط اگر یک‌به‌یک باشد.

۲. f بروریختی است اگر و فقط اگر پوشا باشد.

نتیجه ۱۸.۳. رسته‌های $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ و در نتیجه طبق قضیه ۶.۳، رسته‌های $\mathbf{Gri}$، $\mathbf{Pri}$، $\overline{\mathbf{Gri}}$ و $\overline{\mathbf{Pri}}$ همگی کامل و هم‌کامل‌اند.

ملاحظه ۱۹.۳. یادآوری می‌کنیم ریخت f در رسته $\mathcal{A}$ را ریخت‌دوتایی می‌نامیم، هرگاه هم تکریختی و هم بروریختی است و رسته $\mathcal{A}$ را متعادل می‌نامیم، هرگاه ریختهای‌دوتایی دقیقاً یکریختی‌ها هستند. بنابراین طبق نتیجه ۱۷.۳، ریخت‌های‌دوتایی در رسته‌های $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ به‌ترتیب نگاشتهای ایده‌آل و سره ایده‌آل دوسوئی‌اند، اما لزوماً یکریختی نیستند. به‌عنوان مثال، اگر X یک مجموعه ناتهی، $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$ و $\mathcal{I}_2 = P(X)$ آن‌گاه تابع همانی $id : (X, \mathcal{I}_1) \to (X, \mathcal{I}_2)$ یک ریخت‌دوتایی در رسته $\mathbf{Ide}$ است که یکریختی نیست و تابع همانی $id : (X, \mathcal{I}_2) \to (X, \mathcal{I}_1)$ یک ریخت‌دوتایی در رسته $\overline{\mathbf{Ide}}$ است که یکریختی نیست. بنابراین رسته ایده‌آل‌ها از هر دو نوع و به‌طور مشابه رسته‌های گریل‌ها و اولیه‌ها از هر دو نوع متعادل نیستند. در نتیجه هیچ‌کدام از این رسته‌ها جبری نیستند، برای تعریف و خواص رسته‌های جبری مرجع [۲] را می‌توانید ببینید.

۴ بعضی ساختارهای رسته ایده‌آل‌ها

در این بخش بعضی ساختارهای حدی و هم‌حدی، مانند ضرب‌ها، هم‌ضرب‌ها، برابرسازها و هم‌برابرسازها را در رسته‌های $\mathbf{Ide}$ و $\overline{\mathbf{Ide}}$ شرح می‌دهیم. به‌علاوه، از آنجا که رسته پالایه‌ها شیء ابتدایی ندارد، در نتیجه رسته توپولوژیک و جبری نیست، اما با توجه به اینکه با رسته ایده‌آل‌های سره یکریخت است، بعضی ساختارهای حدی و هم‌حدی را به‌طور مشابه دارد که ضمن معرفی آنها در رسته ایده‌آل‌ها به آن اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. در رسته $\mathbf{Ide}$ ضرب یک خانواده $\{(X_i, \mathcal{I}_i) \mid i \in J\}$ از فضاهای ایده‌آل، فضای ایده‌آل $(\prod_{i\in J} X_i, \mathcal{I}_*)$ به‌همراه توابع تصویر است که در آن $\prod_{i\in J} X_i$ حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها و

$$\mathcal{I}_* = \{A \mid \pi_i(A) \in \mathcal{I}_i, \forall\ i \in J\}$$

ایده‌آل القایی نوع اول توسط توابع تصویر $(\prod_{i\in J} X_i \xrightarrow{\pi_i} X_i)_{i\in J}$ است.

اثبات. بنابر لم ۱۵.۳، توابع تصویر نگاشت‌های ایده‌آل‌اند. چونکه تابعگون فراموش‌کار $U : \mathbf{Ide} \to \mathbf{Set}$ ضرب‌ها را هم حفظ و هم برمی‌گرداند، کافی است خاصیت جهانی را بررسی کنیم. فرض کنید $((Y, \mathcal{I}) \xrightarrow{f_i} (X_i, \mathcal{I}_i))_{i\in J}$ یک خانواده از نگاشتهای ایده‌آل و $\bar{f} : (Y, \mathcal{I}) \to (\prod_{i\in J} X_i, \mathcal{I}_*)$ تابع یکتایی باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in J$، $\pi_i \circ \bar{f} = f_i$. برای هر $A \in \mathcal{I}$ داریم $\pi_i(\bar{f}(A)) = f_i(A) \in \mathcal{I}_i$. بنابراین $\bar{f}(A) \in \mathcal{I}_*$، در نتیجه $\bar{f}$ نگاشتی ایده‌آل است. □

ملاحظه ۲.۴. اگر برای هر $i \in J$، $\mathcal{I}_i$ ایده‌آلی سره روی مجموعه X_i باشد، آن‌گاه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که ایده‌آل القایی نوع اول $\mathcal{I}_*$ توسط توابع تصویر نیز سره است، در نتیجه ضرب در رسته $\mathbf{Ide_p}$ وجود دارد و همان ضرب در رسته $\mathbf{Ide}$ است. بنابراین رسته پالایه‌های $\mathbf{Fil}$ نیز ضرب‌ها را دارد.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $(X, \mathcal{I})$ فضایی ایده‌آل، $Y \subseteq X$ و $e : Y \to X$ نگاشت شمول باشد. در این‌صورت فضای ایده‌آل $(Y, \mathcal{I}_*)$ که در آن $\mathcal{I}_*$ ایده‌آل القایی نوع اول توسط نگاشت شمول است را زیرفضای ایده‌آل نوع اول می‌نامیم.

اگر $(Y, \mathcal{I}_*)$ زیرفضای ایده‌آل نوع اول $(X, \mathcal{I})$ باشد، آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که $\mathcal{I}_* = \mathcal{I} \bigcap P(Y)$

قضیه ۴.۴. در رسته $\mathbf{Ide}$ برابرساز یک جفت $(X, \mathcal{I}) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (Y, \mathcal{I}')$ از نگاشتهای ایده‌آل، زیرفضای ایده‌آل نوع اول $(E, \mathcal{I}_*)$ به‌همراه نگاشت شمول است که در آن $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ و $\mathcal{I}_* = \mathcal{I} \bigcap P(E)$

اثبات. مشابه برهان ضرب‌هاست و به‌راحتی از تعاریف نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۵.۴. اگر $\mathcal{I}$ ایده‌آلی سره روی مجموعه X باشد، آن‌گاه لزوماً هر زیرفضای نوع اول آن سره نیست، از این‌رو برابرسازها در رسته‌های $\mathbf{Ide_p}$ و در نتیجه در رسته $\mathbf{Fil}$ در حالت کلی وجود ندارند. بنابراین هر دو رسته‌های کاملی نیستند. به‌عنوان مثال اگر X یک مجموعه نامتناهی و $\mathcal{I}_f$ ایده‌آل زیرمجموعه‌های متناهی X باشد، آنگاه $(X, \mathcal{I}_f)$ یک فضای ایده‌آل سره است. اکنون فرض کنید $f : (X, \mathcal{I}_f) \to (X, \mathcal{I}_f)$ تابع همانی و $g : (X, \mathcal{I}_f) \to (X, \mathcal{I}_f)$ تابع ثابت با ضابطه $g(x) = x_\circ$ که $x_\circ \in X$ باشد. در این‌صورت f و g نگاشتهای ایده‌آلی هستند. اگر فضای ایده‌آل $(E, \mathcal{I})$ برابرساز f و g در رسته $\mathbf{Ide_p}$ باشد، آن‌گاه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تا حد یکریختی $E = \{x_\circ\}$ و $\mathcal{I} = P(E)$ از این‌رو $(E, \mathcal{I})$ فضای ایده‌آل سره نیست، در نتیجه برابرساز f و g در رسته $\mathbf{Ide_p}$ وجود ندارد.

برای معرفی ساختارهای دوگان هم‌ضرب‌ها و هم‌برابرسازها نیاز به معرفی لم بعد داریم که به‌راحتی از تعاریف نتیجه می‌شود.

لم ۶.۴. فرض کنید Y یک مجموعه دلخواه و $\{(X_i, \mathcal{I}_i) \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از فضاهای ایده‌آل و $\{f_i : X_i \to Y \mid i \in J\}$ خانواده‌ای از توابع با هم‌دامنه مشترک Y باشند. در این‌صورت:

۱. اگر $\mathcal{S}$ گردایه $\bigcup_{i\in J}\{f_i(A) \mid A \in \mathcal{I}_i\}$ و $\mathcal{I}_\circ :=< \mathcal{S} >$ آن‌گاه $\mathcal{I}_\circ$ بزرگترین ایده‌آل روی X است به‌طوری‌که همه‌ی توابع $f_i : (X_i, \mathcal{I}_i) \to (Y, \mathcal{I}_\circ)$ نگاشتهای ایده‌آلی‌اند.

۲. اگر $\mathcal{I}^\circ := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{I}_i, \forall\ i \in J\}$ آن‌گاه $\mathcal{I}^\circ$ بزرگترین ایده‌آل روی Y است به‌طوری‌که همه‌ی توابع $f_i : (X_i, \mathcal{I}_i) \to (Y, \mathcal{I}^\circ)$ نگاشتهای سره ایده‌آلی‌اند.

ایده‌آل‌های $\mathcal{I}_\circ$ و $\mathcal{I}^\circ$ در لم قبل را به‌ترتیب ایده‌آل‌های هم‌القایی نوع اول و نوع دوم توسط چاهک $(f_i)_{i\in J}$ می‌نامیم.

قضیه ۷.۴. در رسته $\mathbf{Ide}$ هم‌ضرب یک خانواده $\{(X_i,\mathcal{I}_i)\mid i\in J\}$ از فضاهای ایده‌آل، فضای ایده‌آل $(\coprod_{i\in J}X_i,\mathcal{I}_\circ)$ به‌همراه توابع طبیعی است که در آن $\coprod_{i\in J}X_i$ اجتماع مجزای مجموعه‌ها و $\mathcal{I}_\circ$ ایده‌آل هم‌القایی نوع اول توسط توابع طبیعی $(X_j\xrightarrow{L_j}\coprod_{i\in J}X_i)_{j\in J}$ است.

اثبات. بنابر لم ۶.۴، توابع طبیعی L_i ها نگاشت‌های ایده‌آل‌اند. از آنجا که تابعگون فراموش‌کار $U:\mathbf{Ide}\to\mathbf{Set}$ هم‌ضرب‌ها را هم حفظ و هم برمی‌گرداند، بنابراین کافی است خاصیت جهانی را بررسی کنیم. فرض کنید $((X_i,\mathcal{I}_i)\xrightarrow{f_i}(Y,\mathcal{I}))_{i\in J}$ یک خانواده از نگاشتهای ایده‌آل و $\hat{f}:(\coprod_{i\in J}X_i,\mathcal{I}_\circ)\to(Y,\mathcal{I})$ تابع یکتایی باشد به‌طوری‌که برای هر $i\in J$، $\hat{f}\circ L_i=f_i$. فرض کنید $B\in\mathcal{S}$. در این‌صورت مجموعه A و عنصر $i\in J$ موجود است به‌طوری که $B=L_i(A)$. در نتیجه $\hat{f}(B)=\hat{f}(L_i(A))=f_i(A)\in\mathcal{I}$. از این‌رو $\hat{f}$ نگاشتی ایده‌آل است. □

ملاحظه ۸.۴. اگر برای هر $i\in J$، $\mathcal{I}_i$ ایده‌آلی سره روی مجموعه X_i باشد، آن‌گاه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که ایده‌آل هم‌القایی نوع اول $\mathcal{I}_\circ$ توسط توابع طبیعی L_i ها نیز سره است، از این‌رو هم‌ضرب در رسته $\mathbf{Ide_p}$ وجود دارد و همان هم‌ضرب در رسته $\mathbf{Ide}$ است. بنابراین رسته پالایه‌های $\mathbf{Fil}$ نیز هم‌ضرب‌ها را دارد.

تعریف ۹.۴. فرض کنید $(X,\mathcal{I})$ فضایی ایده‌آل و $q:X\to Y$ تابعی پوشا باشد. در این‌صورت فضای ایده‌آل $(Y,\mathcal{I}_\circ)$ که در آن $\mathcal{I}_\circ$ ایده‌آل هم‌القایی نوع اول توسط نگاشت q است را فضای ایده‌آل خارج‌قسمتی نوع اول می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۴. در رسته $\mathbf{Ide}$ هم‌برابرساز یک جفت $(X,\mathcal{I})\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}(Y,\mathcal{I}')$ از نگاشتهای ایده‌آل، فضای ایده‌آل خارج‌قسمتی نوع اول $(Q,\mathcal{I}_\circ)$ توسط نگاشت خارج‌قسمتی $q:Y\to Q$ است که در آن q هم‌برابرساز f و g در رسته مجموعه‌هاست.

اثبات. مشابه برهان هم‌ضرب‌هاست و به‌راحتی از تعاریف نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۱۱.۴. اگر $\mathcal{I}'$ ایده‌آلی سره روی مجموعه Y باشد، آن‌گاه لزوماً هر فضای خارج‌قسمتی نوع اول آن سره نیست، از این‌رو هم‌برابرسازها در رسته $\mathbf{Ide_p}$ و در نتیجه در رسته $\mathbf{Fil}$ در حالت کلی وجود ندارند. بنابراین هر دو رسته‌های هم‌کاملی نیستند. به‌عنوان مثال فرض کنید f و g همان نگاشتهای ایده‌آلی در ملاحظه ۵.۴ باشند. اکنون اگر فضای ایده‌آل $(Q,\mathcal{I})$ هم‌برابرساز f و g در رسته $\mathbf{Ide_p}$ باشد، آن‌گاه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تا حد یکریختی برابر با فضای ایده‌ال تک عضوی $(\{۱\},P(\{۱\}))$ است که سره نیست. بنابراین هم‌برابرساز f و g در رسته $\mathbf{Ide_p}$ وجود ندارد.

ملاحظه ۱۲.۴. به‌طور مشابه با استفاده از ایده‌آل‌های القایی و هم‌القایی نوع دوم، می‌توان ساختارهای ضرب، هم‌ضرب، برابرساز و هم‌برابرساز را در رسته $\mathbf{Ide}$ معرفی کرد.

فهرست منابع

[1] Acharjee, S., Özkoc, M. and Issaka, F.Y., 2022. Primal topological spaces. *arXiv preprint*. https://doi.org/1048550/arXiv.2209.12676

[2] Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G.E., 1990. *Abstract and concrete categories*. John Wiley and Sons Inc., New York.

[3] Azzam, A.A., Hussein, S.S. and Saber Osman, H., 2020. Compactness of topological spaces with grills. *Ital. J. Pure Appl. Math. 44*, pp.198–207.

[4] Beattie, R. and Butzmann, H., 2002. *Convergence structure and applications to Functional analysis*. klwwer acod. Pub., Dordrecht.

[5] Boroojerdian, N. and Talabeigi, A., 2017. One-point λ-compactification via grills. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 41*, pp.909–912. https://doi.org/10.1007/s40995-017-0314-x

[6] Bourbaki, N., 1940. *Topologie generale*. Chapitre 1 et 2. Actualites Sci. Ind., 858.

[7] Cartan, H., 1937. Theorie des filters. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 205*, pp.595-598.

[8] Cartan, H., 1937. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 205*, pp.777-779.

[9] Chattopadhyay, K.C. and Thron, W.J., 1977. Extensions of closure spaces. *Canad. J. Math., 29*(6), pp.1277-1286. https://doi.org/10.4153/CJM-1977-127-6

[10] Chattopadhyay, K.C., Njastad, O. and Thron, W.J., 1983. Merotopic Spaces and extensions of closure spaces. *Canad. J. Math., 35*, pp.613-629. https://doi.org/10.4153/CJM-1983-035-6

[11] Choquet, G., 1947. Sur les notions de filter et grille. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 224*, pp.171-173.

[12] Hosny, R.A., 2012. δ-sets with grill. *Int. Math. Forum, 7*(43), pp.2107-2113.

[13] Jankovic, D. and Hamlett, T.R., 1990. New topologies from old via ideals. *Amer. Math. Monthly, 97*(4), pp.295-310. https://doi.org/10.1080/00029890.1990.11995593

[14] Kandil, A., El-Sheikh, S.A., Abdelhakem, M. and Shawqi Hazza, A., 2015. On ideals and grills in topological spaces. *South Asian Journal of Mathematics, 5*(6), pp.233-238.

[15] Kowalsky, H.J., 1961. *Topologische Raume*. Basel-Stuttgart.

[16] Kuratowski, K., 1966. *Topology: Volume I.* Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7

[17] Modak, S., 2013. Topology on grill-filter space and continuity. *Bol. Soc. Parana. Mat., 31*(2), pp.219-230. doi: 10.5269/bspm.v31i2.16603

[18] Modak, S., 2013. Grill-filter space. *J. Indian Math. Soc., 80*(3-4), pp.313-320.

[19] Mukherjee, M.N. and Debray, A., 1998. On H-closed spaces and grills. *An. Stiint. Univ. AL. I. Cuza Iasi. Mat.(N.S.), 44*, pp.1-25.

[20] Nasef, A.A. and Azzam, A.A., 2016. Some topological operators via grills. *J. Linear. Topological. Algebra., 5*(3), pp.199-204. dor: 20.1001.1.22520201.2016.05.03.5.8

[21] Root, R., 1914. Iterated limits in general analysis. *Amer. J. Math., 36*, pp.79-134. https://doi.org/10.2307/2370519

[22] Roy, B. and Mukherjee, M.N., 2007. On a typical topology induced by a grill. *Soochow J. Math., 33*(4), pp.771-786.

[23] Roy, B. and Mukherjee, M.N., 2009. Concerning topologies induced by principal grills. *An. Stiint. Univ. AL. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), 55*(2), pp.285-294.

[24] Roy, B. and Mukherjee, M.N., 2007. On a type of compactness via grills, *Math. Vesnik, 59*(3), pp.113-120.

[25] Roy, B., Mukherjee, M.N. and Ghosh, S.K., 2008. On a new operator based on a grill and its associated topology. *Arab J. Math. Sci., 14*(1), pp.21-32.

[26] Talabeigi, A., 2016. On the Tychonoff's type theorem via grills. *Bull. Iranian Math. Soc., 42*(1), pp.37-41.

[27] Talabeigi, A. and Talabeigi, M., 2022. An approach to change the topology of a topological space. *Sahand Commun. Math. Anal., 19*(3), pp.55-63. https://doi.org/10.22130/scma.2022.132038.842

[28] Talabeigi, A., 2021. An approach to change the topology of a topological space with the help of its closed sets in the presence of grills. *J. Mahani Math. Res., 10*(2), pp.9-19. doi: 10.22103/jmmrc.2021.17094.1132

[29] Thangamariappan, R. and Renukadevi, V., 2015. Topology generated by cluster systems. *Math. Vesnik, 67*(3), pp.174-184.

[30] Thron, W.J., 1973. Proximity structures and grills. *Math. Ann., 206*, pp.35-62. https://doi.org/10.1007/BF01431527

Ideals, grills, primals and filters from the categorical viewpoint

G. Mirhosseinkhani(1) [6] and A. Talabeigi(2)

(1) Department of Mathematics and Computer Sciences, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran
(2) Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box, 19395-3697, Tehran, Iran

Communicated by: Ali Rezaei Aliabad

Received: 6 March 2024 Accepted:30 October 2024

Abstract: In this paper, we study the categorical structures of the concepts of ideal, grill, primal, and filter, which play a fundamental and important role in the study of topology spaces. Some researchers have shown that all these concepts are equivalent, regardless of the categorical viewpoint. Here, we define the homomorphims and so the category of each of these concepts and then show that all of them are isomorphic, except for the category of filters. As an important result, it has been shown that these categories are topological, except for the category of filters. Consequently, they are complete and cocomplete, but they are not algebraic. Thus, many topological properties can be easily expressed and analyzed in terms of each of these concepts. Finally, some categorical structures of ideals are described.

Keywords: Ideal, Grill, Primal, Filter, Category.

[6]Corresponding author

E-mail addresses: (G. Mirhosseinkhani) gh.mirhosseini@sirjantech.ac.ir, (A. Talabeigi) talabeigi@pnu.ac.ir