



روشی ماتریسی به همراه موجک‌های لژاندر در حل برخی معادلات انتگرالی غیرخطی از نوع اول با آنالیز خطا و وجود جواب

محسن ریاحی بنی^(۱)

^(۱) گروه ریاضی، دانشگاه سراوان، سراوان، ایران

دبیر مسئول: مرتضی گج‌پزان

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱۸

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۲

چکیده: از آنجایی که بیشتر معادلات انتگرال غیرخطی از نوع اول، بدوضع هستند، در این پژوهش سعی شده روشی بر اساس موجک‌های لژاندر برای حل دسته خاصی از آنها ارائه شود. روش پیشنهادی بدین صورت است که در ابتدا تمام اجزای معادله به فرم ماتریس بر اساس توابع موجک لژاندر بیان می‌شوند، پس از آن این ماتریس‌ها در معادله اصلی جایگزین می‌گردند. این روش به همراه روش هم‌محلی معادله را به یک سیستم از معادلات جبری تعدیل می‌کند که این سیستم جبری با روش‌های عددی شناخته‌شده و یا تحلیلی قابل حل است. برای نشان‌دادن همگرایی روش، کران بالای خطا با استفاده از چند لم و قضیه محاسبه شده است. علاوه بر این، آنالیز پایداری، وجود و یکتایی جواب نیز مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور نشان‌دادن قابلیت اطمینان روش پیشنهادی، نتایج عددی همراه با مقایسه داده شده‌اند. در عمل به منظور بررسی پایداری، در مثال‌ها عدد شرط را محاسبه کردیم و همچنین نرخ همگرایی محاسبه شده و همگرایی توسط آزمون نسبت در نمودارهایی نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که این روش بسیار مؤثر و دقیق است و در برخی موارد به جواب دقیق مساله همگرا می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال نوع اول، معادلات غیرخطی، موجک‌های لژاندر، آنالیز خطا، روش ماتریسی.

رده‌بندی ریاضی: 65T60; 45G10; 65N35; 74G30

۱ مقدمه

یافتن پاسخ تحلیلی معادلات تابعی در سال‌های اخیر مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته است. چندین روش برای دستیابی به این امر پیشنهاد شده است. مدل‌سازی ریاضی برای بسیاری از مسائل در بخش‌های مختلف، مانند مهندسی، شیمی، فیزیک و زیست‌شناسی، منجر به تولید یک معادله انتگرال یا سیستمی از معادلات انتگرال می‌شود. چندین روش برای حل چنین معادلاتی از جمله توابع شعاعی پایه [۱۷]، روش هم‌محلی لژاندر [۱۶]، روش موجک هار [۱۵]، روش ماتریسی برنولی گالرکین [۸]، روش منحنی بزیه [۷] و ... ارائه شده است.

^۱ نویسنده مسئول مقاله

در بین روش های موجود، روش های طیفی به دلیل دقت بالا و کاربرد آسان، برای حل معادلات تابعی مختلف استفاده شده اند. انواع روش های طیفی که کاربرد بیشتری دارند و به طور گسترده مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از: روش های تاو، گالرکین و هم محلی. بازه [۲] از روش هم محلی همراه با چند جمله ای های برنولی برای حل عددی معادلات انتگرال خطی و غیرخطی استفاده کرده است، ساهو [۲۳] روش موجک برنولی را معرفی نموده و آن را با روش های طیفی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا با تکینگی ضعیف به کار برده است، مالک نژاد [۱۳] و همکارانش برپایه ی موجک ها و روش گالرکین، روشی را برای حل معادلات انتگرال تکین استخراج کرده اند. فاضلی خانواده جدیدی از روش های چندارزشی و چندمرحله ای مبتنی بر درونیابی هرمیت-بیرخوف را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی در [۶] معرفی کرد.

بسیاری از مسائل معکوس در علوم و مهندسی منجر به حل معادلات انتگرالی از نوع اول به فرم:

$$\int_a^x k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.1)$$

یا

$$\int_a^b k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.1)$$

می شوند که در آن $k(x, \xi)$ و $g(x)$ توابعی معلوم، F تابع غیرخطی پیوسته و معکوس پذیر است و $u(x)$ تابعی مجهول است که باید تعیین گردد. در این مقاله برای حل چنین معادلاتی، در ابتدا برخی توابع پایه ای متعام را برای تقریب تابع مجهول معرفی می کنیم. این توابع پایه ای، موجک های لژاندر هستند که در بخش بعدی معرفی می شوند.

در فیزیک ریاضی و مهندسی، مسائل گوناگون ممکن است بر اساس یک معادله انتگرال ولترا (یا فرد هولم) از نوع اول بیان گردند. بنابراین ما روش موجک لژاندر را برای حل عددی چنین معادلاتی گسترش داده ایم. بدین منظور، پاسخ مجهول $u(x)$ را در شرایطی می یابیم که تابع غیرخطی F بیان شده در (۱.۱) - (۲.۱) معکوس پذیر باشد.

معادلاتی به فرم (۱.۱) یا (۲.۱) در بسیاری از مراجع مورد مطالعه قرار گرفته شده اند. سینگ و همکارانش [۵] روش هم محلی را برای حل معادلات غیرخطی انتگرال ولترا از نوع اول با استفاده از موجک های هار پیشنهاد داده اند. پاتیل و همکارانش [۱۸، ۱۹] تبدیل آنوج و تبدیل سوهام را برای حل معادلات انتگرال ولترا از نوع اول استفاده کردند. مالک نژاد و همکارانش [۱۲] روشی را بر پایه ی موجک ها برای حل معادلات انتگرال ولترا از نوع اول توسعه داده اند. روش موجک هار توسط لیبیک [۱۰] برای حل معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل شرح داده شده است.

هدف اصلی این مقاله استفاده از روش موجک لژاندر در حل معادلات انتگرال غیرخطی از نوع اول است. در بخش ۲، به طور مختصر توابع پایه ای لژاندر را شرح می دهیم. در این بخش، چند لم و قضیه مفید برای تقریب جواب مساله به اثبات می رسد. همچنین، نمایش ماتریسی از هر تابعی که در معادله ظاهر می شود، ارائه خواهد شد. در بخش ۳، روش موجک لژاندر توضیح داده خواهد شد. در بخش ۴ تحلیل خطا و ویژگی همگرایی این الگوریتم ارائه شده است. به علاوه آنالیزی از پایداری نیز در این بخش مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۵، وجود و یکتایی جواب مورد بررسی قرار گرفته است. بخش ۶ چند مثال عددی را برای نشان دادن کارایی روش ارائه می کند و دقت این الگوریتم در نهایت در این بخش نتیجه گیری می شود. به علاوه آزمون نسبت و عدد شرط برای برخی مثال ها محاسبه شده که نشان دهنده همگرایی، پایداری و سرعت همگرایی مناسب است. در این بخش به علاوه زمان اجرای برنامه ها محاسبه و در چندین جدول تنظیم شده است. در انتها نتیجه گیری در بخش ۷ گزارش شده است.

۲ موجک لژاندر

نظریه موجک یک حوزه نسبتاً جدید و نوظهور در ریاضی است که در طیف گسترده ای از رشته های مهندسی استفاده شده است. به طور خاص، در تجزیه و تحلیل سیگنال برای نمایش شکل موج، در تجزیه و تحلیل فرکانس زمانی، و الگوریتم های سریع برای پیاده سازی آسان مورد استفاده قرار گرفته است. موجک ها امکان نمایش دقیق انواع توابع و عملگرها را فراهم می کنند. موجک ها خانواده ای از توابع را تشکیل می دهند که از اتساع و انتقال یک تابع منفرد به نام موجک مادر ساخته شده اند. زمانی که پارامتر اتساع a و پارامتر انتقال b پیوسته باشند، خانواده موجک های پیوسته به صورت زیر را خواهیم داشت:

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{v}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (1.2)$$

جایی که پارامترهای a و b به شکل $a = a_0^{-k}$ و $b = nb_0 a_0^{-k}$ فرض می شوند، که در آن $a_0 > 1$ و $b_0 > 0$. همچنین n و k اعداد صحیح مثبتی هستند. معادله (۱.۲) دلالت به خانواده موجک های گسسته به شکل زیر را دارد

$$\psi_{k,n}(x) = |a_0|^{\frac{k}{v}} \psi(a_0^k x - nb_0),$$

جایی که $\psi_{k,n}(x)$ شکل پایه موجک در $L^2(\mathbb{R})$ است. به طور خاص، زمانی که $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ فرم پایه متعامد یک موجک لژاندر $\psi_{n,m}(x)$ دارای چهار پارامتر است. $\hat{n} = 2n - 1$ و $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ و m که درجه چندجمله‌ای لژاندر است. موجک‌های لژاندر در بازه $I = [0, 1]$ به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} L_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n} - 1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n} + 1}{2^k}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.2)$$

جایی که $m = 0, 1, \dots, M - 1$ ضریب $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ برای یک متعامد بودن، پارامترهای اتساع و انتقال به ترتیب عبارتند از $w(x) = 1$ و $a = 2^{-k}$ و $b = \hat{n} 2^{-k}$. در اینجا $L_m(x)$ نشان‌دهنده چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه m است که نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ در بازه $[-1, 1]$ متعامد هستند. این چندجمله‌ای‌ها توسط رابطه بازگشتی زیر قابل محاسبه‌اند:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x L_m(x) - \frac{m}{m+1} L_{m-1}(x).$$

تعریف ۱.۲. [۱۴] تابع چندگاما (*PolyGamma function (PG)*) که در این مقاله مهم است به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$PG(n, z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} \right)^{n+1}.$$

تعریف ۲.۲. [۲۰] برای تابع پیوسته $f \in C[0, 1]$ چندجمله‌ای بهترین تقریب از درجه N چندجمله‌ای چون $p \in P_N$ است طوری که برای هر $q \in P_N$:

$$\|f - p\| \leq \|f - q\|$$

که در آن P_N زیر فضایی $(N + 1)$ بعدی از $C[0, 1]$ است که توسط توابع $1, x, x^2, \dots, x^N$ پیموده شده است.

۱.۲ تقریب تابع

تابع $u(x) \in L^2[0, 1]$ به شکل زیر قابل بسط است

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \psi_{n,m}(x), \quad (3.2)$$

جایی که $u_{n,m} = \langle u(x), \psi_{n,m}(x) \rangle$ که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی است. سری بریده شده از $u(x)$ به فرم زیر بیان می‌شود

$$u(x) = u_{M,k}(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} u_{n,m} \psi_{n,m}(x) = \mathbf{U}^T \mathbf{\Psi}(x), \quad (4.2)$$

جایی که \mathbf{U} و $\mathbf{\Psi}(x)$ بردارهایی با بعد $2^{k-1} M$ به شکل

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,M-1}, u_{2,0}, \dots, u_{2,M-1}, \dots, u_{2^{k-1},0}, \dots, u_{2^{k-1},M-1}]^T \\ &= [u_1, u_2, \dots, u_{2^{k-1}M}]^T, \end{aligned} \quad (5.2)$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}(x) &= [\psi_{1,0}(x), \dots, \psi_{1,M-1}(x), \dots, \psi_{2^{k-1},0}(x), \dots, \psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T \\ &= [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2^{k-1}M}(x)]^T, \end{aligned} \quad (6.2)$$

هستند. تابع $k(x, \xi)$ تعریف شده در $L^2([0, 1) \times [0, 1))$ را می توان بر حسب موجک های لژاندر دوبعدی به فرم زیر نمایش داد

$$k(x, \xi) \simeq \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi), \quad (۷.۲)$$

جایی که \mathbf{K} ماتریسی $2^{k-1} M \times 2^{k-1} M$ با مولفه های

$$K_{ij} = \langle \psi_i(x), \langle k(x, \xi), \psi_j(\xi) \rangle \rangle,$$

است.

لم ۳.۲. [۴] (نامساوی بسل) فرض کنیم H فضای هیلبرت باشد و گیریم که $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ یک دنباله متعامد یکه بر H باشد. آنگاه، برای هر h در H داریم $\sum_{k=1}^\infty |\langle h, e_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2$.

قضیه ۴.۲. گیریم $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ، آنگاه سری جواب $\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty u_{n,m} \psi_{n,m}(x)$ داده شده توسط رابطه (۳.۲) به $u(x)$ همگرا است.

اثبات. فرض کنیم $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ جایی که $L^2(\mathbb{R})$ یک فضای هیلبرت است و گیریم $\psi_{n,m}(x)$ تعریف شده در رابطه (۲.۲) فرم پایه یکه متعامد نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ باشد. فرض کنیم $u(x)$ به صورت $u(x) = \sum_{m=0}^{M-1} u_{n,m} \psi_{n,m}(x)$ باشد، که در آن $u_{n,m} = \langle u(x), \psi_{n,m}(x) \rangle_{w(x)}$. برای مقدار ثابت n و $\lambda_p = \langle u(x), \psi_p(x) \rangle$ قرار می دهیم $\psi_{n,m}(x) = \psi_p(x)$. اکنون مجموع جزئی $\{S_n\}$ از $\{\lambda_p \psi_p(x)\}_{p=1}^\infty$ را به شکل $S_n = \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_p(x)$ تعریف می کنیم. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\langle u(x), S_n \rangle = \left\langle u(x), \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_p(x), \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\rangle = \sum_{p=1}^n |\lambda_p|^2.$$

همچنین،

$$\left\| \sum_{p=m+1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\|^2 = \left\langle \sum_{p=m+1}^n \lambda_p \psi_p(x), \sum_{p=m+1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\rangle = \sum_{p=m+1}^n |\lambda_p|^2, \quad n > m.$$

نامساوی بسل ایجاب می کند که مجموع $\sum_{p=1}^\infty |\lambda_p|^2$ همگرا است و از این رو

$$\left\| \sum_{p=m+1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\|^2 \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

بنابراین، $\left\| \sum_{p=m+1}^n \lambda_p \psi_p(x) \right\| \rightarrow 0$ و

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{p=m+1}^n |\lambda_p|^2, \quad n > m.$$

پس نتیجه می شود که $\{S_n\}$ یک دنباله کشی است و همچنین به s همگرا است. هدف بعدی این است که ثابت کنیم $u(x) = s$ بدین منظور، داریم

$$\begin{aligned} \langle s - u(x), \psi_p(x) \rangle &= \langle s, \psi_p(x) \rangle - \langle u(x), \psi_p(x) \rangle \\ &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \psi_p(x) \right\rangle - \lambda_p = \lambda_p - \lambda_p = 0. \end{aligned}$$

این ایجاب می کند که $\langle s - u(x), \psi_p(x) \rangle = 0$ ، از این رو $u(x) = s$ و اگر $n \rightarrow \infty$ مجموع $\sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_p(x)$ به $u(x)$ همگرا خواهد بود. \square

۲.۲ نمایش ماتریسی انتگرال از موجک لژاندر

ماتریس عملگری انتگرال از موجک لژاندر که با \mathbf{V} نموده می‌شود عبارت است از:

$$\int_0^x \Psi(\xi) d\xi = \mathbf{V} \Psi(x), \quad (۸.۲)$$

جایی که \mathbf{V} ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ برای انتگرال است و به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{P} \\ \circ & \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

جایی که \mathbf{P} و \mathbf{Q} ماتریس‌هایی $(M \times M)$ به فرم

$$[p]_{i,j} = \begin{cases} 2^{1-k} & i = j = 1, \\ \circ & otherwise, \end{cases}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \circ & \dots & \circ & \circ \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \circ & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ \circ & \circ & \circ & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} & \circ \end{bmatrix},$$

هستند. انتگرال حاصل ضرب از بردارهای موجک لژاندر به شکل زیر به دست می‌آید

$$\int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) d\xi = \mathbf{I}, \quad (۹.۲)$$

که در آن \mathbf{I} ماتریس واحد $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است. به علاوه،

$$\Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{U} \simeq \tilde{\mathbf{U}}^T \Psi(\xi), \quad (۱۰.۲)$$

جایی که \mathbf{U} توسط رابطه (۵.۲) داده شده و $\tilde{\mathbf{U}}$ ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است.

۳ روش حل

در این بخش روش پیشنهادی برای حل معادلات انتگرالی غیرخطی از نوع اول به فرم (۱.۱) و (۲.۱) را بیان می‌کنیم.

۱.۳ معادله انتگرال فردهولم غیرخطی از نوع اول

معادله انتگرال فردهولم غیرخطی به فرم

$$\int_0^1 k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad (۱.۳)$$

را در نظر می‌گیریم. جایی که g و F توابع داده شده هموار و F بر حسب تابع مجهول u غیرخطی و معکوس پذیر باشد. همچنین $g(x) \in L^2[0, 1)$ و $k \in (L^2[0, 1) \times [0, 1))$. در ابتدا با جایگذاری

$$F(u(\xi)) = y(\xi), \quad (۲.۳)$$

معادله انتگرال فرد هولم غیرخطی (۱.۳) را به یک معادله از نوع خطی تبدیل می کنیم. بنابراین معادله انتگرال خطی به فرم زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^1 k(x, \xi)y(\xi)d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1. \quad (3.3)$$

توابع k ، y و g را توسط روابط زیر تقریب می زنیم

$$g(x) \simeq \mathbf{G}^T \Psi(x), \quad k(x, \xi) \simeq \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi), \quad y(\xi) \simeq \mathbf{Y}^T \Psi(\xi). \quad (4.3)$$

جایگذاری این روابط در معادله (۳.۳) نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} \Psi^T(x) \mathbf{G} &= \int_0^1 \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi \\ &= \Psi^T(x) \mathbf{K} \int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi = \Psi^T(x) \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}. \quad (5.3)$$

۲.۳ معادله انتگرال ولترای غیرخطی از نوع اول

معادله انتگرال ولترای غیرخطی از نوع اول به فرم زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^x k(x, \xi)F(u(\xi))d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1. \quad (6.3)$$

به روش مشابه در بخش ۱.۳، با جایگذاری (۲.۳) در این معادله، یک معادله انتگرال به فرم زیر حاصل خواهد شد

$$\int_0^x k(x, \xi)y(\xi)d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1. \quad (7.3)$$

با استفاده از روابط (۴.۳) و (۱۰.۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Psi^T(x) \mathbf{G} &= \int_0^x \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi = \Psi^T(x) \mathbf{K} \left(\int_0^x \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi \right) \\ &= \Psi^T(x) \mathbf{K} \left(\int_0^x \tilde{\mathbf{Y}}^T \Psi(\xi) d\xi \right) = \Psi^T(x) \mathbf{K} \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{V} \Psi(x). \end{aligned}$$

آنگاه

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{V} \Psi(x). \quad (8.3)$$

با محاسبه این معادله در نقاط هم محلی $x_j = \frac{j}{M \cdot 2^{k-1}}$ ، برای $j = 1, \dots, M \cdot 2^{k-1}$ ، یک سیستم از معادلات جبری غیرخطی به فرم زیر ساخته خواهد شد

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{V} \Psi(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M \cdot 2^{k-1}. \quad (9.3)$$

۴ آنالیز خطا

هدف از این بخش آنالیز روش تقریبی بیان شده برای حل عددی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع اول است. همچنین یافتن یک کران بالا برای خطا را به دست خواهیم آورد.

لم ۱.۴. [۱۵] اگر m یک عدد صحیح باشد، آنگاه رابطه زیر برای چندجمله‌ای‌های لژاندر $L_m(x)$ برقرار است

$$\begin{aligned} ۱) \int_a^b L_m^\nu(\xi) d\xi &= \frac{b-a}{\nu m + 1}, \\ ۲) \frac{d}{dx} [L_{m+1}(x) - L_{m-1}(x)] &= (\nu m + 1)L_m(x). \end{aligned}$$

قضیه ۲.۴. گیریم $u(x)$ تابعی به اندازه کافی هموار در بازه $I = [0, 1]$ باشد و توسط چندجمله‌ای‌های موجک لژاندر طوری تقریب شده باشد که $\frac{du}{dx} \leq L$. آنگاه کران خطا به شکل زیر خواهد بود

$$\|u - u_{M,k}\| < \frac{L^\nu}{\nu} PG(1, \nu^{k-1} + 1) PG(1, M + 1).$$

اثبات. روابط (۳.۲) و (۴.۲) ایجاب می‌کنند که

$$\|u - u_{M,k}\|_\nu^\nu \leq \sum_{n=\nu^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{n,m}^\nu \int_0^1 |\psi_{n,m}(\xi)|^\nu d\xi. \quad (۱.۴)$$

همچنین لم ۱.۴، نتیجه خواهد داد

$$\int_0^1 |\psi_{n,m}(\xi)|^\nu d\xi = \left(m + \frac{1}{\nu}\right) \nu^k \int_0^1 L_m^\nu(\nu^k \xi - \nu n + 1) d\xi = \frac{\left(m + \frac{1}{\nu}\right) \nu^k}{\nu m + 1}. \quad (۲.۴)$$

به عبارت دیگر، داریم

$$c_{n,m} = \int_{\frac{\nu n - \nu}{\nu^k}}^{\frac{\nu n}{\nu^k}} u(\xi) \psi_{n,m}(\xi) d\xi = \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} \nu^{\frac{k}{\nu}} \int_{\frac{\nu n - \nu}{\nu^k}}^{\frac{\nu n}{\nu^k}} u(\xi) L_m(\nu^k \xi - \nu n + 1) d\xi.$$

اگر قرار دهیم $s = \nu^k \xi - \nu n + 1$ ، با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز و لم ۱.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} \nu^{-\frac{k}{\nu}} \int_{-1}^1 u\left(\frac{s + \nu n - 1}{\nu^k}\right) L_m(s) ds \\ &= \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} \nu^{-\frac{\nu k}{\nu}} \int_{-1}^1 u_s\left(\frac{s + \nu n - 1}{\nu^k}\right) [L_{m+1}(s) - L_{m-1}(s)] ds. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} c_{n,m}^\nu &\leq \left(m + \frac{1}{\nu}\right) \nu^{-\nu k} \int_{-1}^1 \left|u_s\left(\frac{s + \nu n - 1}{\nu^k}\right)\right|^\nu ds \int_{-1}^1 |L_{m+1}(s) - L_{m-1}(s)|^\nu ds \\ &\leq \frac{\nu L^\nu \left(m + \frac{1}{\nu}\right) \nu^{-\nu k}}{(\nu m + 1)^\nu} \gamma_m(s), \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

جایی که

$$\begin{aligned} \gamma_m(s) &= \int_{-1}^1 |L_{m+1}(s) - L_{m-1}(s)|^2 ds \leq \int_{-1}^1 [L_{m+1}^2(s) + L_{m-1}^2(s)] ds \\ &\leq \frac{2}{2(m+1)+1} + \frac{2}{2(m-1)+1} = \frac{4m+2}{2m^2+2m+1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

نامساوی های (۳.۴) و (۴.۴) ایجاب می کنند که

$$c_{n,m}^2 \leq \frac{L^2 2^{-2k} (4m+2)}{(2m+1)(2m^2+2m+1)}. \quad (5.4)$$

قرار دادن (۲.۴) و (۵.۴) در (۱.۴) به دست می دهد

$$\|u - u_{M,k}\|_2^2 \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{L^2 2^{-2k}}{2m^2+2m+1} \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{L^2 2^{-2k}}{m^2+2m+1}.$$

با توجه به اینکه $n < 2^{k-1}$ خواهیم داشت $\frac{1}{2n^2} < 2^{-2k}$. بنابراین، نتیجه به شکل زیر به دست خواهد آمد

$$\begin{aligned} \|u - u_{M,k}\|_2^2 &< \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{L^2}{2n^2(m+1)^2} = \frac{L^2}{4} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{m=M}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1}\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{4} PG(1, 2^{k-1}+1) PG(1, M+1). \end{aligned}$$

□

۱.۴ آنالیز پایداری

قضیه ۳.۴ [۲۱] برای $N+1$ گره مجزای x_0, x_1, \dots, x_N با $N+1$ مقدار مشخص f_0, f_1, \dots, f_N چندجمله ای یکتایی چون $p_N \in P_N$ وجود دارد طوری که برای هر $i = 0, 1, \dots, N$ $p_N(x_i) = f_i$ را چندجمله ای درونیاب f گوئیم. چندجمله ای های بهترین تقریب p یک درونیابی از f در $N+1$ گره هستند و خطای آن توسط رابطه زیر داده می شود [۲۲]

$$\|f - p_N\| \leq (1 + \Gamma_N(X)) \|f - p\| \leq \epsilon(1 + \Gamma_N(X)) \omega\left(\frac{1}{2N}\right),$$

که در آن $\Gamma_N(X)$ ثابت لبگ به شکل

$$\Gamma_N(X) = \left\| \sum_{i=0}^N |l_i^{(X)}(x)| \right\| \quad (6.4)$$

است و $l_i^{(X)}(x) \in P_N$ امین چندجمله ای اصلی لاگرائز مرتبط با شبکه نقاط $X = (x_i)_{i=0,1,\dots,N}$ است و ω اندازه پیوستگی از تابع f است.

اکنون مجموعه مقادیر تابع $\{\tilde{f}(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ را که اغتشاشی از داده های $\{f(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ مربوط به گره های $\{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ هستند در نظر می گیریم. اغتشاش ممکن است به دلیل اثر خطاهای گرد کردن باشد یا ممکن است ناشی از خطا در اندازه گیری تجربی داده ها باشد. فرض کنیم $p_N(x)$ و $\tilde{p}_N(x)$ به ترتیب چندجمله ای های درونیاب $f(x_i)$ و $\tilde{f}(x_i)$ باشند، بنابراین

$$\|p_N(x) - \tilde{p}_N(x)\| \leq \Gamma_N(X) \max_{0 \leq x < 1} |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| + \max_{0 \leq x < 1} |\delta p_N(x) - \delta \tilde{p}_N(x)|$$

که در آن $\delta p_N(x)$ و $\delta \tilde{p}_N(x)$ نشان دهنده اختلاف بین چندجمله ای درونیاب و سری جواب موجک لژاندر هستند. اگر ثابت لبگ داده شده در در رابطه (۶.۴) و اختلاف بین چندجمله ای درونیاب و سری جواب موجک لژاندر کوچک باشند، تغییرات کوچک بر داده ها منجر به تغییرات کوچک در سری جواب موجک لژاندر خواهد شد و بنابراین روش موجک لژاندر پایدار خواهد بود. به منظور اطلاعات بیشتر در ارتباط با پایداری می توان مرجع [۹] را نگرست.

۵ وجود و یکتایی جواب

معادله انتگرال ولترای غیرخطی به فرم (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. در ابتدا، این معادله را به فرم یک معادله انتگرال ولترای خطی به فرم (۷.۳) تبدیل می‌کنیم. بعد از مشتق‌گیری و کمی ساده‌سازی، معادله (۷.۳) به فرم زیر نوشته خواهد شد

$$y(x) + \int_0^x k_1(x, \xi)y(\xi)d\xi = g_1(x),$$

جایی که $k_1(x, \xi) = \frac{\partial k(x, \xi)}{\partial x} / k(x, x)$ و $g_1(x) = g'(x) / k(x, x)$. اگر k_1 یک تابع حقیقی مقدار پیوسته بر مستطیل $\{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ باشد، بنابراین برای هر $y \in C_c([0, 1])$ تعریف می‌کنیم

$$(K_1 y)(x) = \int_0^x k_1(x, \xi)y(\xi) d\xi.$$

این یک عملگر کراندار بر $C_c([0, 1])$ با کران

$$\|K_1\| \leq \sup\{|k_1(x, \xi)| : 0 \leq \xi \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

است. فرض کنیم که E فضای خطی نرم‌دار بر \mathbb{R} باشد و $L(E)$ مجموعه عملگرهای خطی کراندار بر E باشند. بنابراین، $L(E)$ نیز یک فضای خطی نرم‌دار خواهد بود.

تعریف ۱.۵. [۱] عملگر $T \in L(E)$ منظم نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $S \in L(E)$ موجود باشد طوری که $TS = ST = I$ عملگر S معکوس عملگر T نامیده می‌شود.

لم ۲.۵. [۴] گیریم که $T \in L(E)$ عملگر T منظم است اگر و تنها اگر یک هم‌ریختی از E به توی خودش باشد. اگر T منظم باشد آنگاه، نگاشت معکوس $T - I$ در $L(E)$ است و معکوس T همان است که در تعریف ۱.۵ بیان شد.

فرض کنیم که $T \in L(E)$ آنگاه دنباله $\{\|T_n\|^{1/n}\}$ همگرا است. به علاوه $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ یک فضای باناخ متشکل از همه‌ی توابع پیوسته با نرم $\|f\| = \max\{|f(x)|, 0 \leq x < 1\}$ خواهد بود. گیریم $T \in L(E)$ طوری باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} < 1$ آنگاه $I - T$ منظم است و

$$(I - T)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} T^n,$$

جایی که سری $\sum_n T^n$ در $L(E)$ همگرا است.

قضیه ۳.۵. گیریم k_1 تابعی پیوسته و حقیقی مقدار بر مستطیل $\{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ باشد. آنگاه معادله انتگرال ولترای

$$y(x) = g_1(x) - \int_0^x k_1(x, \xi)y(\xi)d\xi, \quad (۱.۵)$$

برای هر $g_1 \in C_c([0, 1])$ دارای جوابی یکتا چون $y \in C_c([0, 1])$ است.

اثبات. معادله (۱.۵) را به فرم عملگری

$$(I - K_1)y = g_1 \quad (۲.۵)$$

می‌نویسیم. آشکار است که K_1 عملگری خطی و کراندار بر $C_c([0, 1])$ است. همچنین می‌دانیم که $C_c([0, 1])$ تام است. در نتیجه اگر ثابت کنیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_1^n\|^{1/n} = 0$ ، آنگاه بنابر رابطه (۲.۵) قضیه اثبات خواهد شد. گیریم

$$M = \sup\{|k_1(x, \xi)| : 0 \leq \xi \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

و $y \in C_c([0, 1])$. آنگاه برای $0 \leq x \leq 1$ به دست می آید

$$|(K_1 y)(x)| = \left| \int_0^x k_1(x, \xi) y(\xi) d\xi \right| \leq \sup \{ |k_1(x, \xi)| |y(\xi)| : 0 \leq \xi \leq x \} \leq M \|y\|.$$

بنابر استقرا، ثابت می کنیم که

$$|(K_1^n y)(x)| \leq \frac{1}{n!} M^n \|y\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

آشکارا می بینیم که برای $n = 1$ رابطه درست است. گیریم برای عدد مثبت صحیح n رابطه (۳.۵) برقرار باشد. آنگاه از آنجایی که $K_1^{n+1} = K_1(K_1^n)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |(K_1^{n+1} y)(x)| &= |(K_1(K_1^n y))(x)| = \left| \int_0^x k_1(x, \xi) (K_1^n y)(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{M^{n+1} \|y\|}{n!} \int_0^x \xi^n d\xi = \frac{1}{(n+1)!} M^{n+1} \|y\|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

پس معادله (۳.۵) برای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است. استفاده از (۳.۵) برای هر $n = 1, 2, \dots$ نتیجه می دهد

$$\|K_1^n y\| = \max \{ |(K_1^n y)(x)| : 0 \leq x \leq 1 \} \leq \frac{1}{n!} M^n \|y\|.$$

با توجه به این که برای هر $y \in C_c([0, 1])$ رابطه (۴.۵) برقرار است، ازین رو برای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم

$$\|K_1^n\| = \sup \{ \|K_1^n y\| : y \in C_c([0, 1]), \|y\| \leq 1 \} \leq \frac{1}{n!} M^n.$$

□

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_1^n\|^{1/n} = 0$ و اثبات کامل است.

۶ مثال های عددی

در این بخش، برخی مثال های عددی به منظور نشان دادن دقت و کارایی روش داده می شود. همچنین نتایج با برخی روش های دیگر مقایسه خواهد شد. به منظور بررسی عملی پایداری، عدد شرط محاسبه شده و همچنین مرتبه همگرایی از فرمول

$$q \simeq \frac{\log \left| \frac{u_{n,m+1} - y_{n,m}}{u_{n,m} - u_{n,m-1}} \right|}{\log \left| \frac{u_{n,m} - y_{n,m-1}}{u_{n,m-1} - u_{n,m-2}} \right|} \quad (1.6)$$

برای مقادیر ثابتی از k و M به طور تقریبی محاسبه شده است که در آن $u_{n,m}$ همان ضرایبی هستند که در رابطه (۳.۲) تعریف شده اند. آزمون نسبت

$$\text{Ratio} = \left| \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}} \right|$$

مشخص کننده همگرایی، سرعت و مرتبه همگرایی است. به علاوه زمان اجرای برنامه ها نیز در چندین جدول تعیین گردیده است.

مثال ۱.۶. [۵] معادله غیرخطی ولترا به فرم

$$\int_0^x e^{x-\xi} \ln(u(\xi)) d\xi = e^x - x - 1, \quad (2.6)$$

را در نظر می گیریم. جواب دقیق این مساله به صورت $u(x) = e^x$ است. برای حل این مساله با استفاده از روش بیان شده، قرار می دهیم $\ln(u(\xi)) = y(\xi)$. بنابراین معادله غیرخطی (۲.۶) به یک معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول تبدیل خواهد شد. اکنون جواب این معادله را بر حسب یک سری بریده شده از موجک های لژاندر به فرم زیر در نظر می گیریم

$$y(x) \simeq \sum_{n=1}^1 \sum_{m=0}^1 y_{n,m} \psi_{n,m}(x),$$

که در آن $M = 2$ و $k = 1$ جایی که

$$\psi_{1,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \psi_{1,1} = \begin{cases} \sqrt{3}(2x-1) & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

با استفاده از روش بیان شده، رابطه ماتریسی بنیادی (۹.۳) ساخته خواهد شد. با جایگذاری نقاط هم‌محلی $x_1 = 0.5$ و $x_2 = 1$ در آن و حل سیستم جبری حاصل شده به دست می‌آوریم $y_{1,0} = 0.5$ و $y_{1,1} = 0.288675134266$. بنابراین

$$y(x) \simeq 6.1 \times 10^{-10} + 0.999999998861x \simeq x,$$

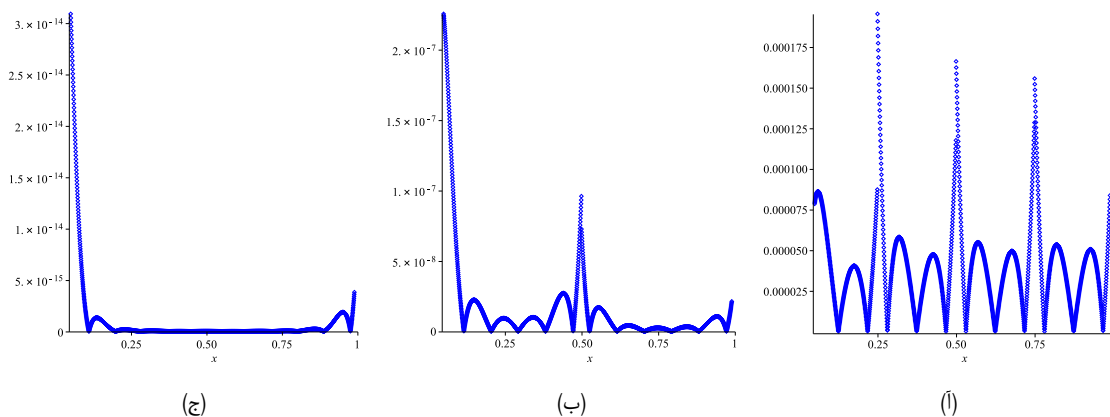
از اینرو، $e^{y(x)} = e^x = u(x)$ که پاسخ دقیق مساله است. به علاوه، زمان اجرای برنامه برابر با $1/72$ ثانیه محاسبه شده است. در مرجع [۵] نویسندگان جوابی تقریبی برای این معادله به دست آورده‌اند، در صورتی که روش پیشنهادی تنها با انتخاب $M = 2$ و $k = 1$ به جواب دقیق مساله دست پیدا کرد. بنابراین روش بیان شده در حل این مساله نسبت به روش موجک‌ها در [۵] عملکرد بهتری داشت.

مثال ۲.۶. [۵] معادله انتگرال ولترای غیرخطی از نوع اول به فرم

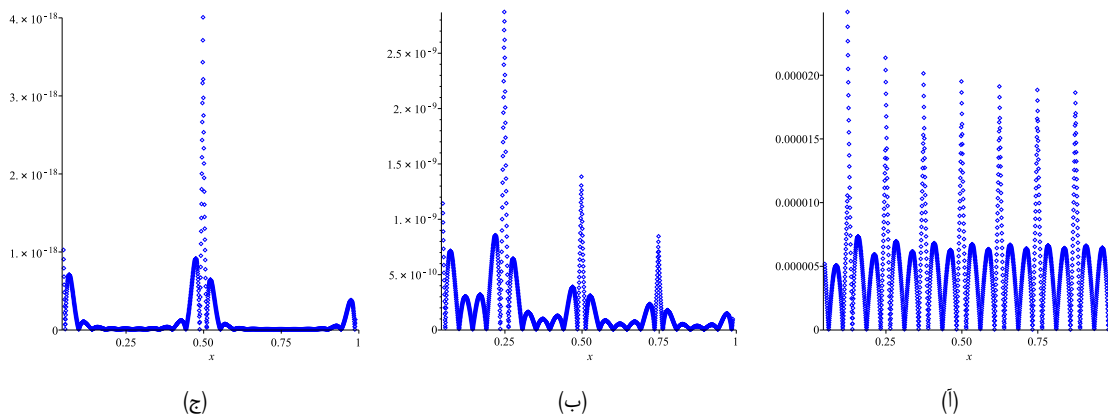
$$\int_0^x \sin((x-\xi)+1) \cos(u(\xi)) d\xi = \left(\frac{1}{4}x+1\right) \sin x, \quad (3.6)$$

با جواب دقیق $u(x) = x$ را در نظر بگیرید. برای حل این معادله به روش بیان شده، فرض می‌کنیم که $y(\xi) = \cos(u(\xi))$. بنابراین یک معادله انتگرال خطی با جواب $u(x) = \arccos(y(x))$ خواهیم داشت.

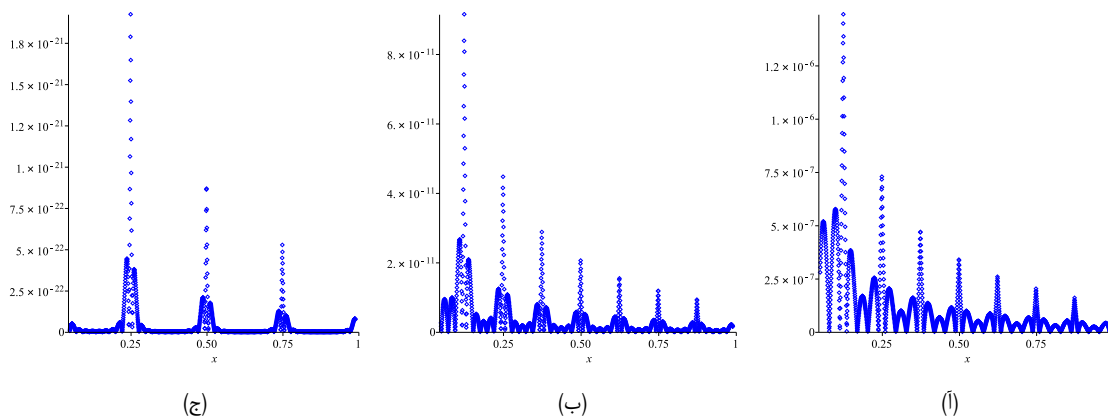
شکل‌های ۱، ۲ و ۳ نتایج عددی این مثال را با روش ارائه شده به ترتیب برای $M2^{k-1} = 12$ ، $M2^{k-1} = 24$ و $M2^{k-1} = 48$ به تصویر می‌کشند. شکل ۴ نمودار همگرایی را برای $u(x)$ نشان می‌دهد. در این شکل، M نشان‌دهنده درجه چندجمله‌ای لژاندر و k عددی صحیح است که در (۲.۲) تعریف شده است. این نمودار مشخص می‌کند که روش بیان شده نرخ همگرایی مناسبی دارد. همچنین شکل‌ها نشان می‌دهند که افزایش مقدار M نسبت به افزایش مقدار k تاثیر بیشتری در نرخ همگرایی و دقت روش دارد. در جدول ۱، ماکزیم قدرمطلق خطاهای روش موجک‌ها داده شده‌اند که با داده‌های جدول ۲، قابل مقایسه هستند. جدول ۲، ماکزیم قدر مطلق خطاها را برای $u(x)$ با مقادیر مختلف از M و k در معرض نمایش قرار می‌دهد. این دو جدول نشان می‌دهند که خطاهای مطلق ارزیابی شده با روش پیشنهادی برای جواب $u(x)$ ، در مقایسه با روش موجک‌ها [۵] به سرعت کاهش می‌یابند. در جدول ۳ برای مقادیر مختلف از M و k عدد شرط و زمان اجرای برنامه‌ها داده شده است. با توجه به اینکه عدد شرط بزرگ نیست نتیجه می‌شود که روش بیان شده در محاسبه پاسخ مساله پایدار بوده و مساله خوش‌وضع است. همچنین مرتبه همگرایی در حالت $k = 3$ و $M = 12$ برای مقادیر $n = 4$ و $m = 10$ طبق فرمول (۱.۶) به‌طور تقریبی محاسبه شده و برابر با $q = 0.76$ به دست آمده است. به علاوه به منظور پیگیری همگرایی، آزمون نسبت در حالت $k = 3$ و $M = 12$ پیاده‌سازی شده و در شکل ۵ به نمایش گذاشته شده است، همانگونه که از این شکل پیداست، سری جواب موجک لژاندر به جواب مساله به سرعت همگراست.



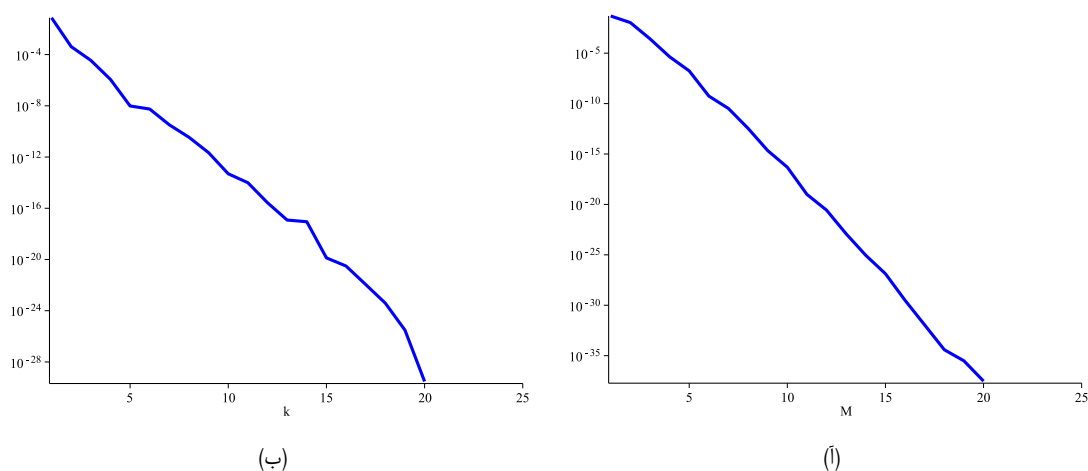
شکل ۱: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 12$ در مثال ۲.۶. (ا): $M = 3$ و $k = 3$; (ب): $M = 6$ و $k = 2$; (ج): $M = 12$ و $k = 1$.



شکل ۲: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 24$ در مثال ۲.۶. (ا): $M = 3$ و $k = 4$ ، (ب): $M = 6$ و $k = 3$ ، (ج): $M = 12$ و $k = 2$.



شکل ۳: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 48$ در مثال ۲.۶. (ا): $M = 3$ و $k = 5$ ، (ب): $M = 6$ و $k = 4$ ، (ج): $M = 12$ و $k = 3$.



شکل ۴: نمودار همگرایی $u(x)$ برای مثال ۲.۶. در (ا): $k = 2$ و در (ب): $M = 2$ ثابت هستند.

مثال ۳.۶. [۱۱] معادله انتگرال به فرم زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^1 e^{x\xi} u(\xi) d\xi = \frac{\lambda + 4x + x^2 + e^x (\lambda - 16e^{-\frac{x}{4}} - 4x + x^2)}{4x^3}, \quad (4.6)$$

جدول ۱: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده توسط روش موجک‌ها در [۵].

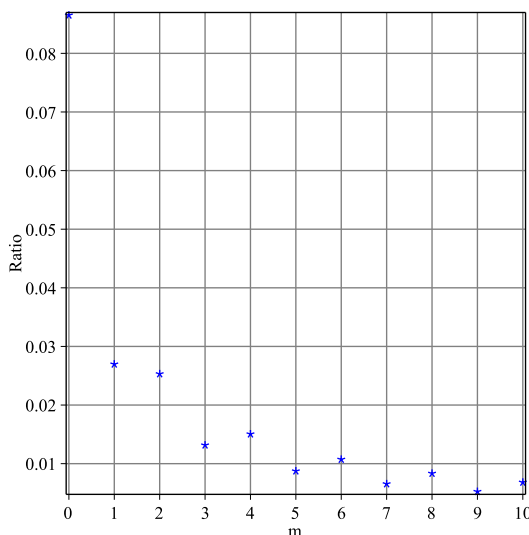
J	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$2M$	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴
مرجع [۵]	$1.2e-003$	$3.1e-004$	$8.0e-005$	$2.0e-005$	$5.0e-006$	$1.2e-006$	$3.1e-007$	$7.9e-008$

جدول ۲: مقایسه ماکزیمم قدر مطلق خطا برای $u(x)$ در مثال ۲.۶.

M	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$k=1$	$3.8e-001$	$5.7e-002$	$3.8e-003$	$4.6e-005$	$6.8e-006$	$1.8e-007$	$1.9e-008$	$4.1e-010$	$3.2e-011$
$k=2$	$1.3e-001$	$1.5e-003$	$1.7e-004$	$2.2e-006$	$2.3e-007$	$1.6e-009$	$9.9e-011$	$6.8e-013$	$1.7e-014$
$k=3$	$2.2e-002$	$1.9e-004$	$1.8e-005$	$7.2e-008$	$2.9e-009$	$1.3e-011$	$3.8e-013$	$1.4e-015$	$3.2e-017$
$k=4$	$1.1e-002$	$2.4e-005$	$1.5e-006$	$2.3e-009$	$9.1e-011$	$1.0e-013$	$4.3e-015$	$2.7e-018$	$6.6e-020$

جدول ۳: عدد شرط و زمان اجرای برنامه در مثال ۲.۶ برای مقادیر مختلف از M و k .

k	M	۲	۴	۶	۸	۱۰
۱	عدد شرط	۰.۷۳۲۲۵۷	۱.۵۷۹۹۹۷	۱.۵۵۷۲۵۵	۱.۵۵۷۴۱۳	۱.۵۵۷۴۰۸
۲		۰.۳۰۹۸۴۱	۱.۵۵۹۶۴۷	۱.۵۵۳۷۳۹	۱.۵۵۷۴۰۷	۱.۵۵۷۴۰۸
۳		۱.۰۰۵۰۲۵	۰.۹۹۹۹۹۷	۰.۹۹۹۹۲۴	۰.۹۹۹۸۹۵	۰.۹۹۹۹۵۷
۱	زمان (ثانیه)	۱.۵۷	۲.۳۷	۳.۴۱	۵.۹۱	۷.۲۲
۲		۲.۷۳	۵.۰۸	۸.۸۲	۱۷.۷۶	۳۱.۵۴
۳		۴.۵۱	۹.۰۱	۱۷.۸۴	۳۷.۲۱	۷۰.۵۶



شکل ۵: آزمون نسبت برای مساله ۲.۶ با $M = 12$ و $k = 3$.

جواب دقیق این معادله عبارت است از

$$u(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right) \left|x - \frac{1}{4}\right|$$

به منظور تقریب جواب $u(x)$ بر حسب سری بریده شده موجک لژاندر

$$u(x) \simeq \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^2 u_{n,m} \psi_{n,m}(x),$$

با $M = 3$ و $k = 2$ معادله ماتریسی بنیادین $\mathbf{G} = \mathbf{KIU}$ را تشکیل می‌دهیم. به کمک روش هم‌محلی یک سیستم از معادلات

حاصل خواهد شد. حل این سیستم معادلات نتیجه می دهد

$$U = \begin{bmatrix} -0.058925565099 & 0.051031036308 & -0.013176156917 \\ 0.058925565099 & 0.051031036308 & 0.013176156917 \end{bmatrix}^T.$$

از این رو، با قراردادن این ضرایب موجک لژاندر در رابطه $u(x) \simeq U^T \Psi(x)$ ، پاسخ تقریبی زیر حاصل می گردد

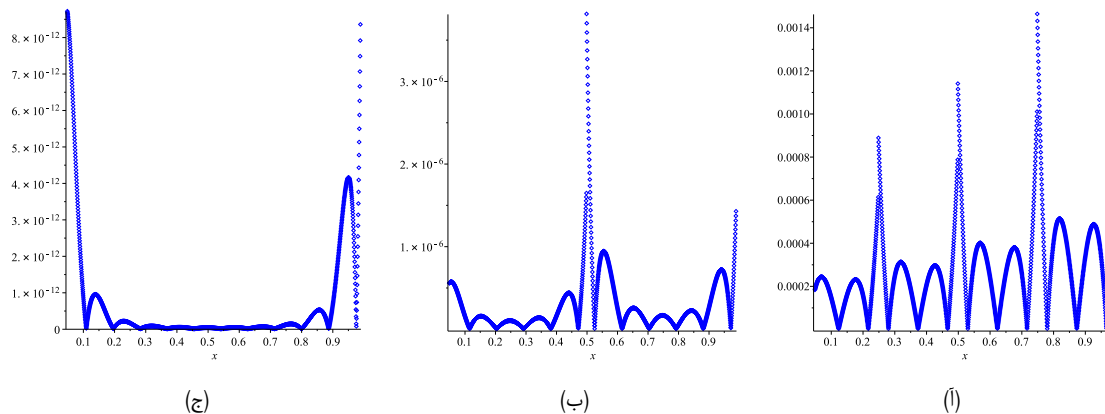
$$u(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 0.25 & x < 0.5, \\ x^2 - x + 0.25 & x < 1, \\ 0 & x < 0 \text{ and } x \geq 1, \end{cases}$$

که جواب دقیق معادله اصلی است. در [۱۱] نویسندگان برای حل این معادله روشی را بر پایه توابع ترکیبی (توابع بلاک پالس و چندجمله ای های لژاندر) استفاده کرده اند و آنها جوابی تقریبی برای این مساله به دست آورده اند. با استفاده از روش بیان شده در این مقاله توانستیم جواب دقیق مساله را تنها با استفاده از مقدار محدودی از مقادیر M و k بیابیم. به علاوه زمان لازم برای اجرای برنامه این مثال به طور تقریبی $1/72$ ثانیه محاسبه شده است.

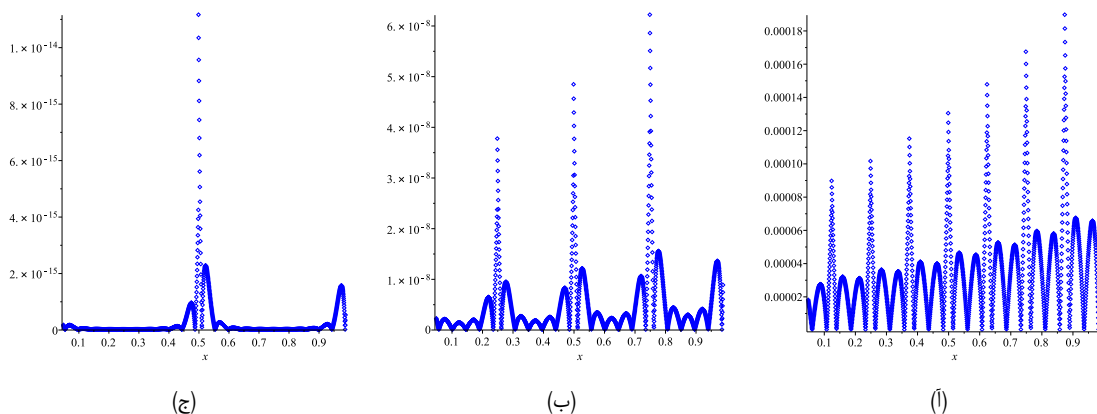
مثال ۴.۶. معادله انتگرال ولترای نوع اول به شکل زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^x e^{(x-\xi)} u^2(\xi) d\xi = e^{2x} - e^x. \quad (5.6)$$

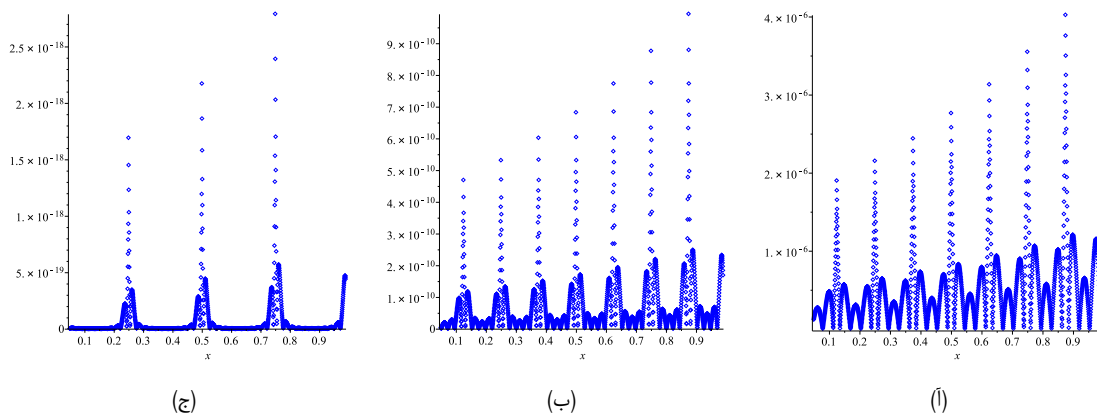
جواب دقیق مساله برابر است با $u(x) = e^x$. برای حل این مساله غیر خطی با توجه به این که قسمت غیر خطی در بازه $(0, 1)$ معکوس پذیر است، قرار می دهیم $u^2(\xi) = y(\xi)$ بنابراین یک معادله انتگرال خطی با جواب $u(x) = \sqrt{y(x)}$ خواهیم داشت. شکل های ۶، ۷ و ۸ نتایج عددی این مثال را با روش ارائه شده به ترتیب برای $M2^{k-1} = 12$ ، $M2^{k-1} = 24$ و $M2^{k-1} = 48$ نمایش می دهند. شکل ۹ نمودار همگرایی را برای $u(x)$ نشان می دهد. در این شکل، M نشان دهنده درجه چندجمله ای لژاندر و k عددی صحیح است که در (۲.۲) تعریف شده است. این نمودار مشخص می کند که روش بیان شده نرخ همگرایی مناسبی دارد. همچنین شکل ها نشان می دهند که افزایش مقدار M نسبت به افزایش مقدار k تاثیر بیشتری در نرخ همگرایی و دقت روش دارد و خطا به سرعت کاهش می یابد. در جدول ۴ ماکزیمم خطا در نقاط مختلف برای زمانی که $M2^{k-1} = 16$ به دست آمده و با روش داده شده در [۲] مقایسه شده است. همانطور که از داده ها پیداست، میزان خطای روش مورد بررسی بسیار پایین تر از روش [۲] است. در جدول ۵ برای مقادیر مختلف از M و k عدد شرط و زمان اجرای برنامه ها محاسبه شده و نمایش داده شده است. داده ها حاکی از این هستند که روش بیان شده پایدار بوده و مساله خوش وضع است. علاوه بر این، مرتبه همگرایی طبق فرمول (۱.۶) در حالت $k = 3$ و $M = 12$ برای مقادیر $n = 4$ و $m = 10$ به طور تقریبی برابر با $q = 1/9$ است. به علاوه، آزمون نسبت در حالت $k = 3$ و $M = 12$ پیاده سازی شده و در شکل ۱۰ به نمایش گذاشته شده است، همانگونه که از این شکل پیداست، سری جواب موجک لژاندر به سرعت به جواب مساله همگراست.



شکل ۶: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 12$ در مثال ۴.۶. (ا) $M = 3$ و $k = 3$ ، (ب) $M = 12$ و $k = 3$ ، (ج) $M = 12$ و $k = 2$.



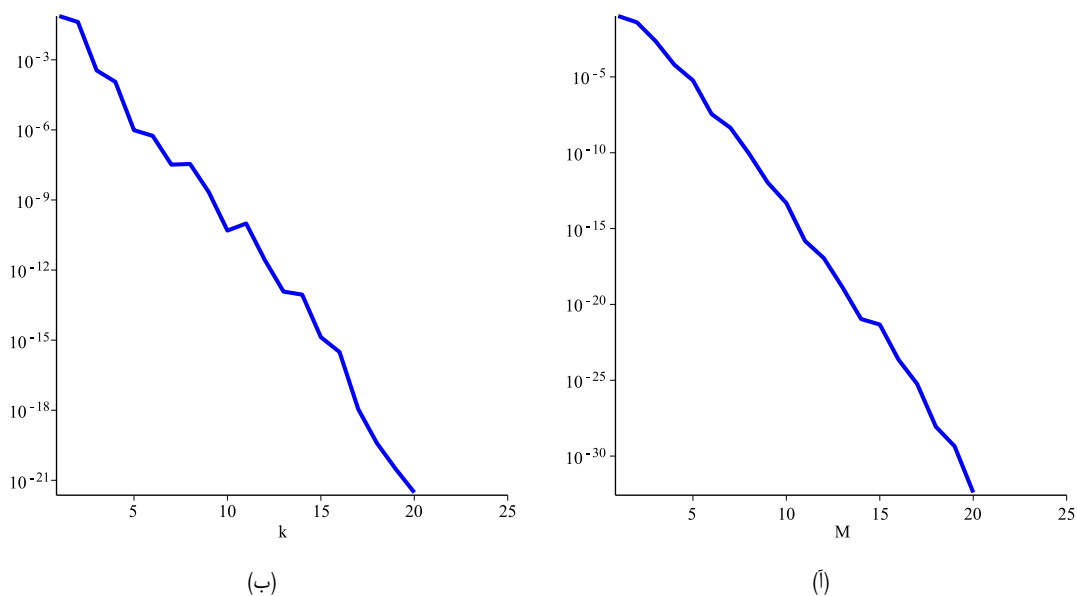
شکل ۷: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 24$ در مثال ۴.۶. (ا) $M = 3$ و $k = 4$ ، (ب) $M = 6$ و $k = 3$ ، (ج) $M = 12$ و $k = 2$.



شکل ۸: مقایسه نتایج عددی با جواب دقیق برای $M2^{k-1} = 48$ در مثال ۴.۶. (ا) $M = 3$ و $k = 5$ ، (ب) $M = 6$ و $k = 4$ ، (ج) $M = 12$ و $k = 3$.

جدول ۴: محاسبه مقدار خطا در نقاط مختلف برای مثال (۴.۶) زمانی که $M2^{k-1} = 16$ برای مقادیر مختلف از M و k به همراه مقایسه با روش [۲]

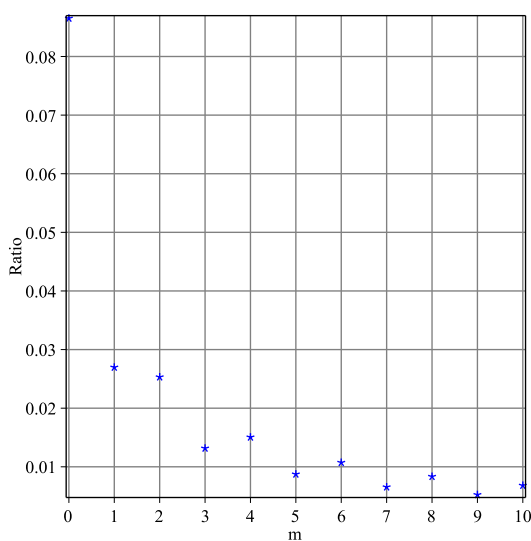
x	$N = 16$ خطای [۲]	$M = 2$ $k = 4$	$M = 4$ $k = 3$	$M = 8$ $k = 2$	$M = 16$ $k = 1$
۰	—	$2.82e-003$	$2.95e-005$	$5.09e-009$	$2.64e-016$
$1/16$	0.0328	$1.38e-003$	$7.14e-006$	$6.08e-010$	$1.56e-017$
$2/16$	0.0374	$1.57e-003$	$6.71e-006$	$7.96e-011$	$4.03e-019$
$3/16$	0.0454	$4.11e-003$	$5.93e-006$	$1.40e-010$	$2.41e-020$
$4/16$	0.0517	$4.65e-003$	$4.86e-005$	$8.39e-009$	$1.35e-020$
$5/16$	0.0589	$5.27e-003$	$7.61e-006$	$2.74e-010$	$1.95e-020$
$6/16$	0.0671	$5.97e-003$	$6.25e-005$	$1.01e-010$	$7.75e-020$
$7/16$	0.0716	$2.93e-003$	$1.51e-005$	$1.20e-010$	$2.39e-019$
$8/16$	0.0815	$3.32e-003$	$1.42e-005$	$7.72e-010$	$7.55e-018$
۱	0.0870	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000



شکل ۹: نمودار همگرایی $u(x)$ برای مثال ۴.۶. در (ا): $k = 2$ و در (ب): $M = 2$ ثابت هستند.

جدول ۵: عدد شرط و زمان اجرای برنامه در مثال ۴.۶ برای مقادیر مختلف از M و k .

k	M	۲	۴	۶	۸	۱۰
۱	عدد شرط	۰.۹۴۱۸۵۴	۱.۹۰۹۶۳۴	۱.۹۹۷۵۷۸	۱.۹۹۹۹۷۰	۱.۹۹۹۹۹۹
۲		۱.۸۸۲۶۹۷	۱.۰۲۰۲۸۷	۱.۰۰۰۰۱۴۱	۱.۰۰۰۰۰۰۴	۱.۰۰۰۰۰۰۰
۳		۱.۸۶۵۲۲۷	۱.۹۹۷۳۷۶	۱.۹۹۹۹۹۵	۱.۶۰۰۰۰۰۰	۱.۹۶۵۵۴۵
۱	زمان (ثانیه)	۲.۲۹	۳.۸۰	۵.۵۷	۹.۵۷	۱۴.۵۲
۲		۴.۱۰	۷.۷۳	۱۳.۸۸	۲۸.۵۹	۶۲.۵۹
۳		۶.۷۸	۱۳.۶۴	۲۸.۰۵	۵۹.۹۱	۱۴۰.۰۰



شکل ۱۰: آزمون نسبت برای مساله ۴.۶ با $M = 12$ و $k = 3$.

۷ نتیجه‌گیری

ایده اصلی این مقاله ساختن روشی بر پایه‌ی موجک‌های لژاندر به منظور یافتن پاسخ دسته خاصی از معادلات انتگرال غیر خطی از نوع اول بود. به کمک خواص مهم این توابع ترکیبی، معادله انتگرال به یک سیستم جبری از معادلات تبدیل گشت. به علاوه همگرایی، پایداری، آنالیز خطای روش و همچنین وجود و یکتایی جواب نیز مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. به کمک محاسبه عدد شرط دیده شد که مساله خوش‌وضع بوده و بنابراین نسبت به آشفتگی پایدار است. زمان اجرای برنامه‌ها که پارامتری نسبتاً مهم در مسایل کاربردی است نیز محاسبه شد و در چندین جدول درج گشت. آزمون نسبت نیز به کار گرفته شد تا همگرایی روش مورد مطالعه بیش از پیش مشخص گردد. به علاوه، مشاهده شد که کران بالای قدرمطلق خطا به کمک افزایش مقادیر M و k کاهش پیدا می‌کند. علاوه بر آن، نتایج رضایت‌بخش حاصل شده از مثال‌های عددی در مقایسه با روش‌های شناخته‌شده دیگر نشان‌دهنده‌ی کاربردی بودن و دقت روش مورد مطالعه بود. همچنین با کمال تعجب دیدیم که در بسیاری از موارد به جواب دقیق مساله دست یافتیم، درحالی که روش‌های شناخته‌شده دیگر، به جوابی تقریبی برای مساله دست پیدا کردند. بنابراین نتیجه شد که استفاده از پایه جواب‌های موجک لژاندر به همراه روش بیان شده در بخش ۳ نتایج مناسبی را برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی از نوع اول دارد.

فهرست منابع

- [1] Akhiezer, N.I. and Glazman, I.M., 2013. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Courier Corporation.
- [2] Babolian, E. and Salimi Shamloo, A. 2008. Numerical solution of Volterra integral and integro-differential equations of convolution type by using operational matrices of piecewise constant orthogonal functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(2), pp. 495–508. doi.org/10.1016/j.cam.2007.03.007
- [3] Bazm, S., 2015. Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 275(c), pp.44-60. doi:10.1016/j.cam.2014.07.018
- [4] Conway, J.B., 2013. *A course in functional analysis*. Springer Science & Business Media.
- [5] Erfanian, M., Gachpazan, M. and Beiglo, H., 2015. Rationalized Haar wavelet bases to approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations with error analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 256(4), pp.304-312. doi:10.1016/j.amc.2015.05.010
- [6] Fazeli S., 2020. Numerical methods for solving nonlinear Volterra integro-differential equations based on Hermite-Birkhoff interpolation. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 10(2), pp.131-153. doi:10.22067/IJNAO.V10I2.85756
- [7] Ghomanjani, F., Farahi, M.H. and Pariz, N., 2017. A new approach for numerical solution of a linear system with distributed delays, Volterra delay-integro-differential equations, and nonlinear Volterra-Fredholm integral equation by Bezier curves. *Computational and applied mathematics*, 36(3), pp.1349-1365. doi:10.1007/s40314-015-0296-2
- [8] Hesameddini, E. and Riahi, M., 2019. Bernoulli Galerkin matrix method and its convergence analysis for solving system of Volterra Fredholm integro-differential equations. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43(4), pp.1203-1214. doi:10.1007/s40995-018-0584-y
- [9] Hsiao, G.C., Kopp, P. and Wendland, W.L., 1980. A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind. *Computing*, 25(2), pp. 89–130. doi.org/10.1007/BF02259638

- [10] Lepik, U., 2008. Solving differential and integral equations by the Haar wavelet method; revisited. *International Journal of Mathematics and Computation*, 1(8), pp.43-52.
- [11] Maleknejad, K. and Saeedipour, E., 2017. An efficient method based on hybrid functions for Fredholm integral equation of the first kind with convergence analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 304(c), pp.93-102. doi:10.1016/j.amc.2017.01.013
- [12] Maleknejad, K., Mollapourasl, R. and Alizadeh, M., 2007. Numerical solution of Volterra type integral equation of the first kind with wavelet basis. *Applied Mathematics and Computation*, 194(2), pp.400-405. doi:10.1016/j.amc.2007.04.031
- [13] Maleknejad, K., Nosrati, M. and Najafi, E., 2012. Wavelet Galerkin method for solving singular integral equations. *Computational & Applied Mathematics*, 31(2), pp.373-390. doi:10.1590/S1807-03022012000200009
- [14] Miller, K.S. and Ross, B., 1993. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley. DRID:1130282270123129216
- [15] Myint-U, T. and Debnath, L., 2007. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.
- [16] Nemati, S., 2015. Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations using Legendre collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 278(c), pp.29-36. doi:10.1016/j.cam.2014.09.030
- [17] Parand, K. and Rad, J., 2012. Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via collocation method based on radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9), pp.5292-5309. doi:10.1016/j.amc.2011.11.013
- [18] Patil, D.P., Shinde, P.D. and Tile, G.K., 202. Volterra integral equations of first kind by using Anuj transform. *International Journal of Advances in Engineering and Management*, 4(5), pp.917-920. doi:10.35629/5252-0405917920
- [19] Patil, D., Suryawanshi, Y. and Nehete, M., 2022. Application of Soham tranform for solving Volterra integral equations of first kind. *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology*, 9(4), pp.668-674. doi:10.17148/IARJSET.2022.94108
- [20] Phillips, M.G., 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer, NY.
- [21] Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F. 2007. *Numerical Mathematics*. Springer, NY.
- [22] Rivlin, T.J. 2003. *An Introduction to the Approximation of Functions*. Dover Publications, NY.
- [23] Sahu, P. and Saha Ray, S., 2017. A new Bernoulli Wavelet method for numerical solutions of non-linear weakly singular Volterra integro-differential equations. *International Journal of Computational Methods*, 14(3), pp.1750022. doi:10.1142/S0219876217500220



Matrix method with Legendre wavelets for solving some nonlinear integral equations of the first kind with error analysis and existence of the solution

Mohsen Riahi Beni^{(1) 2}

⁽¹⁾ Department of Mathematics, University of Saravan, Saravan, Iran

Communicated by: Morteza Ghachpazan

Received: 21 April 2024

Accepted: 8 November 2024

Abstract: Since most integral equations of the first kind are ill-posed, in this article we tried to present a method based on Legendre wavelets to solve some them. The proposed method is that at first all the components of the equation are expressed in matrix form based on Legendre wavelet functions, then these matrices are replaced in the main equation. This method, along with the collocation method, adjusts the equation to a system of algebraic equations, which can be solved by usual numerical or analytical methods. To show the convergence of the method, some computable error bounds are obtained by preparing some theorems and lemmas. Moreover, the stability analysis, the existence and uniqueness of the solution are investigated. Numerical results with comparisons are given to confirm the reliability of the proposed method. In practice, in order to check the stability, we calculated the condition number in the examples, and also the convergence rate was calculated and the convergence was displayed in graphs by the ratio test. The outcomes reveal that this method is very effective and more accurate than those of literature. Also, in many cases one can get the exact solution of the problem.

Keywords: Integral equation of first kind, Nonlinear equations, Legendre wavelets, Error analysis, Matrix method.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

²Corresponding author
(M. Riahi Beni) m.riahi@saravan.ac.ir