مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۴۸-۵۵

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2024.48150.2322

هموارى جوابهاى یک معادله پخش–واکنش در محیط متخلخل ناهمگن

مرتضی فتوحی [۱]

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۷/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱۸

چکیده: در این مقاله نظم جواب معادله پخش–واکنش $\Delta u(x) = u(x)|u(x)|^{\gamma(x)-1}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این معادله برای مدل‌سازی پخش گاز در یک محیط کاتالیزور متخلخل ناهمگن به‌کار می‌رود و توان $\gamma(x)$ می‌تواند تابعی ناپیوسته باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات پخش–واکنش، هموارى جواب، مرتبه کاهش جواب.

رده‌بندی ریاضی: 35B65; 35R05

۱ مقدمه

در این مقاله به بررسی جوابهای مینیم‌ساز تابع انرژی

$$\min_{u\in\mathcal{K}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{2}{1+\gamma(x)}|u(x)|^{1+\gamma(x)}\, dx \tag{۱.۱}$$

خواهیم پرداخت که $\mathcal{K} = \{u \in H^1(\Omega) : u = \phi \text{ on } \partial\Omega\}$ و ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ هموار و کران‌دار و شرط مرزی ϕ تابعی هموار است. این جوابها در معادله پخش–واکنش

$$\Delta u(x) = u(x)|u(x)|^{\gamma(x)-1}, \quad x \in \Omega, \tag{۲.۱}$$

صدق می‌کنند. چنین معادله‌ای برای مدل‌سازی پخش گاز با چگالی $u(x)$ در واکنش با یک کاتالیزور متخلخل، Ω، استفاده می‌شود، [۳]. تابع $\gamma(x)$ به سرعت (نرخ) واکنش شیمیایی وابسته است. سرعت واکنش تابعی از سطح تماس گاز با کاتالیزور است. هرچه سطح تماس بیشتر باشد، نرخ واکنش بیشتر خواهد شد و برعکس در نقاطی که سطح تماس کمتر است سرعت واکنش کمتر می‌شود. در محیطهای متخلخل سطح تماس به میزان تخلخل [۲] مرتبط است که نسبت فضای خالی محیط به کل را نشان می‌دهد. اگر گاز در یک محیط همگون که تخلخل آن در سرتاسر دامنه ثابت است پخش شود، $\gamma(x)$ یک تابع ثابت خواهد بود. در این پژوهش مدلی را در نظر می‌گیریم که میزان تخلخل کاتالیزور در نقاط مختلف متفاوت است و اجازه می‌دهیم که $\gamma(x)$ به‌صورت یک تابع تغییر کند.

در کاربرد، $u(x)$ به عنوان چگالی گاز در نقطه x تابعی مثبت است و سمت راست معادله (۲.۱) به‌صورت $u(x)^{\gamma(x)}$ خواهد بود. با این حال از آنجا که صورت مسئله (۲.۱) از نگاه ریاضی مسایل گسترده‌تری را شامل می‌شود در این مقاله به بررسی جوابهای این معادله خواهیم پرداخت.

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(M. Fotouhi) fotouhi@sharif.edu

[2] porosity

۲ مرور نتایج

مسئله (۲.۱) وقتی $\gamma(x) \equiv \gamma \in (0,1)$ ثابت است در منابع مختلفی بررسی شده و نظم جواب و سطوح تراز آن مورد مطالعه قرار گرفته است، [۱، ۲، ۵–۸]. با فرض $u \in H^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ که $2^* = 2n/(n-2)$ نتیجه می‌شود که سمت راست معادله (۲.۱) در فضای $L^p(\Omega)$ است ($p = 2^*/\gamma$) و جواب این معادله باید در فضای سوبولف $W^{2,p}(\Omega)$ قرار داشته باشد. بنابر قضیه نشاندن فضای سوبولف، $u \in L^q(\Omega)$ است که $q = np/(n-2p)$ و از معادله (۲.۱) خواهیم داشت $\Delta u \in L^{q/\gamma}$. با تکرار این استدلال به مرحله‌ای خواهیم رسید که $\Delta u \in L^s(\Omega)$ برای یک مقدار $s > n/2$ و در نتیجه باید $u \in C^1(\Omega)$.

با شروع از نظم $u \in C^1$ در رابطه (۲.۱) می‌دانیم که Δu در فضای هولدر $C^{0,\gamma}$ قرار دارد (حالتی که تابع γ ثابت است). به کمک تخمین‌های شاودر نظم $C^{2,\gamma}(\Omega)$ برای جواب معادله برقرار است. از این‌رو می‌توانیم به کمک نظریه‌های کلاسیک همواری جوابهای معادله دیفرانسیل فرض $u \in C^{2,\gamma}(\Omega)$ را برای جواب معادله (۲.۱) در نظر گرفت و به دنبال پاسخ به این سوال باشیم که آیا همواری بالاتری را برای جواب این معادله می‌توان متصور بود؟ در نقاطی که مقدار $u(x)$ ناصفر است، سمت راست معادله (۲.۱) در همسایگی آن نقطه تابعی هموار (و بلکه تحلیلی) از متغیر x است. در نتیجه جواب معادله، $u(x)$، تابعی هموار (تحلیلی) است. نتیجه مطالب فوق این است که پاسخ به سوال همواری جوابهای معادله (۲.۱) تنها در همسایگی نقاط $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ غیربدیهی است. آشکار است که در نقاط درونی این مجموعه که تابع جواب متحد با صفر است نکته خاصی برای بررسی ندارد. از این‌رو پژوهش محدود به بررسی در نقاط مرزی آن و حد فاصل با مجموعه نقاط غیرصفر می‌شود. این مجموعه را با نماد

$$\Gamma_0 := \partial\{x \in \Omega : |u(x)| \neq 0\},$$

نشان می‌دهیم. منظور از ∂A مرز مجموعه A است.

تعریف ۱.۲. مرتبه کاهش[3] تابع u در نقطه $x_0 \in \Gamma_0$ را که با $\mathcal{V}(x_0)$ نشان می‌دهیم سوپریمم مقادیر ν است که در رابطه زیر صدق کند:

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}}{r^\nu} < +\infty.$$

وقتی $\gamma(x) \equiv \gamma \in (0,1)$ تابع ثابت است و $u \geq 0$، نشان داده شده است که مرتبه کاهش آن در همه نقاط Γ_0 برابر مقدار ثابت $\kappa = 2/(1-\gamma)$ است، [۸]. در [۱] برای جوابهایی که مقادیر مثبت و منفی می‌گیرند، نشان داده شده است که $\mathcal{V}(x_0) \in \{1, 2, \cdots, \lfloor\kappa\rfloor, \kappa\}$. منظور از $\lfloor\kappa\rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از κ است. مقدار κ بزرگترین عددی است که به عنوان مرتبه کاهش یک جواب (۲.۱) می‌توان تصور نمود. به‌عنوان مثال خانواده توابع

$$\mathbb{H} := \{x \mapsto \alpha \max(x\cdot\nu)^\kappa : \nu \in \mathbb{R}^n \text{ is a unit vector}\}$$

برای $\alpha = (\kappa(\kappa-1))^{-\kappa/2}$ در معادله صدق می‌کنند و مرتبه کاهش آنها برابر κ است. اعضای $\mathbb{H}$ را جواب نیم-صفحه[4] می‌نامند.

در خصوص همواری مجموعه Γ_0 در [۸] ثابت شده است که وقتی $u \geq 0$، بعد هاسدورف $n-1$ مجموعه Γ_0 متناهی است. این نتیجه منجر به این می‌شود که بتوانیم در زیرمجموعه‌ای از Γ_0 بردار عمود بر آن را به معنای ضعیف تعریف کنیم که آن را با Γ_{red} نشان می‌دهیم. به‌علاوه اندازه $(n-1)$-هاسدورف $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{\mathrm{red}}$ صفر خواهد بود. همچنین در [۲] ثابت می‌شود که قسمت صاف[5] Γ_{red} یک رویه $C^{1,\mu}$ است برای یک مقدار مثبت μ وابسته به γ و n. برای تعریف صاف بودن یک رویه ابتدا باید یک ابزار کاربردی در آنالیز همواری سطوح تراز جوابهای یک معادله دیفرانسیل را تعریف کنیم.

تعریف ۲.۲. اگر $x_0 \in \Gamma_0$ یک نقطه روی سطح تراز صفر جواب معادله باشد، تغییر مقیاس جواب به شکل زیر را بزرگنمایی[6] آن جواب در نقطه x_0 می‌نامند:

$$u_{r,x_0}(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^{\mathcal{V}(x_0)}}.$$

نقاطی از Γ_0 را صاف گوییم هرگاه در آن نقاط، بزرگنمایی‌های جواب وقتی $r \to 0$ به یک جواب نیم-صفحه در $\mathbb{H}$ همگرا می‌شود.

---
[3] vanishing order
[4] half-plane
[5] flat
[6] blow-up

آنالیز نظم $\Gamma_\circ$ برای جوابهایی که لزوماً مثبت نیستند پیچیده‌تر است. با تعریف نماد

$$\Gamma_\kappa := \{x \in \Gamma_\circ : \mathcal{V}(x) = \kappa\},$$

در [۶، ۷] نشان داده شده است زیرمجموعه صاف Γ_κ یک رویه $C^{1,\mu}$ است. همچنین در [۵] تحلیلی بودن این بخش از سطح تراز اثبات شده است.

قصد داریم در این مقاله اولین گام را برای بررسی حالتی برداریم که توان $\gamma(x)$ در معادله (۲.۱) تابع ثابت نیست. دقت کنید که در این مقاله هیچ گونه فرض پیوستگی برای توان $\gamma(x)$ نخواهیم داشت. در بخش بعدی ابتدا وجود و یکتایی جواب را اثبات می‌کنیم. پس از آن در بخش ۴ به مطالعه مرتبه کاهش جواب خواهیم پرداخت.

۳ وجود و یکتایی جواب

در این بخش به روش مستقیم حساب تغییرات وجود جواب را اثبات می‌کنیم. در ادامه یکتایی جواب را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. برای هر تابع اندازه‌پذیر، نامنفی و کران‌دار $\gamma \in L^\infty(\Omega)$، مسئله مینیمم‌سازی (۱.۱) دارای جوابی یکتا است که در معادله (۲.۱) صدق می‌کند.

اثبات. برای اثبات تنها کافی است نشان دهیم تابعک

$$J(u) := \int_\Omega F(\nabla u, u, x)\, dx$$

اجباری[7] و به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است که

$$F(p, u, x) = |p|^2 + \frac{1}{1+\gamma(x)}|u|^{1+\gamma(x)}.$$

با توجه به علامت تابع γ نامساوی $J(u) \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ و در نتیجه خاصیت اجباری برقرار است. شرط نیم‌پیوستگی پایینی نتیجه یک قضیه کلاسیک است چراکه $F(p, u, x)$ نسبت به p محدب و کاراتئودری است یعنی، برای هر مقدار x نسبت به (u, p) پیوسته و برای هر u و p نسبت به x اندازه‌پذیر است.

یکتایی جواب هم، نتیجه مستقیم تحدب است. چراکه اگر $u, v \in \mathcal{K}$ هر دو جواب مسئله مینیمم‌سازی (۱.۱) باشند، آنگاه $J(u) = J(v) = \min_{\mathcal{K}} J$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\min_{\mathcal{K}} J \leq J\left(\frac{u+v}{2}\right) &= \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|^2 + \frac{1}{1+\gamma(x)}\left|\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|^{1+\gamma(x)} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) + \frac{1}{2+2\gamma(x)}\left(|u|^{1+\gamma(x)} + |v|^{1+\gamma(x)}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(J(u) + J(v)\right) = \min_{\mathcal{K}} J.
\end{aligned}$$

بنابراین در خط دوم عبارت بالا باید تساوی برقرار باشد که نتیجه آن $\nabla u(x) = \nabla v(x)$ برای تقریباً هر $x \in \Omega$ است. از این‌رو تابع $u - v$ در Ω ثابت است و با توجه به شرط مرزی تعریف شده در مجموعه $\mathcal{K}$ نتیجه خواهد شد که $u - v \equiv 0$ در Ω.

برای اینکه نشان دهیم مینیمم‌ساز (۱.۱) در معادله (۲.۱) صدق می‌کند، کافی است از تابع انرژی J مشتق بگیریم. اگر $u \in \mathcal{K}$ مینیمم‌ساز و $\psi \in H^1_\circ(\Omega)$ دلخواه باشد، آنگاه

$$0 = \frac{d}{dt} J(u + t\psi)\big|_{t=0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi + |u|^{\gamma - 1} u \psi \, dx,$$

که نشان می‌دهد u جواب ضعیف (۲.۱) است. □

[7] coercive

همان‌طور که در قضيه قبل ديديم جوابهاى (۱.۱) در (۲.۱) صدق مى‌کنند. قضيه زير برعکس اين مطلب را نشان مى‌دهد.

قضيه ۲.۳. براى هر تابع اندازه‌پذير، نامنفى و کران‌دار $\gamma \in L^\infty(\Omega)$، معادله (۲.۱) با شرط مرزى $u = \phi$ روى $\partial\Omega$ داراى جواب يکتا است. در نتيجه هر جواب آن يک مينيمم‌ساز (۱.۱) است.

اثبات. فرض کنيد $u, v \in \mathcal{K}$ دو جواب (۲.۱) باشند. از اين‌رو براى هر $\psi \in H_0^1(\Omega)$ داريم:

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega |u|^{\gamma(x)-1} u\psi\, dx,$$

و

$$-\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega |v|^{\gamma(x)-1} v\psi\, dx.$$

از تفاضل اين دو رابطه و قرار دادن $\psi = u - v$ خواهيم داشت:

$$-\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2\, dx = \int_\Omega (|u|^{\gamma(x)-1}u - |v|^{\gamma(x)-1}v)(u-v)\, dx. \tag{۱.۳}$$

از آنجا که براى هر x ثابت، تابع $u \mapsto |u|^{\gamma(x)-1}u$ صعودى است، بنابراين سمت راست (۱.۳) مثبت است و در نتيجه $\nabla(u-v) \equiv 0$ در Ω. با توجه به شرط مرزى نتيجه مى‌گيريم که $u = v$. □

اين بخش را با اثبات اصل ماکسيمم براى معادله (۲.۱) به پايان مى‌رسانيم.

گزاره ۳.۳. هر جواب (۲.۱) داراى خاصيت اصل ماکسيمم است، يعنى

$$\max_{\partial\Omega} |\phi| = \sup_\Omega |u|.$$

اثبات. اگر $u^+ = \max(u, 0)$ و $u^- = \max(-u, 0)$، نشان مى‌دهيم

$$\Delta u^\pm \geq 0,$$

و از اصل ماکسيمم کلاسيک گزاره اثبات مى‌شود.

تابع هموار و صعودى η_ε را در نظر بگيريد که براى $t \leq 0$ داشته باشيم $\eta_\varepsilon(t) = 0$ و همچنين $\eta_\varepsilon(t) = 1$ براى $t \geq \varepsilon$. بنابر تعريف جواب ضعيف (۲.۱) مى‌دانيم

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega |u|^{\gamma(x)-1} u\psi\, dx,$$

براى هر تابع آزمون $\psi \in H_0^1(\Omega)$. در اين رابطه به جاى ψ قرار دهيد $\psi\eta_\varepsilon(u)$. خواهيم داشت:

$$\int_\Omega |u|^{\gamma(x)-1} u\psi\eta_\varepsilon(u)\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \left(\eta_\varepsilon(u)\nabla\psi + \psi\eta'_\varepsilon(u)\nabla u\right)\, dx.$$

با توجه به صعودى بودن η_ε و در حالتى که تابع آزمون ψ نامنفى است، وقتى $\varepsilon \to 0$ رابطه زير به‌دست مى‌آيد:

$$0 \leq \int_\Omega (u^+)^{\gamma(x)}\psi\, dx \leq -\int_\Omega \nabla u^+ \cdot \nabla\psi\, dx,$$

که معناى ضعيف $\Delta u^+ \geq (u^+)^\gamma \geq 0$ است. به‌طور مشابه رابطه $\Delta u^- \geq 0$ نيز اثبات مى‌شود. □

۴ مرتبه کاهش جواب

در این بخش به هدف مطالعه مرتبه کاهش جوابهای (۲.۱) قضیه زیر را اثبات می‌کنیم. ابتدا باید نماد زیر را تعریف کنیم:

$$\gamma_-(x_\circ) = \liminf_{x\to x_\circ} \operatorname{ess} \gamma(x) := \lim_{r\to\circ} \left(\sup\{a : |\{\gamma < a\} \cap B_r(x_\circ)| = \circ\}\right),$$
$$\gamma_+(x_\circ) = \limsup_{x\to x_\circ} \operatorname{ess} \gamma(x) := \lim_{r\to\circ} \left(\inf\{a : |\{\gamma > a\} \cap B_r(x_\circ)| = \circ\}\right),$$

که منظور از $|A|$ اندازه لبگ n-بعدی مجموعه A است.

قضیه ۱.۴. برای هر تابع اندازه‌پذیر، نامنفی و کران‌دار $\gamma \in L^\infty(\Omega)$، اگر $u \in \mathcal{K}$ یک جواب (۲.۱) باشد و $x_\circ \in \Gamma_\circ$، آنگاه

- اگر $\gamma_-(x_\circ) \geq ۱$، آنگاه $\mathcal{V}(x_\circ) \in \mathbb{N}$.
- اگر $\circ < \gamma_-(x_\circ) \leq \gamma_+(x_\circ) < ۱$، آنگاه

$$\mathcal{V}(x_\circ) \in \{۱, ۲, \cdots, \lfloor\kappa_-\rfloor\} \cup [\kappa_-, \kappa_+],$$

که $\kappa_\pm = ۲/(۱ - \gamma_\pm(x_\circ))$.

اثبات. ابتدا توجه کنید بنابر گزاره ۳.۳ داریم $u \in L^\infty(\Omega)$ و بنابراین

$$|\Delta u| \leq ۱ + \|u\|_\infty^{\|\gamma\|_\infty}.$$

در نتیجه $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ و بنابر قضیه کالدرون-زیگموند $u \in W^{۲,p}(\Omega)$ برای هر $p < \infty$. به علاوه از قضایای نشاندن فضای سوبولف نتیجه می‌شود که $u \in C^{۱,\mu}$ برای هر $\mu < ۱$.
مقدار دلخواه $\gamma_- \in (\circ, \gamma_-(x_\circ))$ را انتخاب کنید. سپس گوی $B_r(x_\circ)$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$\gamma(x) \geq \gamma_-, \qquad |u(x)| \leq ۱ \qquad \text{ت.هـ}\ x \in B_r(x_\circ).$$

اکنون اگر $\nabla u(x_\circ) \neq \circ$ خواهیم داشت $\mathcal{V}(x_\circ) = ۱$. در حالتی که $\nabla u(x_\circ) = \circ$ تخمین

$$|u(x)| \leq C_\circ |x - x_\circ|^{s_\circ}$$

برای $s_\circ = ۱ + \mu$ برقرار است. در نتیجه

$$|\Delta u(x)| \leq |u|^{\gamma_-} \leq C_\circ^{\gamma_-} |x - x_\circ|^{s_\circ \gamma_-}.$$

بنابر لم ۳-۱ در [۴] چندجمله‌ای هارمونیک $P(x)$ با درجه $[s_\circ \gamma_-] + ۲$ وجود دارد که $u = P + w$ و

$$|w(x)| \leq C_۱ |x - x_\circ|^{۲ + s_\circ \gamma_-}.$$

بنابراین u در نقطه $x_\circ$ یک تابع C^k است برای $k = \operatorname{degP}$. اگر $D^۲ P(x_\circ) = D^۲ u(x_\circ) \neq \circ$ آنگاه $\mathcal{V}(x_\circ) = ۲$. همین‌طور $\mathcal{V}(x_\circ) \in \{۲, \cdots, k\}$ مگر اینکه $P \equiv \circ$. در این صورت $u = w$ و در نتیجه

$$|u(x)| \leq C_۱ |x - x_\circ|^{s_۱},$$

که $s_۱ = ۲ + s_\circ \gamma_-$. به راحتی با استقراء خواهیم دید که برای دنباله بازگشتی

$$s_{k+۱} = ۲ + s_k \gamma_-$$

یا $\mathcal{V}(x_\circ) \in \{۲, \cdots, [s_k]\}$ یا اینکه $|u(x)| \leq C_k |x - x_\circ|^{s_k}$. دقت کنید اگر $\gamma_- < ۱$ خواهیم داشت $۲/(۱ - \gamma_-) > s_{k+۱} > s_k$، (توجه کنید $s_\circ = ۱ + \mu < ۲ < ۲/(۱ - \gamma_-)$). همچنین داریم

$$\lim_{k\to\infty} s_k = ۲/(۱ - \gamma_-).$$

در نتیجه حتماً برای یکی از این مقادیر خواهیم داشت $s_k > \lfloor \frac{۲}{۱-\gamma_-} \rfloor$ و چون γ_- هر مقدار کوچکتر از $\gamma_-(x_\circ)$ می‌توانست باشد، از این‌رو برای لااقل یکی اعضای این دنباله $s_k > \lfloor \kappa_- \rfloor$. در حالت $\gamma_- \geq ۱$ به وضوح $s_k \to \infty$ و از این‌رو قسمت اول قضیه به‌راحتی نتیجه می‌شود.

برای قسمت دوم قضیه اگر

$$\mathcal{V}(x_\circ) \notin \{۱, ۲, \cdots, \lfloor \kappa_- \rfloor\},$$

از مطالب بالا نتیجه می‌شود که $|u(x)| \leq C_k |x - x_\circ|^{s_k}$. بنابراین $\mathcal{V}(x_\circ) \geq s_k$ و در حالت حدی $\mathcal{V}(x_\circ) \geq \kappa_-$. لم بعدی نشان می‌دهد که $\mathcal{V}(x_\circ) \leq \kappa_+$ و اثبات کامل می‌شود. □

لم ۲.۴. با شرایط قضیه ۱.۴ اگر $\gamma_+(x_\circ) < ۱$ آنگاه ثابت c تنها وابسته به n و κ_+ وجود دارد که

$$\sup_{B_r(x_\circ)} |u| \geq c r^{\kappa_+},$$

و در نتیجه $\mathcal{V}(x_\circ) \leq \kappa_+$.

اثبات. مقدار دلخواه $۱ > \gamma_+ > \gamma_+(x_\circ)$ و گوی $B_r(x_\circ)$ را انتخاب کنید به‌طوری که

$$\gamma(x) \leq \gamma_+, \qquad |u(x)| \leq ۱ \qquad \text{ت.هـ}\ x \in B_r(x_\circ).$$

قرار دهید $v(x) = |u(x)|^{۱-\gamma_+}$، آنگاه

$$\Delta v = (۱-\gamma_+)|u|^{\gamma(x)-\gamma_+} - \frac{\gamma_+}{۱-\gamma_+}\frac{|\nabla v|^۲}{v} \geq (۱-\gamma_+) - \frac{\gamma_+}{۱-\gamma_+}\frac{|\nabla v|^۲}{v}.$$

برای یک نقطه دلخواه $y \in \{|u| > \circ\}$ و نزدیک به $x_\circ$ تعریف کنید $w(x) = c|x-y|^۲$ که مقدار ثابت و کوچک c در ادامه مشخص می‌شود. برای تابع $h = v - w$ داریم

$$\mathcal{L}h := \Delta h + \frac{\gamma_+}{۱-\gamma_+}\left(\frac{\nabla(v+w)}{v}\cdot\nabla h - \frac{۴c}{v}h\right) \geq (۱-\gamma_+) - ۴c(\frac{n}{۲} + \frac{\gamma_+}{۱-\gamma_+}) \geq \circ$$

به شرط آنکه مقدار c به اندازه کافی کوچک باشد. اکنون اصل ماکسیمم را برای عملگر $\mathcal{L}$ به‌کار ببرید. h نمی‌تواند ماکسیمم خود را داخل ناحیه $B_r(y) \cap \{|u| > \circ\}$ بگیرد. اما $h \leq \circ$ روی $\partial\{|u| > \circ\}$ و از این‌رو باید ماکسیمم خود را روی $\partial B_r(y)$ بگیرد. در نتیجه

$$\sup_{\partial B_r(y)\cap\{|u|>\circ\}} (v-w) \geq v(y) \geq \circ,$$

که منجر می‌شود به

$$\sup_{\partial B_r(y)\cap\{|u|>\circ\}} v \geq c r^۲.$$

اکنون $y \to x_\circ$ و سپس $\gamma_+ \to \gamma_+(x_\circ)$ تا اثبات کامل شود. □

فهرست منابع

[1] Aghajani, A., 2014. A two-phase free boundary problem for a semilinear elliptic equation. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society,* 40(5), pp.1067–1086.

[2] Alt, H.W. and Phillips, D., 1986. A free boundary problem for semilinear elliptic equations. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 368, pp.63–107. doi: 10.1515/crll.1986.368.63

[3] Aris, R., 1975. *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts*, Oxford University Press.

[4] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., 1979. The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model. *Journal of Differential Equations,* 32(3), pp.335–356. doi: 10.1016/0022-0396(79)90038-x

[5] Fotouhi, M. and Koch, H., 2024. Higher regularity of the free boundary in a semilinear system. *Mathematische Annalen,* 388(4), pp.3897–3939. doi: 10.1007/s00208-023-02620-y

[6] Fotouhi, M. and Shahgholian, H., 2017. A semilinear PDE with free boundary. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 151, pp.145–163. doi: 10.1016/j.na.2016.11.019

[7] Fotouhi, M. and Shahgholian, H. and Weiss, G. S., 2021. A free boundary problem for an elliptic system. *Journal of Differential Equations*, 284, pp.126–155. doi: 10.1016/j.jde.2021.02.050

[8] Phillips, D., 1983. Hausdoff measure estimates of a free boundary for a minimum problem, *Communications in Partial Differential Equations*, 8(13), pp.1409–1454. doi: 10.1080/03605308308820309

Regularity of a Reaction-Diffusion Equation in Inhomogeneous Porous Media

Morteza Fotouhi[8]

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 20 October 2024 Accepted: 8 November 2024

Abstract: In this paper, we study the reaction-diffusion equation

$$\Delta u(x) = |u(x)|^{\gamma(x)-1}u(x),$$

from a regularity point of view. This equation is used for modeling the distribution of a gas in an inhomogeneous porous catalyst. And the power $\gamma(x)$ can be a discontinuous function. In particular, we study the vanishing order of solution near the zero level set $\{u = 0\}$.

Keywords: Reaction-Diffusion Equations, Regularity of solution, Vanishing order of solution.

---

[8]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Fotouhi) fotouhi@sharif.edu