



منحنی گسترنده تعمیم‌یافته و خواص آن

مصطفی سالاری نوقابی^(۱) و اسماعیل عزیزپور^(۲)

^(۱) دانشکده ریاضی، دانشگاه فدرال ویچوزا، برزیل
^(۲) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

دبیر مسئول: مهدی نجفی خواه

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۰

چکیده: ما در این مقاله ضمن ارائه تعمیمی از گسترنده یک منحنی در صفحه، به مطالعه هندسه آن می‌پردازیم. منحنی در صفحه γ با انحنا k را در نظر بگیرید. اگر f تابع هموار و حقیقی مقدار باشد در این صورت منحنی فضایی γ_f را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که تعمیم گسترنده γ باشد. فرایند دستیابی به این منحنی از طریق معرفی رویه زاویه‌ای می‌باشد. در قضیه ۲.۳ نشان داده شده که نقاط تکینگی γ_f متناظر با نقاط راسی γ بوده و مستقل از انتخاب تابع f هستند. در چنین نقاطی، منحنی تعمیم‌یافته دارای تکینگی از نوع کاسپ معمولی است اگر و تنها اگر منحنی γ در $s = s_0$ دارای راس معمولی باشد. همچنین در ادامه، تماس منحنی گسترنده تعمیم‌یافته γ_f با کره و صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این با معرفی نوعی منحنی موازی، خواص هندسی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تکینگی توابع دیفرانسیل‌پذیر، منحنی، تخت‌شوندگی.

رده‌بندی ریاضی: 57R45; 53A04

۱ مقدمه

هندسه دیفرانسیل منحنی‌ها و رویه‌ها در فضای \mathbb{R}^n یک موضوع کلاسیک است که معمولاً شهود هندسی را با تجزیه و تحلیل مرتبط می‌کند و به این دلیل بسیاری از ریاضیدانان و کاربران ریاضیات را مجذوب خود کرده است. معمولاً ویژگی‌های هندسی روی سطوح در فضای اقلیدسی می‌توانند با انواع تکینگی‌های برخی توابع و نگاشت‌های روی سطح به تصویر کشیده شوند. در سال‌های گذشته و با آشکار شدن ایده‌ها و تکنیک‌های نظریه تکینگی و جبهه‌های موج، زمینه

^۱ نویسنده مسئول مقاله

بروز ابزارهای قدرتمندی برای کشف قضایای جدید در هندسه دیفرانسیل منحنی‌ها و سطوح فراهم شده است. یکی از این ابزارها پوش خانواده‌ای از سطوح می‌باشد. به‌طور دقیق‌تر فرض کنید $F: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خانواده‌ای r پارامتری از نگاشت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ باشد. پوش خانواده F مجموعه

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \in \mathbb{R}^n, F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0\}$$

می‌باشد. به‌عنوان مثال، پوش خانواده خطوط نرمال یک منحنی در صفحه، گسترده آن منحنی می‌باشد (برای اطلاعات بیشتر درباره پوش خانواده‌ای از سطوح [۱] را بنگرید).

رویه کانونی یک منحنی در فضای اقلیدسی، پوش خانواده صفحات نرمال آن منحنی است. مطالعه رویه کانونی یک منحنی می‌تواند اطلاعات هندسی مفیدی در مورد آن منحنی و برعکس ارائه دهد. اهمیت منحنی‌های در صفحه و فضا در شاخه‌های مختلف مهندسی، انگیزه خوبی برای مطالعه آنها ایجاد می‌کند.

به‌دست آوردن یک منحنی جدید از یک منحنی منظم داده شده ابزار مهمی است که در گرافیک کامپیوتری و طراحی به کمک کامپیوتر استفاده می‌شود. نمونه‌هایی از آن، منحنی افست به منحنی در صفحه و یک منحنی کانونی یکتا از یک منحنی فضایی منظم است.

ما در این مقاله ضمن ارائه تعمیمی از یک منحنی در صفحه، به مطالعه هندسه آن می‌پردازیم. برای توضیح بیشتر در خصوص منحنی تعمیم‌یافته از منحنی گسترده [۴، ۹] را ببینید. فرض کنید منحنی $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ که در آن I بازه بازی در \mathbb{R} است، یک منحنی پارامتری شده با سرعت واحد بوده و انحناء $(\kappa_{1\alpha})$ و تاب $(\kappa_{2\alpha})$ آن در هر نقطه، غیر صفر باشد. در این صورت منحنی یکتای

$$\theta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa_{1\alpha}(t)} N_\alpha(t) + \left(\frac{1}{\kappa_{1\alpha}(t)} \right)' \frac{1}{\kappa_{2\alpha}(t)} B_\alpha(t),$$

که در آن $N_\alpha(t)$ و $B_\alpha(t)$ به ترتیب بردارهای نرمال و بی‌نرمال α در t می‌باشند را منحنی کانونی (گسترده) α می‌نامیم [۹]. توجه کنید که در طی این مقاله علامت "′" نماد مشتق نسبت به پارامتر داده شده می‌باشد. ارتباط بین انحناء و تاب θ یعنی به ترتیب $\kappa_{1\theta}$ و $\kappa_{2\theta}$ و انحناء و تاب α توسط رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\kappa_{1\theta}}{|\kappa_{2\alpha}|} = \frac{|\kappa_{2\theta}|}{\kappa_{1\alpha}} = \frac{1}{\left| \left(\left(\frac{1}{\kappa_{1\alpha}(t)} \right)' \frac{1}{\kappa_{2\alpha}(t)} \right)' + \frac{1}{\kappa_{1\alpha}(t)} \kappa_{2\alpha} \right|}.$$

منحنی کانونی برخی از منحنی‌های منظم در [۳] و [۵] بررسی شده است. می‌توان تعبیر هندسی برای منحنی کانونی یک منحنی داده شده (منحنی پایه) را این‌چنین بیان کرد که منحنی کانونی، مکان هندسی مراکز کره‌های بوسان در نقاط روی منحنی پایه است.

مفهوم هندسی دیگری که در این مقاله مورد توجه قرار می‌گیرد منحنی‌های موازی با منحنی پایه است (در برخی از متون منحنی‌های موازی را جبهه‌های موج می‌نامند). منظور ما از منحنی‌های موازی منحنی‌هایی است که در فاصله معینی از منحنی پایه قرار دارند. ایجاد جبهه‌های موج روی یک منحنی یا رویه پارامتری شده اهمیت زیادی در حوزه صنعت دارد. ایده اصلی استفاده شده در این مقاله به شرح زیر است. منحنی در صفحه γ با انحناء κ را در نظر بگیرید. اگر f تابع هموار و حقیقی مقدار باشد در این صورت منحنی فضایی γ_f را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که تعمیم گسترده γ باشد. به عبارت دیگر تحت شرایط خاص همان منحنی گسترده پایه باشد. فرایند دستیابی به این منحنی از طریق معرفی رویه زاویه‌ای و بررسی نقاط تکینگی آن رویه می‌باشد. (مطالعه این رویه زاویه‌ای و بررسی برخی از خواص هندسی آن در کار بعدی انجام می‌شود). در قضیه ۲.۳ نشان داده شده که نقاط تکینگی γ_f متناظر با نقاط راسی γ بوده و مستقل از انتخاب تابع f است. در چنین نقاطی، منحنی تعمیم‌یافته دارای تکینگی از نوع کاسپ معمولی است. همچنین در قضیه ۵.۳ تماس منحنی γ و کره S^2 بررسی شده است. علاوه بر این در قضایای ۶.۳ و ۷.۳ تماس منحنی گسترده تعمیم‌یافته γ_f با کره و صفحه مطالعه شده است. در بخش ۴، منحنی‌های موازی با منحنی پایه γ مورد بررسی قرار می‌گیرد و به‌طور خاص در قضیه ۵.۴ نشان می‌دهیم که منحنی‌های موازی تعمیم‌یافته از یک منحنی منظم دارای یک تکینگی کاسپ معمولی در نقاط منظم روی گسترده تعمیم‌یافته هستند و همچنین این تکینگی‌ها از نوع (۳، ۴) است چنانچه منحنی مبدا دارای راسی از مرتبه ۲ باشد.

۲ هندسه منحنی‌ها

فرض کنید I یک بازه باز در \mathbb{R} باشد. منحنی فضایی پارامتری شده $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. معمولاً هندسه منحنی‌های فضایی را می‌توان با تجزیه و تحلیل تماس آن منحنی‌ها با رویه‌های در فضای \mathbb{R}^3 توصیف کرد. بطور دقیق‌تر فرض کنید $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار بوده و \circ مقدار منظم آن باشد از این رو $F^{-1}(\circ)$ یک رویه منظم در \mathbb{R}^3 می‌باشد. تابع $g(t) = F \circ \gamma$ را تابع تماس منحنی γ با رویه $F^{-1}(\circ)$ می‌نامیم.

تعریف ۱.۲. با توجه به توضیحات فوق می‌گوییم منحنی فضایی γ و $F^{-1}(\circ)$ دارای k -نقطه تماسی (نقطه تماسی از مرتبه k) در $t = t_0$ می‌باشند هرگاه برای تابع

$$g(t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = F(\gamma(t))$$

داشته باشیم

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = \circ, \quad g^{(k)}(t_0) \neq \circ.$$

تعریف فوق را می‌توان برای هر منحنی و هر رویه در \mathbb{R}^n تعمیم داد. در مثال زیر تماس یک منحنی در \mathbb{R}^n با رویه‌های خاصی داده شده است.

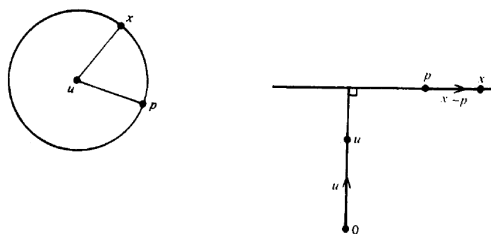
مثال ۲.۲. فرض کنید u و p نقاطی در \mathbb{R}^n باشند و دو مجموعه متشکل از نقاط x در \mathbb{R}^n را در نظر بگیرید که این نقاط به وسیله معادلات $F_i(x) = \circ$ ($i = 1, 2$) تعریف می‌شوند به طوری که

$$F_1(x) = \|x - u\|^2 - \|u - p\|^2 \quad (1.2)$$

و

$$F_2(x) = (x - p) \cdot u. \quad (2.2)$$

توجه کنید که “ \cdot ” بیانگر ضرب داخلی متداول در \mathbb{R}^n است. برای $n = 2$ معادلات ۱.۲ و ۲.۲ به ترتیب دایره‌ای به مرکز u و گذرنده از p (به شرط $u \neq p$)، و (برای $u \neq \circ$) خط راست گذرنده از p و عمود بر u هستند (شکل ۱ را ببینید). همچنین برای $n = 3$ دایره تبدیل به کره و خط تبدیل به صفحه می‌شود. (در حالت کلی برای n ، از واژه‌های معمول، به ترتیب کره و ابرصفحه استفاده می‌شود).



شکل ۱: شکل سمت چپ: دایره به مرکز u و گذرنده از p ، شکل سمت راست: خط راست گذرنده از p و عمود بر u .

از آنجا که هندسه منحنی‌های در صفحه و فضا در صنعت و کامپیوتر بسیار حائز اهمیت می‌باشند از این رو در ادامه به معرفی هندسه این منحنی‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنید γ یک منحنی منظم در صفحه \mathbb{R}^2 بوده و k انحنای آن باشد.

الف) نقطه $p = \gamma(t_0)$ را یک نقطه عطف معمولی γ می‌گوییم چنانچه $\kappa(t_0) = 0$ باشد. همچنین p را نقطه عطف از مرتبه k می‌گوییم هرگاه

$$\kappa(t_0) = \kappa'(t_0) = \dots = \kappa^{(k-1)}(t_0) = 0, \quad \kappa^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

این تعریف را می‌توان با هندسه تماسی نیز بیان کرد. چنانچه منحنی γ و خط مماس بر منحنی در $t = t_0$ دارای تماس از مرتبه $k - 1$ باشند آنگاه p یک نقطه عطف از مرتبه k می‌باشد. برای توضیحات بیشتر به [۱] مراجعه شود.

ب) رأس معمولی ^۲ (متناظراً یک رأس از مرتبه‌ی بالاتر ^۳ یا تباهیده) نقطه‌ی $p = \gamma(t_0)$ از منحنی در صفحه‌ی γ ، است که به ازای آن یک دایره با κ نقطه تماسی (متناظراً حداقل κ نقطه تماسی) با منحنی در نقطه‌ی $t = t_0$ وجود داشته باشد. بطور معادل نقطه p یک نقطه راسی از مرتبه k است هرگاه

$$\kappa(t_0) \neq 0, \quad \kappa'(t_0) = \dots = \kappa^{(k)}(t_0) = 0, \quad \kappa^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنید γ یک منحنی منظم در فضای \mathbb{R}^3 باشد. توابع

$$K(t) = \|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2$$

و

$$\tau(t) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))$$

به ترتیب انحنای و تاب منحنی γ نامیده می‌شوند [۱۰، ۱۱].

در قضیه زیر ارتباط بین هندسه منحنی فضایی γ و تماس آن با خط و صفحه بررسی می‌شود.

قضیه ۵.۲ ([۲]). فرض کنید γ یک منحنی در فضا بوده و K و τ داده شده در فوق به ترتیب انحنای و تاب منحنی باشند. در این صورت K در t_0 صفر می‌شود اگر و فقط اگر γ تماسی از مرتبه‌ی حداقل ۲ با خط مماس اش در t_0 داشته باشد. با شرط اینکه $K(t_0) \neq 0$ باشد، آنگاه $\tau(t_0) = 0$ اگر و فقط اگر صفحه بوسان تماسی از مرتبه‌ی حداقل ۳ با γ در t_0 داشته باشد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $t_0 \in I$ و $n \geq 1$ باشد. می‌گوییم γ یک n -تخت‌شدگی در t_0 دارد اگر داشته باشیم:

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad \tau^{(i)}(t_0) = 0, \quad \tau^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

تعریف ۷.۲. اگر γ یک n -تخت‌شدگی در t_0 داشته باشد، می‌گوییم γ از نوع A است زمانی که $K(t_0) \neq 0$. همچنین می‌گوییم γ از نوع B است زمانی که $K(t_0) = 0$ باشد [۲].

۳ رویه‌های زاویه‌ای

فرض کنید I یک بازه از \mathbb{R} و f تابعی هموار باشد. منحنی

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s), 0), \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید که s پارامتر طول قوس، κ انحنای γ و $T_\gamma(s)$ و $N_\gamma(s)$ به ترتیب بردارهای مماس و نرمال منحنی در s باشند.

رویه $M : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید

$$M(s, \phi) = \gamma(s) + f(\kappa(s)) (\cos(\phi)N_\gamma(s) + \sin(\phi)\mathbf{u}) \quad (1.3)$$

که در آن $\phi \in [0, \pi]$ و $\mathbf{u} = (0, 0, \pm 1)$ و U مجموعه باز است. رویه M را رویه زاویه‌ای می‌نامیم.

تعریف ۱.۳. با جایگذاری $\phi = \arccos\left(\frac{1}{\kappa(s)f(\kappa(s))}\right)$ در رویه زاویه ای M ، یک منحنی بر روی این رویه تشکیل می شود که آن را منحنی تعمیم یافته γ نسبت به تابع هموار f می نامیم و آن را با γ_f نمایش می دهیم. دلیل این نامگذاری این است که برای تابع $f(x) = 1/x$ این منحنی همان گسترده منحنی γ یعنی منحنی $\gamma(t) + 1/\kappa(t)N_\gamma(t)$ می باشد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید γ منحنی منظمی در صفحه با انحنای $\kappa \neq 0$ بوده و f تابعی هموار باشد که برای آن داشته باشیم $f(\kappa)f'(\kappa) \neq 0$. چنانچه M رویه زاویه ای تعریف شده در فوق باشد آنگاه (s, ϕ) بیانگر یک نقطه تکینگی رویه M می باشد آن چنان که

$$\begin{cases} \kappa'(s) = 0, \\ f(\kappa(s))\kappa(s) \cos(\phi) = 1. \end{cases}$$

همچنین نقاط تکینگی منحنی تعمیم یافته γ_f متناظر با نقاط راسی γ است. در چنین نقاطی، منحنی تعمیم یافته دارای تکینگی از نوع کاسپ معمولی است اگر و تنها اگر منحنی γ در $s = s_0$ دارای راس معمولی باشد.

اثبات. با محاسبه $M_s \times M_\phi = 0$ نقاط تکینگی رویه به دست می آید.

$$\begin{aligned} M_s(s, \phi) &= \left(1 - \kappa(s) \cos(\phi) f(\kappa(s))\right) T_\gamma(s) \\ &\quad + \kappa'(s) f'(\kappa(s)) \left(\cos(\phi) N_\gamma(s) + \sin(\phi) \mathbf{u}\right), \\ M_\phi(s, \phi) &= f(\kappa(s)) \left(-\sin(\phi) N_\gamma(s) + \cos(\phi) \mathbf{u}\right). \end{aligned}$$

حاصل ضرب خارجی این دو بردار عبارت است از

$$\begin{aligned} M_s \times M_\phi &= \kappa'(s) f(\kappa(s)) f'(\kappa(s)) T_\gamma(s) \\ &\quad + \cos(\phi) f(\kappa(s)) \left(-\kappa(s) f(\kappa(s)) \cos(\phi) + 1\right) N_\gamma(s) \\ &\quad + \sin(\phi) f(\kappa(s)) \left(\kappa(s) f(\kappa(s)) \cos(\phi) - 1\right) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

بنابراین نقاط تکینگی با شرایط داده شده در صورت قضیه حاصل می شوند. اکنون با جایگذاری $\phi = \arccos\left(\frac{1}{\kappa(s)f(\kappa(s))}\right)$ در (۱.۳) منحنی تعمیم یافته γ_f بدست می آید که عبارت است از

$$\gamma_f(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N_\gamma(s) + f(\kappa(s)) \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\kappa(s)f(\kappa(s))}\right)\right) \mathbf{u}.$$

در ادامه برای راحتی کار پارامتر s حذف می شود. قرار دهید

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}\right)\right), \\ A &= B' = \left[\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}\right)\right)\right]' \\ &= -\frac{\kappa'(f(\kappa) + \kappa f'(\kappa))}{(\kappa f(\kappa))^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}\right)^2}}. \end{aligned}$$

حال با مشتقگیری از این منحنی داریم

$$\gamma_f'(s) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} N_\gamma(s) + (\kappa' f'(\kappa) B + f(\kappa) A) \mathbf{u}.$$

بنابراین اگر در $s_0 \in I$ ، داشته باشیم $\kappa'(s_0) = 0$ (یعنی γ در $s = s_0$ دارای یک راس باشد) آنگاه $\gamma_f(s_0)$ تکین است. برای تعیین نوع نقاط تکینگی منحنی گسترده تعمیم‌یافته، از مشتقات مرتبه دوم و سوم منحنی استفاده می‌کنیم. داریم

$$\gamma_f''(s) = -\frac{\kappa''\kappa - 2\kappa'^2}{\kappa^3}N_\gamma(s) + \kappa'T_\gamma(s) + \left(2\kappa'f'(\kappa)A + f(\kappa)\frac{\partial A}{\partial s} + (\kappa''f'(\kappa) + \kappa'^2f''(\kappa))B\right)\mathbf{u}.$$

همچنین $\gamma_f''' = \lambda_1T_\gamma + \lambda_2N_\gamma + \lambda_3\mathbf{u}$ که در آن

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\kappa'\kappa - 2\kappa'^2 + \kappa''\kappa}{\kappa^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{\kappa'\kappa^4 - \kappa''\kappa^2 - \kappa'^2\kappa + 4\kappa\kappa'\kappa'' + 3\kappa'^2\kappa - 6\kappa'^3}{\kappa^4} \\ \lambda_3 &= \left(\kappa'''f'(\kappa) + 3\kappa''\kappa'f''(\kappa) + \kappa'^2f'''(\kappa)\right)B + 3\left(\kappa''f'(\kappa) + \kappa'^2f''(\kappa)\right)A \\ &\quad + 3\kappa'f'(\kappa)\frac{\partial A}{\partial s} + f(\kappa)\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}.\end{aligned}$$

در این نقطه $\kappa'(s_0) = 0$ است و عبارات γ_f'' و γ_f''' در s_0 به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{aligned}\gamma_f'' &= -\frac{\kappa''}{\kappa^2}N_\gamma + \left(\kappa''f'(\kappa)B + \frac{\kappa''f(\kappa)(f(\kappa) + \kappa f'(\kappa))}{(\kappa f(\kappa))^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2 f(\kappa)^2}}}\right)\mathbf{u}, \\ \gamma_f''' &= \frac{\kappa'''}{\kappa}T_\gamma - \frac{\kappa''}{\kappa^2}N_\gamma + \left(\kappa'''f'(\kappa)B + f(\kappa)\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}\right)\mathbf{u}.\end{aligned}$$

آشکارا این دو بردار مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $\kappa''(s_0) \neq 0$. به عبارت دیگر زمانی که منحنی γ در $s = s_0$ دارای نقطه راسی معمولی باشد. \square

در نظریه تکینگی شناسایی انواع تکینگی نگاشتی هموار، کمک شایانی در بررسی رفتار موضعی آن در نقطه مورد نظر داشته و در بسیاری از مواقع مبین اطلاعات مفیدی از هندسه برخی از رویه‌ها می‌باشد. به عنوان مثال قضیه ۴.۳ در باب هندسه منحنی‌های در صفحه و نوع تکینگی تابع فاصله متناظر با آن منحنی در [۱] بیان شده است. برای این منظور لازم است ابتدا تکینگی‌های از نوع A_k برای یک تابع حقیقی مقدار را معرفی کنیم (تعریف ۳.۳ را ببینید).

تعریف ۳.۳. فرض کنید $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد. در این صورت، برای $k \geq 0$ تابع h را دارای تکینگی از نوع A_k در $t = t_0$ می‌نامیم هرگاه

$$\forall 0 \leq p \leq k, \quad h^{(p)}(t_0) = 0, \quad h^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

توجه داشته باشید که تکینگی از نوع A_k در t_0 فقط بدان معنی است که $h'(t_0) \neq 0$. همچنین h را از نوع $A_{\geq k}$ می‌نامیم چنانچه

$$\forall 0 \leq p \leq k, \quad h^{(p)}(t_0) = 0.$$

قضیه ۴.۳ ([۱]). منحنی در صفحه γ در نقطه $t = t_0$ دارای یک نقطه راسی معمولی (به ترتیب نقطه راسی تباهیده) است اگر و فقط اگر تابع فاصله متناظر با γ یعنی تابع

$$d = (\gamma(t) - x) \cdot (\gamma(t) - x),$$

در $t = t_0$ دارای تکینگی از نوع A_3 (به ترتیب $A_{\geq 3}$) باشد.

همان طور که در بخش ۲ اشاره شد برای بررسی هندسه خمها و رویهها در فضا، معمولاً تماس آنها را با رویه های شناخته شده بررسی می کنیم. در قضیه زیر با استفاده از تعاریف ۱.۲ و ۳.۳ تماس منحنی فضایی γ و کره واحد مورد بررسی قرار گرفته شده است. بدین منظور با توجه به تعریف ۱.۲، تابع تماس $g_a(s) = (\gamma(s) - a) \cdot (\gamma(s) - a)$ که در آن $a \in \mathbb{R}^3$ را استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۵.۳. با توجه به تعاریف بیان شده در فوق داریم

الف) تابع $g_a(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_1 است اگر و تنها اگر

$$a = \gamma(s_0) + r \left(\cos(\phi) N_\gamma(s_0) + \sin(\phi) \mathbf{u} \right), r \in \mathbb{R}.$$

ب) تابع $g_a(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_2 است اگر و تنها اگر

$$a = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0) \cos(\phi)} \left(\cos(\phi) N_\gamma(s_0) + \sin(\phi) \mathbf{u} \right).$$

پ) تابع $g_a(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_3 است اگر و تنها اگر

$$a = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0) \cos(\phi)} \left(\cos(\phi) N_\gamma(s_0) + \sin(\phi) \right) \mathbf{u}, \quad \kappa'(s_0) = 0.$$

اثبات. با مشتقگیری از تابع $g_a(s)$ نسبت به پارامتر s داریم

$$\frac{1}{\sqrt{}} g'_a(s) = T_\gamma(s) \cdot (\gamma(s) - a),$$

$$\frac{1}{\sqrt{}} g''_a(s) = \left(\kappa N_\gamma(s) \cdot (\gamma(s) - a) \right) + \mathbf{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{}} g'''_a(s) = \left(\kappa' N_\gamma(s) - \kappa^2 T_\gamma(s) \right) \cdot (\gamma(s) - a).$$

$$g'_a(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - a = \lambda N_\gamma(s) + \mu \mathbf{u}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \quad (3.3)$$

$$g'_a(s) = g''_a(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - a = \frac{-1}{\kappa} N_\gamma(s) + \mu \mathbf{u}, \quad (4.3)$$

$$g'_a(s) = g''_a(s) = g'''_a(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - a = \frac{-1}{\kappa} N_\gamma(s) + \mu \mathbf{u}, \quad \kappa' = 0. \quad (5.3)$$

توجه کنید که رابطه (۳.۳) به این معنی است که a در صفحه نرمال بر منحنی γ قرار دارد. همچنین بدیهی است که $r \in \mathbb{R}$ و $\phi \in [0, \pi]$ وجود دارند که $\lambda = r \cos(\phi)$ و $\mu = r \sin(\phi)$. بنابراین با جایگذاری λ و μ در عبارت های (۴.۳) و (۵.۳) نتایج قضیه برقرار است. \square

اکنون می خواهیم به بررسی تماس منحنی تعمیم یافته γ_f متناظر با منحنی در صفحه γ و تابع هموار f ، با کره و صفحه بپردازیم. بدین منظور همانند قبل برای بررسی تماس با کره واحد، تابع

$$g_a(t) = (\gamma_f(t) - a) \cdot (\gamma_f(t) - a),$$

را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. همچنین تماس منحنی γ_f با صفحه نیز از طریق مطالعه تابع ارتفاع

$$h_w(t) = \gamma_f(t) \cdot w,$$

که در آن $w \in \mathbb{R}^3$ برداری در فضا است، مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه ۶.۳. با توجه به تعاریف ذکر شده در فوق داریم:

الف) تابع $g_a(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_1 بوده اگر و تنها اگر مرکز کره (یعنی نقطه a) بر روی خط $\gamma_f - \lambda T_\gamma$ باشد. به عبارت دیگر

$$a = \gamma_f - \lambda T_\gamma, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

ب) تابع $g_a(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_2 بوده اگر و تنها اگر مرکز کره (یعنی نقطه a) بر روی خط $\gamma_f - \lambda T_\gamma$ بوده و منحنی γ در $s = s_0$ یک نقطه راسی معمولی داشته باشد.

اثبات. جهت سهولت در انجام محاسبات فرض کنید $B = \sin(\arccos(1/\kappa f(\kappa)))$ از این رو

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} g'_a(s) &= \left(T_\gamma - \frac{\kappa'}{\kappa^2} N_\gamma - T_\gamma + (\kappa' f'(\kappa) B + f(\kappa) B') \mathbf{u} \right) \cdot (\gamma_f - a) \\ &= \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} N_\gamma + (\kappa' f'(\kappa) B + f(\kappa) B') \mathbf{u} \right) \cdot (\gamma_f - a). \end{aligned}$$

همچنین به راحتی ثابت می شود که

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} g''_a(s) &= \left((\kappa'' f'(\kappa) B + (\kappa')^2 f''(\kappa) B + 2\kappa' f'(\kappa) B' + f(\kappa) B'') \mathbf{u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa' \kappa + 2(\kappa')^2}{\kappa^3} N_\gamma - \frac{\kappa'}{\kappa} T_\gamma \right) \cdot (\gamma_f - a) \\ &\quad + \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} N_\gamma + (\kappa' f'(\kappa) B + f(\kappa) B') \mathbf{u} \right) \cdot T_\gamma. \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} g'_a(s) = 0 &\Leftrightarrow \gamma_f - a = \lambda T_\gamma, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ g'_a(s) = g''_a(s) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_f - a = \lambda T_\gamma, \\ \kappa' = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۳. با توجه به تعاریف آورده شده در بالا داریم:

الف) تابع ارتفاع $h_w(s)$ تعریف شده در بالا، در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_1 است اگر و تنها اگر بردار w در راستای خط مماس بر منحنی γ قرار گیرد. به عبارت دیگر

$$w = \lambda T_\gamma \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

ب) تابع ارتفاع $h_w(s)$ در $s = s_0$ دارای تکینگی از نوع A_2 است اگر و تنها اگر بردار w در راستای خط مماس بر منحنی γ قرار گیرد و همچنین منحنی γ در $s = s_0$ دارای یک نقطه راسی معمولی باشد.

اثبات. اثبات این قضیه به راحتی با مشتق‌گیری از تابع ارتفاع $h_w(s)$ حاصل می گردد. از این رو جزئیات محاسبات حذف گردیده است. □

ملاحظه ۸.۳. منحنی گسترده تعمیم یافته γ_f ممکن است منحنی گسترده γ را قطع کند. این اتفاق زمانی رخ می دهد که مولفه سوم از منحنی برابر صفر باشد. با توجه به ضابطه منحنی باید $f(\kappa) \sin(\arccos(\frac{1}{\kappa f(\kappa)})) = 0$ تابع f صفر نیست در این صورت باید

$$\arccos\left(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}\right) = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

بنابراین $\kappa f(\kappa) = \pm 1$

مثال ۹.۳. سهمی

$$\begin{aligned} \gamma : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, t^2, 0), \end{aligned}$$

و تابع هموار $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 2/x$ را در نظر بگیرید. به راحتی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned} T_\gamma(t) &= \frac{(1, 2t, 0)}{(1 + 4t^2)^{1/2}} & \kappa(t) &= \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}} \\ B(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & N_\gamma(t) &= \frac{(-2t, 1, 0)}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

از این رو منحنی گسترده تعمیم یافته γ_f دارای پارامتری سازی زیر می باشد:

$$\gamma_f(t) = \left(-4t^3, \frac{1 + 5t^2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + 4t^2)^{3/2} \right).$$

از این رو

$$\begin{aligned} \gamma'_f(t) &= (\gamma_{f1}, \gamma_{f2}, \gamma_{f3}) = (-12t^2, 5t, 6\sqrt{3}t(1 + 4t^2)^{1/2}), \\ \gamma''_f(t) &= (\gamma_{f21}, \gamma_{f22}, \gamma_{f23}) = (-24t, 5, \frac{6\sqrt{3}(1 + 8t^2)}{(1 + 4t^2)^{1/2}}), \\ \gamma'''_f(t) &= (\gamma_{f31}, \gamma_{f32}, \gamma_{f33}) = (-24, 0, 8t(\frac{3}{1 + 4t^2})^{3/2}(3 + 8t^2)) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\gamma'_f \times \gamma''_f = (5t\gamma_{f23} - 5\gamma_{f13}, 12t(t\gamma_{f23} - 2\gamma_{f13}), 6 \cdot 0 \cdot t^2),$$

و انحنای γ_f در $t = 0$ برابر با صفر می باشد. همچنین تاب γ_f برابر با

$$\tau(t) = \det \begin{pmatrix} -12t^2 & 5t & \gamma_{f13} \\ -24t & 5 & \gamma_{f23} \\ -24 & 0 & \gamma_{f33} \end{pmatrix} = 6 \cdot 0 \cdot (t^2\gamma_{f33} - t\gamma_{f23} + 2\gamma_{f13}).$$

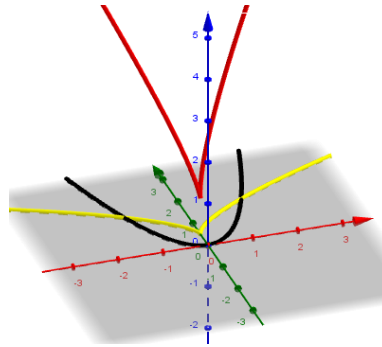
حال برای بررسی تخت شونگی منحنی $\gamma_f(t)$ ، می بینیم که $\tau(t)$ در نقاط

$$t_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} - 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} - 1$$

برابر صفر است. با توجه به اینکه τ' و K در هیچ یک از نقاط بالا صفر نیستند نتیجه می گیریم که منحنی $\gamma_f(t)$ دارای ۱- تخت شونگی از نوع A در این نقاط است. در شکل ۲ منحنی های γ ، گسترده و گسترده تعمیم یافته آن رسم شده اند.

مثال ۱۰.۳. فرض کنید $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ منحنی

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t, 0)$$



شکل ۲: گسترده تعمیم‌یافته: منحنی سیاه رنگ سهمی $\gamma(t)$ است، منحنی زرد رنگ گسترده آن است و منحنی قرمز رنگ گسترده تعمیم‌یافته آن یعنی γ_f است.

باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-2\sin t, \cos t, 0) \\ T_\gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2 t}}(-2\sin t, \cos t, 0), \\ N_\gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2 t}}(-\cos t, -2\sin t, 0), \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \\ \kappa'(t) &= \frac{-9\sin(2t)}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{5}{2}}}, \\ \kappa''(t) &= \frac{18}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{7}{2}}}(-9\sin^4(t) + 14\sin^2 t - 1).\end{aligned}$$

در حالت‌های زیر و بر حسب ضابطه تابع، منحنی تعمیم‌یافته را پیدا و رسم می‌کنیم.
الف) فرض کنید $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ در این صورت $\sin(\arccos(\frac{1}{\kappa f(\kappa)})) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

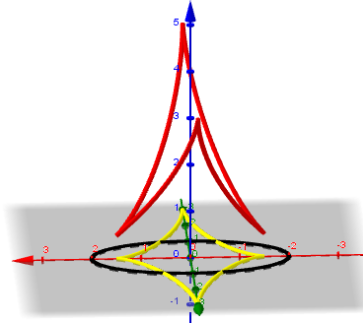
$$\begin{aligned}\gamma_f(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{\kappa}N_\gamma(t) + f(\kappa)\sin(\arccos(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}))\mathbf{u} \\ &= \left(\frac{3}{2}\cos^2 t, 3\sin^2 t, \frac{\sqrt{(1+3\sin^2 t)^3}}{2}\right)\end{aligned}$$

در شکل ۳ منحنی‌های γ ، گسترده آن و γ_f رسم شده‌اند.

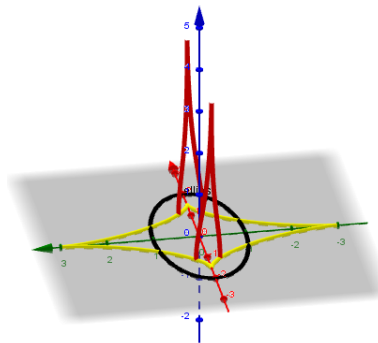
ب) فرض کنیم $f(x) = x^2$ در این صورت

$$\begin{aligned}\gamma_f(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{\kappa}N_\gamma(t) + f(\kappa)\sin(\arccos(\frac{1}{\kappa f(\kappa)}))\mathbf{u} \\ &= \left(\frac{3}{2}\cos^2 t, 3\sin^2 t, \left(\frac{2}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\right)^6}}\right)\end{aligned}$$

در شکل ۴ منحنی‌های γ ، گسترده آن و γ_f رسم شده‌اند.



شکل ۳: گسترده تعمیم یافته : منحنی سیاه رنگ بیضی $\gamma(t)$ است، منحنی زرد رنگ گسترده آن است و منحنی قرمز رنگ گسترش تعمیم یافته آن یعنی $\gamma_{\kappa}(t)$ است.



شکل ۴: گسترده تعمیم یافته : منحنی سیاه رنگ بیضی $\gamma(t)$ است، منحنی زرد رنگ گسترده آن است و منحنی قرمز رنگ گسترده تعمیم یافته آن یعنی γ_f است.

۴ منحنی‌های موازی (هم نهشتی خطی)

در این بخش به بررسی حالت خاصی از منحنی گسترده تعمیم‌یافته می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا لازم است خانواده منحنی‌های موازی با یک منحنی داده شده و در راستای برداری مفروض را تعریف نماییم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید α منحنی در فضای \mathbb{R}^n بوده و $w \in \mathbb{R}^n$ برداری داده شده باشد. معادله خط گذرنده از $\alpha(t)$ و در راستای بردار w را میتوان به صورت $l(t) = \alpha(t) + rw$ نمایش داد. منحنی $l(t)$ منحنی موازی با α در راستای بردار w نامیده می‌شود. حال چنانچه w خود نمایانگر منحنی $w(t)$ در فضا باشد آنگاه منحنی حاصله $l(t) = \alpha(t) + rw(t)$ را هم‌نهشتی خطی می‌نامیم.

توجه کنید در تعریف ۱.۴ با تغییر کردن r خانواده‌ای از منحنی‌های در فضا خواهیم داشت. مثال بسیار مشهور این دسته خانواده‌ها، جبهه‌های موج هستند که در فیزیک و مهندسی مخابرات بسیار مورد استفاده می‌باشند. در این بخش ما می‌خواهیم به نوعی هم‌نهشتی خطی برای منحنی در صفحه γ و در راستای منحنی $f(\kappa)(\cos(\phi)N_\gamma + \sin(\phi)\mathbf{u})$ را مورد بررسی قرار دهیم. آن را مجدداً با γ_f نامگذاری می‌کنیم. از این‌رو برای $r \in \mathbb{R}$ منحنی

$$\gamma_f(t) = \gamma(t) + rf(\kappa(t))(\cos(\phi)N_\gamma + \sin(\phi)\mathbf{u}),$$

را در نظر بگیرید. همان‌گونه که اشاره شد با تغییر کردن پارامترها می‌توان خانواده‌ی زیر را تعریف نمود.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & (1.4) \\ (t, \phi, r) &\mapsto \gamma_f \end{aligned}$$

قضیه ۲.۴. نقاط تکینگی نگاشت \mathcal{L} توسط مجموعه

$$\Sigma_{\mathcal{L}} = \{(t, \phi, r) \in \mathbb{R}^3 : r\kappa(t)f(\kappa(t))\cos(\phi) = 1\},$$

مشخص می‌گردد.

اثبات. با توجه به تعریف \mathcal{L} داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= (1 - r\kappa f(\kappa)\cos(\phi))T_\gamma + (r\kappa'f'(\kappa)\cos(\phi))N_\gamma + (r\kappa'f'(\kappa)\sin(\phi))\mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -rf(\kappa)\sin(\phi)N_\gamma + rf(\kappa)\cos(\phi)\mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= f(\kappa)\cos(\phi)N_\gamma + f(\kappa)\sin(\phi)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

درمیان \mathcal{L} برابر با $(1 - r\kappa f(\kappa)\cos(\phi))$ بوده و از این‌رو مجموعه نقاط تکینگی نگاشت \mathcal{L} برابر با

$$\Sigma_{\mathcal{L}} = \{(t, \phi, r) \in \mathbb{R}^3 : r\kappa(t)f(\kappa(t))\cos(\phi) = 1\},$$

□

می‌باشد.

حال با استفاده از قضیه ۲.۴ و با جایگذاری $\Sigma_{\mathcal{L}}$ در تعریف ۱.۴ به منحنی زیر می‌رسیم

$$\tilde{\gamma} := \mathcal{L}|_{\Sigma_{\mathcal{L}}} = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa\cos(\phi)}(\cos(\phi)N_\gamma + \sin(\phi)\mathbf{u}). \quad (2.4)$$

قضیه ۳.۴. $\tilde{\gamma}$ در نقطه $t = t_0$ دارای تکینگی از نوع $(2, 3)$ است اگر و فقط اگر γ_f برای هر تابع هموار f در $t = t_0$ دارای تکینگی از نوع $(2, 3)$ باشد.

اثبات. اثبات این قضیه با توجه به قضیه ۲.۳ و قضیه ۱۰.۲ از [۱۲] نتیجه می‌شود. □
در ادامه به معرفی نوعی از تکینگی در منحنی‌های در فضا می‌پردازیم.

تعریف ۴.۴. فرض کنید β یک منحنی در فضا باشد که در نقطه $t = t_0$ دارای تکینگی می‌باشد (یعنی $\beta'(t_0) = (0, 0, 0)$) این نقطه را یک تکینگی از نوع $(3, 4)$ می‌نامیم چنانچه بردارهای $\beta'''(t_0)$ و $\beta^{(4)}(t_0)$ مستقل خطی باشند.

قضیه ۵.۴. منحنی‌های موازی تعمیم‌یافته از یک منحنی منظم، دارای یک تکینگی کاسپ معمولی در نقاط منظم روی گسترده تعمیم‌یافته آن منحنی هستند. همچنین منحنی موازی تعمیم‌یافته دارای تکینگی از نوع $(3, 4)$ هستند چنانچه منحنی مبدا در آن نقطه دارای راسی از مرتبه ۲ باشد.

اثبات. با انجام محاسبات عبارت‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \gamma'_f &= (1 - r\kappa f(\kappa) \cos(\phi))T_\gamma + r\kappa' f'(\kappa) (\cos(\phi)N_\gamma + \sin(\phi)\mathbf{u}) \\ \gamma''_f &= -r \cos(\phi) (\kappa' f(\kappa) + \kappa \kappa' f'(\kappa))T_\gamma \\ &\quad + (\kappa + r \cos(\phi) (\kappa'' f'(\kappa) + \kappa'^2 f''(\kappa) - \kappa^2 f(\kappa)))N_\gamma \\ &\quad + r \sin(\phi) (\kappa'' f'(\kappa) + \kappa'^2 f''(\kappa))\mathbf{u} \\ \gamma'''_f &= -r \cos(\phi) (\kappa'' f'(\kappa) + 2\kappa' \kappa'' f'(\kappa) + 2\kappa \kappa'^2 f''(\kappa) + \kappa'' f'(\kappa) + \frac{\kappa'^2}{r \cos(\phi)} \\ &\quad - \kappa^3 f(\kappa))T_\gamma - r \cos(\phi) (2\kappa' \kappa'' f'(\kappa) + 3\kappa \kappa' f(\kappa) - \frac{\kappa'}{r \cos(\phi)} - 3\kappa' \kappa'' f''(\kappa) \\ &\quad - \kappa''' f'(\kappa) - \kappa'^2 f'''(\kappa))N_\gamma + r \sin(\phi) (\kappa''' f'(\kappa) + \kappa' \kappa'' f''(\kappa) \\ &\quad + 2\kappa' \kappa'' f''(\kappa) + \kappa'^2 f'''(\kappa))\mathbf{u}, \end{aligned}$$

در نقطه تکین s_0 از منحنی موازی تعمیم‌یافته $\kappa' = 0$ و $r = \frac{1}{\cos(\phi)\kappa f(\kappa)}$ ، مقادیر مشتقات تا مرتبه چهارم منحنی به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \gamma''_f &= \left(\frac{\kappa'' f'(\kappa)}{\kappa f(\kappa)} \right) N_\gamma + \frac{\kappa'' f'(\kappa)}{\kappa f(\kappa)} \tan(\phi) \mathbf{u} \\ \gamma'''_f &= \frac{-1}{\kappa f(\kappa)} ((2\kappa + 1)\kappa'' f'(\kappa)T_\gamma - \kappa''' f'(\kappa)N_\gamma) + \frac{\kappa'' f'(\kappa)}{\kappa f(\kappa)} \tan(\phi) \mathbf{u} \\ \gamma^{(4)}_f &= \frac{-1}{\kappa f(\kappa)} [(2\kappa + 1)\kappa''' f'(\kappa)T_\gamma \\ &\quad + ((\Delta \kappa^2 + k)\kappa'' f'(\kappa) + 2\kappa \kappa'' f(\kappa) - \kappa''' f''(\kappa) - 2\kappa'^2 - \kappa^{(4)} f'(\kappa))] N_\gamma \\ &\quad + \frac{\tan(\phi)}{\kappa f(\kappa)} (\kappa^{(4)} f'(\kappa) + 3\kappa'^2 f''(\kappa)) \mathbf{u} \end{aligned}$$

بدیهی است که اگر $\kappa''(s_0) \neq 0$ در این صورت بردارهای $\gamma''_f(s_0)$ و $\gamma'''_f(s_0)$ مستقل خطی هستند. توجه داشته باشید که به طور عمومی می‌توان همواره فرض کرد که $2\kappa(s_0) + 1 \neq 0$ همچنین شرط $f'(\kappa) \neq 0$ مفروض است (قضیه ۲.۳ را ببینید). به عبارت دیگر $\gamma(s_0)$ یک نقطه راسی معمولی از γ است. همچنین اگر

$$\kappa''(s_0) = 0, \kappa'''(s_0) \neq 0, \kappa^{(4)}(s_0) \neq 0,$$

در این صورت بردارهای $\gamma^{(4)}_f(s_0)$ و $\gamma'''_f(s_0)$ مستقل خطی هستند. به عبارت دیگر $\gamma(s_0)$ یک نقطه راسی از مرتبه ۲ است. □

فهرست منابع

- [1] Bruce, J. W. and Giblin, P. J., 1992. *Curves and Singularities*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139172615
- [2] Dias, F. S., 2015. Projection of generic 1 and 2-parameter families of space curves. *Hokkaido Math. J.*, 44, pp. 221–250. DOI: 10.14492/hokmj/1470053292
- [3] Encheva, R.P. and Georgiev, G.H., 2009. Similar Frenet Curves. *Results Math.*, 55, pp. 359-372. DOI:10.1007/s00025-009-0407-8
- [4] Giblin, P. J. and Warder, J. P., 2014. Evolving Evolutoids. *Am. Math. Mon.*, 121, pp. 871-889. DOI:10.4169/amer.math.monthly.121.10.871
- [5] Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S., 2006. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Third edition. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton FL.
- [6] Lewis, W. J., 2016. Mathematical model of a momentless arch. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 472, pp. 1-14. DOI: 10.1098/rspa.2016.0019
- [7] Liu, Y. Hung, C. and Chang, Y. , 2010. Study on involute of circle with variable radii in a scroll compressor. *Mech. Mach. Theory*, 45, pp. 1520-1536. DOI:10.1016/j.mechmachtheory.2010.07.001
- [8] Radzevich, S. P., 2018. *Theory of Gearing: Kinematics, Geometry, and Synthesis*. Second Edition, CRC Press. Boca Raton FL. DOI: 10.1201/9781003311744
- [9] Uribe-Vargas, R., 2005. On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 36, pp. 285-307. DOI: 10.1007/s00574-005-0040-4
- [10] Nuno Ballesteros, J. J. and Romero-Fuster, M. C., 1992. Global bitangency properties of generic closed space curves. *Math. Proc. Camb. Soc.*, 112, pp. 519–526. DOI: 10.1017/S030500410007119X
- [11] Nuno Ballesteros, J. J. and Romero-Fuster, M. C., 1992. Generic 1-parameter families of closed space curves. *Contemp. Math.*, 161, pp. 259–270.
- [12] Wang, Y., Chang, Y. and Liu, H., 2021. Generalized evolutes of planar curves. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 18, pp. 2150222. DOI: 10.1142/S0219887821502224



Generalized Evolutes of Planar Curves and its Properties

Mostafa Salarinoghabi⁽¹⁾⁴ and Esmail Azizpour⁽²⁾

⁽¹⁾ Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Brazil

⁽²⁾ Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Rasht, Iran

Communicated by: Mehdi Najafikhah

Received: 9 February 2024

Accepted: 2 December 2024

Abstract: In this paper, we present a generalization of the evolute of a curve in the plane and study its geometry. Consider a curve in the plane, denoted by γ , with curvature κ . If f is a smooth real-valued function, we define the spatial curve γ_f in such a way that it is the generalization of the evolute of γ . The process of obtaining this curve is through the introduction of an angular surface. Theorem 2 shows that the singular points of γ_f correspond to the vertices of γ and are independent of the choice of the function f . In such points, the generalized evolute has a cusp singularity if and only if the curve γ has a regular vertex at $s = s_0$. Furthermore, we investigate the contact of the generalized evolute γ_f with a sphere and a plane. Additionally, by introducing a certain type of parallel curve, we study its geometric properties.

Keywords: singularities of differentiable mappings, curve, flattening.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

⁴Corresponding author

E-mail addresses: (M. Salarinoghabi) mostafa.salarinoghabi@ufv.br, (E. Azizpour) eazizpour@guilan.ac.ir