مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۵۶–۷۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.46384.2269

محاسبه‌ی راهبردهای بدبینانه، خوشبینانه و میانی در تحلیل یک رقابت استاکلبرگ در شرایط عدم قطعیت

نرگس میرعزیزی (۱)، حسن حسن‌پور (۱)، [۱] جواد طیبی (۲)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
(۲) گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی کامپیوتر و صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

دبیر مسئول: مازیار صلاحی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۲

چکیده: در این مقاله یک مسئله‌ی بازی دوسطحی با ضرایب فازی $L - R$ مطالعه می‌گردد. این مسئله با استفاده از مفهوم آلفا–برش به یک مسئله‌ی دوسطحی با ضرایب غیرفازی تبدیل می‌شود. در دنیای واقعی با توجه به دیدگاه تصمیم‌گیرنده بهترین تصمیم متفاوت است. در اینجا با در نظرگرفتن نگرش تصمیم‌گیرنده، سه نوع جواب خوشبینانه، بدبینانه و میانی برای مسئله‌ی ارائه شده و در هرحالت، مسئله‌ی دوسطحی با استفاده از شرایط بهینگی کاروش–کان–تاکر به یک مسئله‌ی تک‌سطحی تبدیل می‌شود. در نهایت یک الگوریتم تعاملی ارائه گردیده که جواب مناسب تصمیم‌گیرنده را به‌دست می‌آورد. در انتهای مقاله مثالی اقتصادی و یک مطالعه‌ی موردی جهت تولید کیسه‌ی پلی‌اتیلنی ارائه و توسط الگوریتم ارائه شده حل می‌شود.

واژگان کلیدی: بازی استاکلبرگ، شرایط بهینگی کاروش–کان–تاکر، جواب بدبینانه، جواب میانی، جواب خوشبینانه، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ مقدمه

نظریه‌ی بازی‌ها، یکی از نظریه‌هایی است که در طی دهه‌های اخیر به‌طور گسترده در شاخه‌های مختلف علوم مانند علوم اقتصادی، سیاسی، نظامی، زیست‌شناسی، کامپیوتر و غیره مورد استفاده قرار گرفته است [۶، ۹–۱۱، ۱۶، ۱۹، ۲۵]. نظریه‌ی بازی ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل تقابل راهبردها از جمله راهبردهای اقتصادی بازیکنان است. آنچه در رقابت‌های مختلف اقتصادی، باید مورد توجه قرار گیرد، شیوه‌ی انتخاب راهبرد بازیکنان است. به‌عنوان مثال در بعضی رقابت‌ها بازیکنان می‌توانند همزمان با هم راهبرد خود را انتخاب کنند یا درگونه‌ای دیگر از بازی‌ها انتخاب‌ها می‌توانند همزمان نباشند. این‌که انتخاب راهبرد بازیکنان چه ساختاری دارد (مثلا بدانیم از قبل چه اطلاعاتی در مورد

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(H. Hassanpour) hhassanpour@birjand.ac.ir,(N. Mirazizi) nmirazizi@birjand.ac.ir
(J. Tayyebi) javadtayyebi@birjandut.ac.ir

راهبردها وجود دارد، بازی تصادفی است یا غیرتصادفی، با اطلاعات کامل است یا ناقص و همکارانه است یا غیرهمکارانه و ...) تعیین‌کننده‌ی این است که چه نوع مفهوم جوابی (تعادلی) در بازی شکل خواهد گرفت.
در یک دسته‌بندی کلی بازی‌ها به دو دسته‌ی بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه تقسیم‌بندی می‌شوند. در بازی‌های غیرهمکارانه بازیکنان نمی‌توانند توافقات الزام‌آوری را برای همکاری طی بازی ایجاد کنند، ولی در بازی‌های همکارانه، بازیکنان می‌توانند توافقات الزام‌آور و مذاکراتی پیش از بازی انجام دهند. در سال‌های اخیر، بسیاری از کاربردهای اقتصادی و مدیریتی نظریه بازی‌ها، در چارچوب غیرهمکارانه بوده است [۴، ۸، ۲۱، ۲۷].
یک مفهوم مهم در نظریه‌ی بازی‌ها، مفهوم جواب تعادلی نش است که دارای کاربردهای اقتصادی فراوان می‌باشد. این مفهوم توسط جان فون نیومن و اسکار مورگسترن [۱۹] در کتاب نظریه‌ی بازی‌ها و رفتار اقتصادی معرفی شده است. در پژوهش‌های زیادی با استفاده از مفهوم تعادل نش، به حل مسائل اقتصادی و مدیریت پرداخته شده است [۳، ۷، ۲۲، ۲۶، ۳۰، ۳۱].
بازی استاکلبرگ در سال ۱۹۵۲ توسط ون استاکلبرگ در زمینه‌ی تعادل اقتصادی ایستا معرفی شد. این بازی، یک بازی سلسله مراتبی بین دو یا چند نفر است که نقش آن‌ها در بازی نامتقارن می‌باشد [۲۹]. بازی استاکلبرگ، بازی رهبر–پیرو نیز نامیده می‌شود. زیرا در آن، یک بازیکن به‌عنوان رهبر و بقیه به‌عنوان پیروان عمل می‌کند.
در بازی غیرهمکارانه هدف، پیدا کردن یک راهبرد بهینه برای رهبر است، با این فرض که پیروان به‌گونه‌ای منطقی واکنش نشان می‌دهند که عایدی خود را با توجه به اقدامات رهبر بهینه کنند. در بازی استاکلبرگ، در نگاه اول ممکن است تصور شود که پیروان در هنگام انتخاب راهبردهای خود، اطلاعات بیشتری نسبت به رهبر دارند. اما این‌گونه نیست زیرا رهبر می‌داند که دنبال‌کننده بهترین پاسخ را خواهد داد. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ی راهبردهای رهبر است به این معنا که وی متعهد به انتخاب راهبرد x_i ، $i = 1, \ldots, n$ شده است. بازیکن پیرو بهترین پاسخ خود را نسبت به راهبرد x_i رهبر انتخاب خواهد کرد. بازیکن رهبر بهترین پاسخ بازیکن پیرو به هر انتخاب خود را در نظرگرفته و سپس x_i را انتخاب می‌کند. آلیس[۱۲] تحلیل کاملی در مورد بازی‌های رهبر–پیرو ارائه داده است. این بازی با یک مسئله‌ی بهینه‌سازی دوسطحی [۲۰] قابل حل است.
بازی‌های دیفرانسیلی توسط ایزاکس در سال ۱۹۵۴ معرفی شده‌اند [۱۳]. این بازی‌ها، مجموعه‌ای از مسائل مربوط به مدل‌سازی و تحلیل تعارض در چهارچوب یک دستگاه دینامیکی هستند. برای حل این نوع مسائل، باید جوابی به نام تعادل نش را به‌دست آورد. فردوس صالحین و چانگ هی ون [۲۴]، به کمک یک بازی دیفرانسیلی آماری تصادفی استاکلبرگ، هزینه‌های انباشته‌ی رهبر و پیرو را به‌طور متوالی بهینه کرده‌اند.
در ادامه به معرفی چند پژوهش در زمینه‌ی بازی استاکلبرگ می‌پردازیم. آقابابایی و همکاران [۴] با استفاده از بازی استاکلبرگ به حل یک مدل دوسطحی دوهدفه با کاربرد بهینه‌سازی جیره‌بندی و عرضه‌ی داروهای کمیاب در وضعیت بحرانی جامعه به علت شیوع ویروس کووید ۱۹ پرداخته‌اند. زایتسوا [۳۲] با استفاده از یک مدل استاکلبرگ، کاربردی از حمل و نقل هوایی را مطرح و حل کرده است که در آن توزیع‌کنندگان به دنبال کاهش هزینه‌های ارسال کالا زمانی که مسیرهای هوایی غیریکتایی وجود دارد هستند. منگ و همکاران [۱۸] یک بازی دوسطحی را در محیط غیرقطعی در زمینه‌ی انرژی‌های تجدید پذیر برای پاسخگویی به تقاضا با در نظرگرفتن عدم قطعیت در تولید این انرژی‌ها طراحی و حل نموده‌اند. بازی استاکلبرگ گوسی درجه دوم یک مسئله‌ی کنترل بهینه است که معیار عملکرد را با استفاده از یک دستگاه تصادفی به حداقل می‌رساند. در پژوهش لی و همکاران [۱۴] رهبر در یک محیط تصادفی، راهبرد خود را با استفاده از اطلاعات جهانی و پیرو با استفاده از اطلاعات مشاهده‌ای انتخاب می‌کند. لو و همکاران [۱۵] به دنبال بهینه‌سازی سیستم انرژی یکپارچه مبتنی بر بازی استاکلبرگ و پاسخ تقاضای یکپارچه تحت مکانیسم تجارت کربن بوده‌اند. در این پژوهش، رهبر، ارائه دهنده‌ی خدمات انرژی یکپارچه و دو کاربر مصرف‌کننده‌ی انرژی به‌عنوان پیرو در نظرگرفته شده‌اند و با حل یک مثال موردی نشان داده شده است که حدود ۴۸.۱۵ درصد سود افزایش یافته است. بیگدلی و همکاران [۲] برای بازی مجموع صفر دونفره در محیط فازی با ضرایب فازی مثلثی، جواب‌های بهینه‌ی خوشبینانه و بدبینانه را به‌دست آورند و از این جواب‌ها در کاربردهای نظامی استفاده کرده‌اند. اسماعیلی و همکاران [۱] یک بازی امنیتی با پارامترهای فازی مثلثی را به‌صورت یک مدل استاکلبرگ مدلسازی و با استفاده از ترتیبی روی اعداد فازی مثلثی، مسئله را به روش الفبایی حل نموده‌اند.
بازی‌های استاکلبرگ کاربردهای زیادی در مسائل اقتصادی مربوط به زنجیره‌ی تولید، زنجیره‌ی خدمات و زنجیره‌ی فروش دارند و روش‌های حل متفاوتی برای آن‌ها مطرح شده است. اما عموماً در این روش‌ها قابلیت تعامل با تصمیم‌گیرنده وجود ندارد، درحالی که در واقعیت نقش و اهمیت دیدگاه تصمیم‌گیرنده غیرقابل انکار است. در این پژوهش یک بازی استاکلبرگ دوسطحی غیرهمکارانه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بازی‌ها، دو بازیکن(رهبر و پیرو) با هم در رقابتند و هر دو تلاش می‌کنند سود خود را بیشینه کنند. بازیکن رهبر با علم به اینکه پیرو بهترین راهبرد خود را در پاسخ به راهبرد انتخابی او، انتخاب می‌کند، به دنبال بیشینه‌سازی سود خود است. ضمناً در این بازی (رقابت)، رهبر به تصمیم انتخاب شده‌ی خود متعهد است، به این معنی که اگر حرکتی داشته باشد نمی‌تواند آن را پس بگیرد. بسیاری از رقابت‌هایی که در محیط کسب و کار و تجارت صورت می‌گیرد از نوع غیرهمکارانه و در محیط غیرقطعی می‌باشد. به‌عنوان مثال رقابت بین دو فروشنده‌ی میوه را در نظر بگیرید که هر دو در یک منطقه و محل در حال فروش محصول خود می‌باشند، اما یکی به علت موقعیت مکانی بهتر (ویژگی‌های برتر) نقش رهبر و دیگری نقش پیرو را دارد. فرض کنیم هدف میزان فروش محصولات به نحوی است که هر کدام از فروشنده‌ها بیشترین سود را به‌دست آورند. در اینجا به دلیل نوسانات بازار، میزان فروش در محل، شدت گرمی هوا که باعث خرابی یا افت کیفیت میوه می‌شود یا دلایل دیگر، قیمت و در واقع سود فروش میوه‌ها غیرقطعی هستند. اما این عدم قطعیت از نوع احتمال و تصادف نیست، بلکه از نوع فازی است. از این‌رو در این پژوهش یک بازی استاکلبرگ دو سطحی غیرهمکارانه را در محیط فازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و از آنجا که اعمال

حسابی روی اعداد $L-R$ به دلیل قالب خاصی که دارند، از الگوهای مشخصی پیروی می‌کنند، پارامترهای مدل را اعداد فازی $L-R$ در نظر می‌گیریم و با توجه به میزان خوش‌بینی یا بدبینی بازیکنان، یک دسته از جواب‌های بهینه‌ی خوشبینانه، بدبینانه، یا میانی را برای مسئله به‌دست می‌آوریم. از مزایای این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:
در نظرگرفتن نوع بازیکنان (میزان خوشبینی و بدبینی آن‌ها) که باعث می‌شود جواب‌های مسئله واقع‌گرایانه به‌دست آید، ارائه‌ی الگوریتم تعاملی برای حل مسئله که باعث می‌شود به جواب‌های مورد انتظار تصمیم‌گیرنده نزدیک شویم، و در نظرگرفتن مسئله در محیط غیرقطعی(فازی)، که تطابق بیشتری با مسائل دنیای واقعی دارد.
ادامه‌ی مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم مبانی نظری پژوهش و در بخش سوم مسئله‌ی اصلی معرفی شده است. در بخش چهارم به ارائه‌ی روش حل مسئله پرداخته شده و در انتها مثالی عددی و مطالعه‌ای موردی ارایه شده است.

۲ مبانی نظری پژوهش

در این بخش مقدمات مورد نیاز از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و اعمال حسابی روی بازه‌ها را به اختصار مرور می‌کنیم.
فرض کنید X نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی مرجع باشد. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))|x\in X\}$$

است که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به بازه‌ی $[0,1]$ تعلق دارد و درجه‌ی عضویت x در مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد. صفر نشان‌دهنده‌ی عدم عضویت و یک نشان‌دهنده‌ی عضویت قطعی x در $\tilde{A}$ می‌باشد و مقدار بین صفر و یک نشان‌دهنده‌ی عضویت نسبی x در $\tilde{A}$ است [۲۳].
مجموعه‌ی

$$Supp(\tilde{A})=\{x\in X|\mu_{\tilde{A}}(x)>0\}$$

تکیه‌گاه و مجموعه‌ی

$$Core(\tilde{A})=\{x\in X|\mu_{\tilde{A}}(x)=1\}$$

هسته‌ی $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۲. اگر $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی باشد که در $\mathbb{R}$ تعریف شده و بازه بسته‌ای غیرتهی مانند $[a,b]$ وجود داشته باشد که

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ l(x) & x\in(-\infty,a]\\ r(x) & x\in[b,\infty)\end{cases}$$

که در آن $l:(-\infty,a]\to[0,1]$ تابعی از راست پیوسته و صعودی است، و در $x\in(-\infty,w_1)$ که $w_1<a$، $l(x)=0$ و $r:[b,\infty)\to[0,1]$ تابعی از چپ پیوسته و نزولی است، و در $x\in(w_2,\infty)$ که $w_2>b$، $r(x)=0$ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ یک عدد فازی نامیده می‌شود [۲۸].

تعریف ۲.۲. اگر برای هر $x\le 0$ ($x\ge 0$) داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$، عدد فازی $\tilde{A}$ مثبت (منفی) نامیده می‌شود و به‌صورت $\tilde{A}>0$ ($\tilde{A}<0$) نمایش داده می‌شود[۸].

تعریف ۳.۲. اگر برای هر $x<0$ ($x>0$) داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$، عدد فازی $\tilde{A}$ نامنفی (نامثبت) نامیده می‌شود و به‌صورت $\tilde{A}\ge 0$ ($\tilde{A}\le 0$) نمایش داده می‌شود [۸].

تعریف ۴.۲. عدد فازی $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$ با تابع عضویت زیر عدد فازی $L-R$ نامیده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}L((m-x)/w_1) & x\le m,\quad w_1>0\\ R((x-m)/w_2) & x\ge m,\quad w_2>0\end{cases}$$

که m نقطه‌ی میانی و w_1 و w_2 به ترتیب گسترش چپ و راست $\tilde{A}$ می باشند و تابع $L(x)$ تابعی پیوسته و غیرصعودی است که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$L(x)=L(-x),$$

$$L(\circ) = ۱,$$
$$L(x) \in [\circ, \infty).$$

تابع $R(x)$ مشابه با $L(x)$تعریف می‌شود.
عدد فازی فوق به‌صورت $(m, w_۱, w_۲)_{LR}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف **۵.۲**. عدد فازی $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$ با تابع عضویت زیر عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (x - a^L)/(a^M - a^L) & a^L \leq x \leq a^M, \\ (a^R - x)/(a^R - a^M) & a^M \leq x \leq a^R, \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

که در آن a^L و a^R به‌ترتیب ابتدا و انتهای تکیه‌گاه عدد فازی $\tilde{A}$ و a^M هسته‌ی آن می‌باشند. بدیهی است که اگر $a^L \geq \circ$، عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ نامنفی است. عدد فازی مثلثی فوق را با $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ نمایش می‌دهیم. اعداد فازی مثلثی نوع خاصی از اعداد فازی $L - R$ می‌باشند که توابع $L(x)$ و $R(x)$ خطی هستند ($a^M = m, a^M - a^L = w_۱, a^R - a^M = w_۲$).
اگر $a^M - a^L = a^R - a^M = w$، عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ متقارن و w نیم پهنای آن نامیده می‌شود. عدد فازی مثلثی متقارن را به‌صورت $(a^L, a^R) = (a^M - w, a^M + w)$ نمایش می دهیم ($a^M = \frac{a^L + a^R}{۲}$).

تعریف **۶.۲**. α–برش مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (\circ, ۱]$$

و

$$\tilde{A}_\circ = cl\{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \circ\}$$

که در آن cl به معنی بستار مجموعه است [۲۳].

با استفاده از تعریف ۶.۲ به‌سادگی می‌توان دید که α–برش عدد فازی $\tilde{A} = (m, w_۱, w_۲)_{LR}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha] = [m - w_۱ L^{-۱}(\alpha) \ , \ m + w_۲ R^{-۱}(\alpha)]$$

که در آن $\alpha \in [\circ, ۱]$. همچنین α–برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha] = [\alpha a^M + (۱ - \alpha) a^L, \alpha a^M + (۱ - \alpha) a^R]$$

که در آن $\alpha \in [\circ, ۱]$.
اگر عدد فازی مثلثی$\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ متقارن باشد، آنگاه

$$a^L_\alpha = a^L + \frac{\alpha(a^R - a^L)}{۲}, \ \ a^R_\alpha = a^R - \frac{\alpha(a^R - a^L)}{۲}. \qquad (۱.۲)$$

تعریف **۷.۲**. α- برش بردار فازی $\tilde{A} = (\tilde{a_۱}, ..., \tilde{a_n})$ که $\tilde{a_۱}$ ، ...، $\tilde{a_n}$ اعدادی فازی‌اند، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{(a_۱, a_۲, ..., a_n) | \mu_{\tilde{a_۱}}(a_۱) \geq \alpha, ..., \mu_{\tilde{a_n}}(a_n) \geq \alpha\}$$

به همین ترتیب اگر $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ ماتریس‌هایی به‌ترتیب $m \times n$، $m \times ۱$ و $r \times n$ با درایه‌های $\tilde{a_{ij}}$ ، $\tilde{b_i}$ و $\tilde{c_{kj}}$ باشند α–برش سه‌تایی مرتب $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_\alpha = \{(a, b, c) | \ \mu_{\tilde{a_{ij}}}(a_{ij}) \geq \alpha, \mu_{\tilde{b_i}}(b_i) \geq \alpha, \mu_{\tilde{c_{kj}}}(c_{kj}) \geq \alpha, i = ۱, \ldots, m, \\ j = ۱, \ldots, n \ , k = ۱, \ldots, r \ \}.$$

که در آن a ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های a_{ij} ، b ماتریسی $m \times ۱$ با درایه‌های b_i و c ماتریسی $r \times n$ با درایه‌های c_{kj} می‌باشند.

فرض کنید $\star$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{R}^2$ باشد. برای دو زیرمجموعه‌ی دلخواه A و B از $\mathbb{R}$ عمل دوتایی $\star$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \star B = \{a \star b | a \in A, b \in B\}.$$

اگر $B = \{\lambda\}$ یک مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، $A \star B$ را با λA نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}.$$

دو بازه‌ی $A = [a^L, a^R]$ و $B = [b^L, b^R]$ را در نظر بگیرید. اگر $\star$ را $+$ ، $-$ و . در نظر بگیریم، روابط زیر به‌دست می‌آید[۵]:

$$\begin{aligned}
&A + B = [A^L + B^L, A^R + B^R],\\
&A - B = [A^L - B^R, A^R - B^L],\\
&A.B = [min\{a^Lb^L, a^Lb^R, a^Rb^L, a^Rb^R\}, max\{a^Lb^L, a^Lb^R, a^Rb^L, a^Rb^R\}].
\end{aligned}$$

آشکار است که اگر $A \geq 0$ و B یک بازه دلخواه باشد، آنگاه

$$A.B = [min\{a^Lb^L, a^Rb^L\}, max\{a^Rb^R, a^Lb^R\}]$$

و اگر $A, B \geq 0$ آنگاه $A.B = [a^Lb^L, a^Rb^R]$. همچنین

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda A^L, \lambda A^R] & \lambda \geq 0 \\ [\lambda A^R, \lambda A^L] & \lambda < 0. \end{cases} \tag{۲.۲}$$

۳ بازی استاکلبرگ با ضرایب فازی

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، در این مقاله یک بازی استاکلبرگ دوسطحی غیرهمکارانه با پارامترهای فازی $L - R$ مورد مطالعه قرار گرفته است. در اقتصاد بازی بین بعضی شرکت‌ها در چارچوب بازی استاکلبرگ می‌باشد. فرض کنید دو شرکت ۱ و ۲، کالا یا خدماتی مشابه به بازار عرضه می‌کنند. دو شرکت به‌عنوان بازیکنان در یک بازی رقابتی برای به‌دست آوردن عایدی بیشتر در یک هدف مشترک با یکدیگر رقابت می‌کنند. همچنین فرض کنید شرکت ۱ با توجه به برخی معیارها مانند قدرت و نفوذ بیشتر در بازار مورد نظر، نقش رهبر و شرکت ۲ نقش پیرو را داشته باشد. هدف مسئله، یافتن راهبرد بهینه برای بازیکن رهبر است، با این فرض که پیرو با توجه به راهبرد انتخابی رهبر راهبردی را انتخاب می‌کند که عایدی خود را بهینه کند. در این مقاله فرض شده است که بازیکنان راهبردهایشان را بر اساس وضعیت اولیه‌ی دستگاه و زمان انتخاب می‌کنند و نمی‌توانند راهبردهایشان را در طول بازی تغییر دهند. به این نوع راهبرد، راهبرد پیش‌تعهد [۲] هم گفته می‌شود. از این‌رو رهبر بعد از انتخاب راهبردش به آن متعهد است و امکان تغییر راهبردش را بعد از انتخاب آن ندارد.

فرض کنید در بازی، بازیکن ۱ و ۲ بتوانند به‌ترتیب n_1 و n_2 تصمیم مختلف را انتخاب کنند، یعنی راهبردهای خود را از مجموعه‌های $K_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}$ و $K_2 = \{1, 2, \ldots, n_2\}$ انتخاب نمایند. این مجموعه‌ها را به‌ترتیب مجموعه‌ی راهبردهای محض بازیکنان ۱ و ۲ می‌نامیم.

تعریف **۱.۳**. [۱۷]. یک راهبرد آمیخته مانند $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$ برای بازیکن ۱ یک توزیع احتمال روی مجموعه‌ی راهبردهای محض K_1 است. مجموعه‌ی راهبردهای آمیخته‌ی بازیکن۱ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$X_1 = \{x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} | \sum_{k_1=1}^{n_1} x_{1k_1} = 1, x_{1k_1} \geq 0, k_1 = 1, \ldots, n_1\}$$

و به‌طور مشابه مجموعه‌ی راهبردهای آمیخته‌ی بازیکن ۲ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$X_2 = \{x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2} | \sum_{k_2=1}^{n_2} x_{2k_2} = 1, x_{2k_2} \geq 0, k_2 = 1, \ldots, n_2\}.$$

[2]Pre-commitment strategy

راهبردهای محض حالت خاصی از راهبردهای آمیخته‌اند که یکی از مولفه‌های $x_۱ = (x_{۱۱}, \dots, x_{۱n_۱})$ و $x_۲ = (x_{۲۱}, \dots, x_{۲n_۱})$ مقدار یک و بقیه صفر را اختیار می‌کنند. همچنین به‌ازای $l, j = ۱, ۲$ قرار می‌دهیم $c_{lj} = (c_{lj۱}, \dots, c_{ljn_j})$ که $c_{l۱}$ و $c_{l۲}$ به‌ترتیب عایدی بازیکن سطح ۱ و ۲ است، زمانی که بازیکن سطح ۱، راهبرد آمیخته‌ی $x_۱$ و بازیکن سطح ۲، راهبرد آمیخته‌ی $x_۲$ را انتخاب می‌کند.

راهبردی (مجموعه راهبردهایی) که عایدی یک بازیکن را در برابر راهبرد ثابت بازیکن دیگر بیشینه می‌کند، بهترین پاسخ (مجموعه بهترین پاسخ‌های) وی نام دارد. در یک بازی استاکلبرگ، برای یک راهبرد رهبر، ممکن است چندین بهترین پاسخ برای پیرو وجود داشته باشد. اگرچه همه‌ی این پاسخ‌ها به یک عایدی مورد انتظار برای پیرو (بهترین پاسخ ممکن برای پیرو) منجر می‌شوند، اما می‌توانند به عایدی‌های مورد انتظار متفاوت برای رهبر منجر شوند. بنابراین با یک مسئله‌ی دوسطحی روبرو هستیم که در آن عایدی رهبر روی مجموعه‌ی بهترین پاسخ‌های بازیکن پیرو به هر راهبرد بازیکن رهبر بهینه می‌شود. چنین جوابی برای مسئله‌ی استاکلبرگ جواب تعادل نام دارد که در تعریف زیر ارائه شده است.

تعریف **۲.۳**. زوج راهبرد $(x_۱^*, x_۲^*)$ را جواب تعادل بازی استاکلبرگ می‌گوییم که $x_۲^* = R(x_۱^*)$ بهترین پاسخ بازیکن ۲، به راهبرد $x_۱^*$ بازیکن ۱ را نشان می‌دهد و جواب مسئله‌ی زیر است ($f_۱(x_۱, x_۲)$ نشان‌دهنده‌ی عایدی رهبر است زمانی که رهبر راهبرد $x_۱$ و پیرو راهبرد $x_۲$ را انتخاب می‌کنند):

$$f_۱(x_۱^*, x_۲^*) = \max_{x_۱} f_۱(x_۱, R(x_۱)).$$

در اینجا می‌خواهیم برای یک مسئله‌ی استاکلبرگ که تمام ضرایب آن اعداد فازی $L - R$ می‌باشند، جواب تعادل استاکلبرگ بیابیم. فرض کنید $x_۱ = (x_{۱۱}, \dots, x_{۱n_۱}) \in \mathbb{R}^{n_۱}$ و $x_۲ = (x_{۲۱}, \dots, x_{۲n_۲}) \in \mathbb{R}^{n_۲}$ به‌ترتیب راهبردهای آمیخته‌ی بازیکنان ۱ و ۲ باشد. علاوه بر این زمانی که بازیکن سطح ۱، راهبرد آمیخته‌ی $x_۱$ و بازیکن سطح ۲، راهبرد آمیخته‌ی $x_۲$ را انتخاب می‌کند، فرض کنیم عایدی دو بازیکن به‌صورت $\tilde{c}_{lj} = (\tilde{c}_{lj۱}, \cdots, \tilde{c}_{ljn_j})$ داده شده‌اند که $l = ۱, ۲$ و $j = ۱, ۲$.
ممکن است بازیکن‌ها برای انتخاب راهبردشان، محدودیت‌هایی به‌صورت $\tilde{a}_{i۱}x_۱ + \tilde{a}_{i۲}x_۲ \le \tilde{b}_i$ که $i = ۱, \cdots, m$ داشته باشند که در آن

$$\tilde{a}_{ij} = (\tilde{a}_{ij۱}, \dots, \tilde{a}_{ijn_j}), \ \ i = ۱, \dots, m, \ \ j = ۱, ۲.$$

مسئله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی برای یافتن جواب تعادل بازی استاکلبرگ، به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$(P_۱) : \max_{x_۱} \quad \tilde{c}_{۱۱}x_۱ + \tilde{c}_{۱۲}x_۲$$

که $x_۲$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \max_{x_۲} \quad & \tilde{c}_{۲۱}x_۱ + \tilde{c}_{۲۲}x_۲ \\ & \tilde{a}_{i۱}x_۱ + \tilde{a}_{i۲}x_۲ \le \tilde{b}_i, \ \ i = ۱, \dots, m \\ & \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} x_{۱k_۱} = ۱ \\ & \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} x_{۲k_۲} = ۱ \\ & x_۱ = (x_{۱۱}, x_{۱۲}, ..., x_{۱k_۱}) \ge ۰, \ \ x_۱ = (x_{۲۱}, x_{۲۲}, ..., x_{۲k_۲}) \ge ۰. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید با نظر تصمیم‌گیرنده می‌خواهیم درجه عضویت تمام پارامترهای فازی مسئله‌ی $(P_۱)$، بزرگتر یا مساوی مقدار α باشد.

برای این درجه عضویت، مسئله را می‌توان به‌صورت مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی غیرفازی زیر بازنویسی کرد ($\alpha \in [۰,۱]$).

$$(P_۲): \max_{x_۱} \quad c_{۱۱}x_۱ + c_{۱۲}x_۲$$

که $x_۲$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\max_{x_۲} \quad & c_{۲۱}x_۱ + c_{۲۲}x_۲ \\
& a_{i۱}x_۱ + a_{i۲}x_۲ \le b_i \ , \ \ i = ۱,\dots,m \\
& \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} x_{۱k_۱} = ۱ \\
& \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} x_{۲k_۲} = ۱ \\
& (c_{lj}, a_{ij}, b_i) \in (\tilde{c}_{lj}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i)_\alpha, \ \ i = ۱,\dots,m, \ \ l = ۱,۲, \ \ j = ۱,۲ \\
& x_۱ = (x_{۱۱}, x_{۱۲}, ..., x_{۱n_۱}) \ge ۰, \ \ x_۲ = (x_{۲۱}, x_{۲۲}, ..., x_{۲n_۲}) \ge ۰.
\end{aligned}$$

در مسئله‌ی فوق علاوه بر راهبردهای $x_۱$ و $x_۲$، پارامترهای c_{lj}، a_{ij} و b_i نیز مجهولند که باید از α-برش نظیرشان به نحو مناسبی انتخاب شوند. از این‌رو این مسئله یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی است. در بخش بعد سراغ حل این مسئله می‌رویم.

۴ راهبردهای بدبینانه، میانی و خوشبینانه‌ی بازیکنان

در سه زیربخش زیر برای حل مسئله‌ی $(P_۲)$ به‌ترتیب سه دیدگاه بدبینانه، خوشبینانه و میانی بازیکنان را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در دیدگاه بدبینانه رهبر کمترین عایدی ممکن خود را روی کمترین عایدی ممکن بازیکن پیرو بهینه می‌کند. در حالی که در وضعیت خوشبینانه رهبر بیشترین عایدی ممکن خود را روی بیشترین عایدی ممکن پیرو بهینه می‌کند. در حالت میانی طیفی از بازیکنان (از کاملاً بدبین تا کاملاً خوشبین) را در نظرگرفته و با تغییر پارامتری، بسته به نوع بازیکنان، جواب‌های مناسب را به‌دست می‌آوریم.

۱.۴ راهبرد بدبینانه‌ی بازیکنان

در حالت بدبینانه وضعیتی در نظرگرفته می‌شود که هر دو بازیکن با بدترین وضعیت ممکن مواجه باشند. به‌عبارتی، در این وضعیت باید کمترین عایدی ممکن رهبر روی کوچکترین فضای جواب ممکن بیشینه شود. با توجه به مسئله‌ی $(P_۲)$، برای حالت بدبینانه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر را خواهیم داشت:

$$(P_۳): \quad \max_{x_۱} \ \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} (c_{۱۱k_۱})^L_\alpha x_{۱k_۱} + \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} (c_{۱۲k_۲})^L_\alpha x_{۲k_۲}$$

که $x_۲$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\max_{x_۲} \ \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} (c_{۲۱k_۱})^L_\alpha x_{۱k_۱} + \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} (c_{۲۲k_۲})^L_\alpha x_{۲k_۲}$$

$s.t.$

$$\sum_{k_۱=۱}^{n_۱} (a_{i۱k_۱})^R_\alpha x_{۱k_۱} + \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} (a_{i۲k_۲})^R_\alpha x_{۲k_۲} \le (b_i)^L_\alpha, \ \ i = ۱,\dots,m \qquad (۱.۴)$$

$$\sum_{k_1=1}^{n_1} x_{1k_1} = 1 \tag{۲.۴}$$

$$\sum_{k_2=1}^{n_2} x_{2k_2} = 1 \tag{۳.۴}$$

$$x_{1k_1} \geq 0, x_{2k_2} \geq 0, \quad k_1 = 1, \ldots, n_1, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2. \tag{۴.۴}$$

مسئله‌ی سطح دو در (P_3) یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی است. از این‌رو شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر برای بهینگی آن لازم و کافی می‌باشد. بنابراین با استفاده از شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر، مسئله‌ی سطح دوم را با شرایط معادل جایگزین می‌کنیم. در این صورت مسئله‌ی دوسطحی به مسئله‌ی یک‌سطحی معادل تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم‌افزارهای موجود به‌راحتی قابل حل است.
شرایط بهینگی برای مسئله‌ی سطح دوم به‌شرح زیر است:
اولاً باید قیود مسئله‌ی سطح پایین در (P_3) یعنی قیود (۱.۴) تا (۴.۴) برقرار باشد.
ثانیاً با معرفی متغیرهای دوگان $v_i \geq 0$ ، u_1 و u_2 که $i = 1, \ldots, m$ به‌ترتیب متناظر با قیود (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) باید داشته باشیم:

$$v_i(\sum_{k_1=1}^{n_1} (a_{i1k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2} (a_{i2k_2})_\alpha^R x_{2k_2} - (b_i)_\alpha^L) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{۵.۴}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i (a_{i1k_1})_\alpha^R + u_1 \geq (c_{21k_1})_\alpha^L, \quad k_1 = 1, \ldots, n_1 \tag{۶.۴}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i (a_{i2k_2})_\alpha^R + u_2 \geq (c_{22k_2})_\alpha^L, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2 \tag{۷.۴}$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{۸.۴}$$

شرایط (۱.۴) تا (۸.۴) معادل مسئله‌ی سطح پایین در (P_3) هستند. بنابراین مسئله‌ی زیر معادل مسئله‌ی دوسطحی (P_3) است.

$$\begin{aligned}
&(P_4): \\
&\max_{x_1, x_2} \sum_{k_1=1}^{n_1} (c_{11k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2} (c_{12k_2})_\alpha^L x_{2k_2} \\
&s.t. \quad \sum_{k_1=1}^{n_1} (a_{i1k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2} (a_{i2k_2})_\alpha^R x_{2k_2} \leq (b_i)_\alpha^L, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad v_i \, (\sum_{k_1=1}^{n_1} (a_{i1k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2} (a_{i2k_2})_\alpha^R x_{2k_2} - (b_i)_\alpha^L) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i (a_{i1k_1})_\alpha^R + u_1 \geq (c_{21k_1})_\alpha^L, \quad k_1 = 1, \ldots, n_1 \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i (a_{i2k_2})_\alpha^R + u_2 \geq (c_{22k_2})_\alpha^L, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2 \\
&\qquad \sum_{k_1=1}^{n_1} x_{1k_1} = 1 \\
&\qquad \sum_{k_2=1}^{n_2} x_{2k_2} = 1 \\
&\qquad x_{1k_1} \geq 0, x_{2k_2} \geq 0, v_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \quad k_1 = 1, \ldots, n_1, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2.
\end{aligned}$$

$u_۱$ و $u_۲$ نامقید هستند. با حل مسئله‌ی $(P_۴)$ راهبرد بهینه‌ی $x_۱$ برای بازیکن رهبر یعنی بازیکن ۱ و $x_۲$ بهترین پاسخ پیرو به راهبرد رهبر، در حالت بدبینانه به‌ازای مقدار مفروض α محاسبه می‌شود.

۲.۴ راهبرد خوشبینانه‌ی بازیکنان

در حالت خوشبینانه وضعیتی در نظرگرفته می‌شود که هر دو بازیکن با بهترین وضعیت ممکن مواجه باشند. به عبارتی، در این وضعیت باید بیشترین عایدی ممکن رهبر روی بزرگترین فضای جواب ممکن بیشینه شود. جواب‌های خوشبینانه‌ی $(P_۲)$ با حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&(P_۵):\\
&\max_{x_۱} \sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(c_{۱۱k_۱})_\alpha^R x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(c_{۱۲k_۲})_\alpha^R x_{۲k_۲}
\end{aligned}
$$

که $x_۲$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_۲} \sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(c_{۲۱k_۱})_\alpha^R x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(c_{۲۲k_۲})_\alpha^R x_{۲k_۲}\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(a_{i۱k_۱})_\alpha^L x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(a_{i۲k_۲})_\alpha^L x_{۲k_۲}\le (b_i)_\alpha^R,\ \ i=۱,\dots,m\\
&\qquad \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} x_{۱k_۱}=۱\\
&\qquad \sum_{k_۲=۱}^{n_۲} x_{۲k_۲}=۱\\
&\qquad x_{۱k_۱}\ge ۰,\, x_{۲k_۲}\ge ۰,\ \ k_۱=۱,\dots,n_۱,\ \ k_۲=۱,\dots,n_۲.
\end{aligned}
$$

بار دیگر با استفاده از شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر، مسئله‌ی دوسطحی $(P_۶)$ به مسئله‌ی تک‌سطحی زیر تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&(P_۶):\\
&\max_{x_۱,x_۲} \sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(c_{۱۱k_۱})_\alpha^R x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(c_{۱۲k_۲})_\alpha^R x_{۲k_۲}\\
&s.t.\ \sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(a_{i۱k_۱})_\alpha^L x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(a_{i۲k_۲})_\alpha^L x_{۲k_۲}\le (b_i)_\alpha^R,\ \ i=۱,\dots,m.\\
&\quad v_i\,(\sum_{k_۱=۱}^{n_۱}(a_{i۱k_۱})_\alpha^L x_{۱k_۱}+\sum_{k_۲=۱}^{n_۲}(a_{i۲k_۲})_\alpha^L x_{۲k_۲}-(b_i)_\alpha^R)=۰,\ \ i=۱,\dots,m.\\
&\quad \sum_{i=۱}^{m} v_i(a_{i۱k_۱})_\alpha^L+u_۱\ge (c_{۲۱k_۱})_\alpha^R,\ \ \ k_۱=۱,\dots,n_۱.\\
&\quad \sum_{i=۱}^{m} v_i(a_{i۲k_۲})_\alpha^L+u_۲\ge (c_{۲۲k_۲})_\alpha^R,\ \ \ k_۲=۱,\dots,n_۲.\\
&\quad \sum_{k_۱=۱}^{n_۱} x_{۱k_۱}=۱
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k_2=1}^{n_2} x_{2k_2} = 1$$
$$x_{1k_1} \geq 0, x_{2k_2} \geq 0, v_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m \quad k_1 = 1, \ldots, n_1, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2.$$

u_1 و u_2 نامقید هستند. با حل مسئله‌ی (P_6) راهبرد بهینه‌ی بازیکن رهبر (بازیکن ۱) و بهترین پاسخ پیرو به راهبرد وی ، در حالت خوشبینانه به‌ازای مقدار مفروض α محاسبه می‌شود.

۳.۴ راهبرد میانی بازیکنان

به جای در نظرگرفتن حالت‌های خوشبینانه و بدبینانه، می‌توان حالت میانی را که بازیکنان به‌طور کامل خوشبین یا بدبین نیستند در نظرگرفت. برای این منظور مسئله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(P_7):$$
$$\max_{x_1} \lambda(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{11k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{12k_2})_\alpha^L x_{2k_2}) + (1-\lambda)(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{11k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{12k_2})_\alpha^R x_{2k_2})$$

که x_2 از حل مسئله زیر به‌دست می‌آید:

$$\max_{x_2} \lambda(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{21k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{22k_2})_\alpha^L x_{2k_2}) + (1-\lambda)(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{21k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{22k_2})_\alpha^R x_{2k_2}\})$$
$$s.t. \ (1-\lambda)(\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})_\alpha^L x_{2k_2}) + \lambda(\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})_\alpha^R x_{2k_2})$$
$$\leq \lambda(b_i)_\alpha^L + (1-\lambda)(b_i)_\alpha^R$$
$$\sum_{k_1=1}^{n_1} x_{1k_1} = 1$$
$$\sum_{k_2=1}^{n_2} x_{2k_2} = 1$$
$$x_{1k_1} \geq 0, x_{2k_2} \geq 0, v_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m \quad k_1 = 1, \ldots, n_1, \quad k_2 = 1, \ldots, n_2.$$

در مسئله‌ی (P_7) با انتخاب مقادیر مختلف λ در بازه‌ی $[0, 1]$، جواب‌های مختلفی به شرح زیر به‌دست می‌آیند:
۱- اگر تصمیم‌گیرنده کاملاً بدبین باشد، با انتخاب $\lambda = 1$ جواب بدبینانه‌ی مسئله به‌دست می‌آید.
۲- اگر تصمیم‌گیرنده کاملاً خوشبین باشد، با انتخاب $\lambda = 0$ جواب خوشبینانه‌ی مسئله را داریم.
۳- با قرار دادن $\lambda = \frac{1}{2}$ جواب خنثی ایجاد می‌شود.
۴- اگر تصمیم‌گیرنده تاحدودی بدبین باشد، با انتخاب $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ دسته جواب‌هایی متمایل به جواب بدبینانه به‌دست می‌آید. هر چه بازیکن رهبر بدبین‌تر باشد λ، به یک نزدیک‌تر انتخاب می‌شوند.
۵- اگر تصمیم‌گیرنده تاحدودی خوشبین باشد، با انتخاب $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ دسته جواب‌هایی متمایل به جواب خوشبینانه به‌دست می‌آید. عدد λ، نزدیک‌تر به صفر به معنای خوشبینی بیش‌تر بازیکن رهبر است.
با استفاده از شرایط بهینگی کاروش–کان–تاکر، مسئله‌ی پارامتری دوسطحی (P_7) به مسئله‌ی تک‌سطحی زیر تبدیل می‌شود.

$$(P_8):$$
$$\max_{x_1,x_2} \lambda(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{11k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{12k_2})_\alpha^L x_{2k_2}) + (1-\lambda)(\sum_{k_1=1}^{n_1}(c_{11k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(c_{12k_2})_\alpha^R x_{2k_2})$$
$$s.t. \ (1-\lambda)(\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})_\alpha^L x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})_\alpha^L x_{2k_2}) + \lambda(\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})_\alpha^R x_{1k_1} + \sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})_\alpha^R x_{2k_2})$$
$$\leq \lambda(b_i)_\alpha^L + (1-\lambda)(b_i)_\alpha^R, \ \ i = 1, \ldots, m$$

$$v_i((1-\lambda)\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})^L_\alpha x_{1k_1}+\lambda\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{i1k_1})^R_\alpha x_{1k_1}+(1-\lambda)\sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})^L_\alpha x_{2k_2}+\lambda(\sum_{k_2=1}^{n_2}(a_{i2k_2})^R_\alpha x_{2k_2}$$
$$-\lambda(b_i)^L_\alpha-(1-\lambda)(b_i)^R_\alpha)=0,\ \ i=1,\dots,m$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i((1-\lambda)(a_{i1k_1})^L_\alpha+\lambda(a_{i1k_1})^R_\alpha)+u_1\geq\lambda(c_{21k_1})^L_\alpha+(1-\lambda)(c_{21k_1})^R_\alpha,\ \ k_1=1,\dots,n_1$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i((1-\lambda)(a_{i2k_2})^L_\alpha+\lambda(a_{i2k_2})^R_\alpha)+u_2\geq\lambda(c_{22k_2})^L_\alpha+(1-\lambda)(c_{22k_1})^R_\alpha,\ \ k_2=1,\dots,n_1$$
$$\sum_{k_1=1}^{n_1}x_{1k_1}=1$$
$$\sum_{k_2=1}^{n_2}x_{2k_2}=1$$
$$x_{1k_1}\geq 0,x_{2k_2}\geq 0,v_i\geq 0,\ \ i=1,\dots,m\quad k_1=1,\dots,n_1,\quad k_2=1,\dots,n_2.$$

u_1 و u_2 نامقید هستند.
با حل مسئله‌ی (P_8) به‌ازای λهای مختلف، جواب‌های متفاوت به‌دست می‌آید و راهبرد بهینه‌ی رهبر و پیرو در حالت‌های مختلف محاسبه می‌شود.

۵ الگوریتم تعاملی حل مسئله‌ی استاکلبرگ با پارامترهای فازی

اکنون با حل مسائل (P_4)، (P_6) یا (P_8) (برای مقدار مفروضی از $0 \leq \lambda \leq 1$ که با توجه به میزان خوشبینی یا بدبینی تصمیم‌گیرنده در نظرگرفته می‌شود) به ازای هر α می‌توان به‌ترتیب یک جواب بدبینانه، خوشبینانه یا میانی را به‌دست آورد. در زیر یک الگوریتم تعاملی ارائه شده است که می‌توان مسئله را در گام‌های مختلف (به‌ازای مقادیر مختلف α) حل کرد و در هر مرحله‌ای که تصمیم‌گیرنده از جواب رضایت داشته باشد، متوقف شد.
گام ۱- ابتدا با توجه به کاملاً خوشبین یا کاملاً بدبین بودن تصمیم‌گیرنده یکی از مسائل (P_4) یا (P_6) به‌ازای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ حل و جواب‌های حاصل به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شود (در صورتی که این تشخیص ممکن نباشد یا این‌که تصمیم‌گیرنده کاملاً خوشبین یا بدبین نباشد، ابتدا مسئله (P_8) را به‌ازای $\lambda = \frac{1}{2}$ حل می‌کنیم و جواب‌های حاصل را به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌دهیم. بعد از تشخیص این‌که به چه نوع جوابی تمایل دارد می‌توان با تغییر λ جواب مناسب‌تر برای تصمیم‌گیرنده را یافت). اگر تصمیم‌گیرنده از جواب رضایت داشته باشد، حل مسئله به اتمام رسیده است. در غیر این‌صورت به گام ۲ می‌رویم.
گام ۲- مسائل (P_4)، (P_6) یا (P_8) که با مقدارگذاری λ مدنظر تصمیم‌گیرنده به‌دست آمده است برای $\alpha = \frac{n}{10}$، $n = 1, \dots, 9$، مرحله به مرحله حل می‌شود. در هر تغییر n جواب مسائل (P_4) یا (P_6) یا (P_8) را محاسبه و به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌کنیم. اگر جواب حاصل مورد رضایت تصمیم‌گیرنده بود، حل مسئله تمام است.
گام۳- چنانچه به‌ازای هیچ یک از مقادیر $\alpha = \frac{n}{10}$، $n = 0, \dots, 10$، رضایت تصمیم‌گیرنده جلب نشد، بررسی می‌کنیم نظر وی به کدام دسته جواب نزدیک‌تر است در صورت نیاز با تغییر $0 < \lambda < 1$ (به‌عنوان مثال با $\lambda = \frac{3}{4}$ یا $\lambda = \frac{1}{4}$ در گام ۱)، مسئله (P_8) را به‌ازای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ حل و جواب‌ها را به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌کنیم. اگر هم‌چنان نظرش تأمین نشد، او باید بهترین جواب را از بین جواب‌های حاصل در مراحل ۱تا۳ انتخاب نماید.

مثال **۱.۵**. شهرداری یک منطقه ۳ تابلو تبلیغاتی دارد. شهرداری برای اجاره دادن تابلوهایش با دو شرکت تبلیغاتی کار می‌کند و با آن‌ها قرارداد می‌بندد. شرکت۱، از آن‌جا که سابقه‌ی کار طولانی‌تر و رزومه‌ی قوی‌تری از شرکت ۲ دارد، در قرارداد امتیازات بالاتری از شهرداری دریافت می‌کند. اولویت شهرداری برای اجاره‌ی تابلوها که به‌صورت پیش‌اجاره است شرکت ۱ می‌باشد، به این معنا که اگر هر دو شرکت به‌طور همزمان مشتری داشته باشند شرکت ۱ امکان اجاره دادن تابلوها را دارد. اگر شرکت ۱ نتواند مشتری مناسبی برای تابلوها پیدا کند، شرکت ۲ می‌تواند تابلوها را اجاره دهد. هر دو شرکت متناسب با مدت زمانی که شرکت دیگر روی تابلوها تبلیغات دارند متحمل زیان می‌شوند زیرا آن شرکت هزینه‌های جاری (دستمزد کارمندان و دیگر هزینه‌های بالاسری) را در این مدت می‌پردازد در حالی‌که در آن زمان درآمدی از تابلو(ها) ندارد. هر دو شرکت می‌خواهند بدانند با توجه به هزینه‌ها و سود حاصل از تبلیغات بهتر است چه راهبردی برای تبلیغات روی سه تابلو داشته باشند. اگر کل امکانات (نفرساعت) هر شرکت را، یک واحد در نظر بگیریم، دو شرکت با چه راهبردی آن را به تابلوها اختصاص دهند تا بیشترین سود را به‌دست آورند؟
متغیرهای مسئله x_{1j} و x_{2j}، به معنای تخصیص کسری از امکانات شرکت‌های ۱ و۲ به تابلوهای شماره $j = 1, 2, 3$ هستند که اعدادی در بازه‌ی $[0, 1]$ می‌باشند. ضرایب $\tilde{c}_{1j}$ و $\tilde{c}_{2j}$، سود حاصل از اجرای تبلیغات در تابلو شماره‌ی j توسط شرکت ۱ و ۲ می‌باشند. میزان خسارت شرکت اول هنگامی‌که تابلو در اختیارش نیست، به‌ازای هر واحد کامل از زمان (امکانات) را با $\tilde{c}^t_{1j}$ نشان می‌دهیم. در مدت زمانی که تابلو(ها) توسط شرکت ۱، رزرو شده‌اند، شرکت شماره ۲، به علت هزینه‌های جاری (نیروی انسانی و دفتر و مانند آن) متحمل زیان می‌شود. زیان شرکت ۲، به ازای هر واحد کامل

از زمان(امکانات) را با $\tilde{c}^t_{2j}$ نشان می‌دهیم. همچنین ضرایب $\tilde{a}_{1j}$ و $\tilde{a}_{2j}$ هزینه‌هایی هستند که شرکت‌های ۱ و ۲ برای اجرا و نصب تبلیغات در تابلو شماره‌ی $j = 1, 2, 3$ انجام می‌دهند؛ این هزینه‌ها شامل: مبلغ اجاره‌ی پرداختی به شهرداری به‌ازای تابلو شماره j، هزینه‌ی پرسنل، طراحی، اجرا و دیگر هزینه‌های بالا سری می‌باشد. هزینه‌ی برآورد شده‌ی معقولانه برای اجرای تبلیغات در تابلوها، حداکثر به میزان $\tilde{b}$ است.
فرض کنید ضرایب سود–زیان، هزینه و همچنین ضرایب قیدی، به‌صورت اعداد تقریبی و نادقیق، برحسب برآوردهای گذشته با اندکی افزایش تعیین و به‌صورت اعداد فازی مثلثی مطابق جدول‌های ۱ و ۲ داده شده‌اند و $\tilde{b} = (1.7, 1.8, 2.1)$.
مسئله (P_1) به‌ازای این داده‌ها به‌صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

جدول ۱: ضرایب تابع هدف در مثال ۱.۵

i	$\tilde{c}_{i1}$	$\tilde{c}_{i2}$	$\tilde{c}_{i3}$	$\tilde{c}^t_{i1}$	$\tilde{c}^t_{i2}$	$\tilde{c}^t_{i3}$
۱	$(3, 3.2)$	$(4.7, 4.9, 5.3)$	$(1.9, 2.1)$	$(-0.4, -0.2, -0.1)$	$(-0.6, -0.4)$	$(-0.4, -0.2)$
۲	$(2.6, 3)$	$(4.6, 4.7, 4.9)$	$(1.7, 1.9)$	$(-0.5, -0.2, -0.1)$	$(-0.4, -0.2)$	$(-0.3, -0.1)$

جدول ۲: ضرایب محدودیت‌ها در مثال ۱.۵

j	$\tilde{a}_{1j}$	$\tilde{a}_{2j}$
۱	$(1.2, 1.3, 1.5)$	$(1.2, 1.4)$
۲	$(0.8, 1)$	$(2.2, 2.6)$
۳	$(0.6, 1)$	$(0.7, 0.8, 1.1)$

$$\max_{x_{11}, x_{12}, x_{13}} \ (3, 3.2)x_{11} + (4.7, 4.9, 5.3)x_{12} + (1.9, 2.1)x_{13} + (-0.4, -0.2, -0.1)x_{21}$$
$$+ (-0.6, -0.4)x_{22} + (-0.4, -0.2)x_{23}$$

که $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\max_{x_{21}, x_{22}, x_{23}} \ (2.6, 3)x_{21} + (4.6, 4.7, 4.9)x_{22} + (1.7, 1.9)x_{23} + (-0.5, -0.2, -0.1)x_{11}$$
$$+ (-0.4, -0.2)x_{12} + (-0.3, -0.1)x_{13}$$
$$s.t.$$
$$(1.2, 1.3, 1.5)x_{11} + (2, 2.3, 2.7)x_{12} + (0.6, 1)x_{13} + (1.2, 1.4)x_{21} + (0.8, 1)x_{22}$$
$$+ (0.7, 0.8, 1.1)x_{23} \leq (1.7, 1.8, 2.1)$$
$$x_{1j}, x_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

در اینجا فرض می‌کنیم تصمیم‌گیرنده کاملاً خوشبین باشد. به‌ازای داده‌های این مسئله، مسئله‌ی (P_6) را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$(P_6):$$
$$\max_{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}} (3.2 - 0.1\alpha)x_{11} + (5.3 - 0.4\alpha)x_{12} + (2.1 - 0.1\alpha)x_{13}$$
$$+ (-0.1 - 0.1\alpha)x_{21} + (-0.4 - 0.1\alpha)x_{22} + (-0.2 - 0.1\alpha)x_{23}$$
$$s.t.$$
$$(1.2 + 0.1\alpha)x_{11} + (2 + 0.3\alpha)x_{12} + (0.6 + 0.2\alpha)x_{13}$$
$$+ (1.2 + 0.1\alpha)x_{21} + (0.8 + 0.1\alpha)x_{22} + (0.7 + 0.1\alpha)x_{23} \leq 2.1 - 0.3\alpha$$
$$v_1((1.2 + 0.1\alpha)x_{11} + (2 + 0.3\alpha)x_{12} + (0.6 + 0.2\alpha)x_{13}$$
$$+ (1.2 + 0.1\alpha)x_{21} + (0.8 + 0.1\alpha)x_{22} + (0.7 + 0.1\alpha)x_{23} - 2.1 + 0.3\alpha) = 0$$
$$v_1(1.2 + 0.1\alpha)x_{11} + u_1 \geq 3 - 0.2\alpha$$
$$v_1(2 + 0.3\alpha)x_{12} + u_1 \geq 4.9 - 0.2\alpha$$
$$v_1(0.6 + 0.2\alpha)x_{13} + u_1 \geq 1.9 - 0.1\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&v_1(1.2+0.1\alpha)x_{21}+u_2 \geq -0.1-0.1\alpha\\
&v_1(0.8+0.1\alpha)x_{22}+u_2 \geq -0.2-0.1\alpha\\
&v_1(0.7+0.1\alpha)x_{23}+u_2 \geq -0.1-0.1\alpha\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}=1\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}=1\\
&v_1 \geq 0, x_{1j} \geq 0, x_{2j} \geq 0, \quad j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

جواب‌های مسئله‌ی خوشبینانه به‌ازای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.
جواب مسئله‌ی (P_6) برای $\alpha = 0$:

$$x_{11}=0, x_{12}=0.5714, x_{13}=0.4386, x_{21}=0, x_{22}=0, x_{23}=1.$$

مقدار سود شرکت اول ۳٫۶۲۹ واحد و مقدار سود شرکت دوم ۱٫۷۴۳است.
جواب مسئله(P_6) برای $\alpha = 1$:

$$x_{11}=0.6, x_{12}=0.4, x_{13}=0, x_{21}=0, x_{22}=0, x_{23}=1.$$

مقدار سود شرکت اول ۳٫۵۲ واحد و مقدار سود شرکت دوم ۱٫۸۶ است.
در صورت عدم رضایت تصمیم‌گیرنده از این جواب‌ها، با تغییرα جواب‌های دیگر مسئله‌ی (P_6) به‌دست می‌آیند.

۶ مطالعه موردی

در اینجا نمونه‌ای واقعی در قرارداد پیش‌خرید تولید کیسه‌ی پلی‌اتیلن بین شرکت پتروشیمی بجنورد و رقابت بین دو شرکت، تولیدکننده‌ی آفاق فوم و کیسه کشاورز مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به تنوع و تعدد تولیدات پتروشیمی، نوع کیسه‌های حمل مواد اهمیت زیادی دارد. کیسه‌های حمل انواع مختلفی دارند که مهمترین و پرکاربردترین آن‌ها در صنعت پتروشیمی کیسه‌های پلی‌اتیلن هستند. این دو شرکت در رقابت با هم برای اخذ قراردادی با تعداد کیسه‌ی بالاتر هستند. هر کدام از شرکت‌ها محدودیت‌هایی از نظر بودجه، تعداد دستگاه و نیروی متخصص، مواد اولیه و بسیاری فاکتورهای دیگر دارند.
شرکت آفاق فوم باتوجه به سابقه‌ی همکاری موفق و طولانی مدت با شرکت پتروشیمی بجنورد، نقش رهبر و شرکت کیسه کشاورز نقش پیرو را دارد. در این مطالعه چند شرکت پیرو دیگر نیز وجود داشتند اما بزرگترین و مهمترین رقیب در نظرگرفته شده است. به علت نادقیق بودن اعداد آن‌ها را به‌صورت اعداد فازی $L-R$ در نظر می‌گیریم. هر دو شرکت با هدف بیشینه‌کردن سود وارد رقابت می‌شوند. نوع قرارداد با شرکت رهبر به‌گونه‌ای است که اگر به هر دلیلی نتواند میزان کیسه لازم را تهیه کند از شرکت پیرو تهیه می‌شود و شرکت رهبر موظف به پرداخت وجهی بابت جریمه به شرکت پتروشیمی است. دو نوع کیسه پلی‌اتیلنی تولید می‌شود آن‌ها را با $j = 1, 2$ نشان می‌دهیم. کل میزان کیسه‌ی تولید شده در هر شرکت را یک واحد کامل در نظرگرفته و میزان تولید کیسه‌ی نوع j در شرکت i را با x_{ij} نشان می‌دهیم که $i = 1$ مربوط به شرکت آفاق فوم و $i = 2$ مربوط به شرکت کیسه کشاورز می‌باشد. فرض کنید سود حاصل از تولیدx_{ij} واحد کیسه c_{ij} باشد. هر شرکت با محدودیت‌ها و مشکلاتی از قبیل نبود یا کمبود مواد اولیه، مشکلات مربوط به حمل و نقل و انبارداری (پر بودن انبار در زمانی که امکان تولید بیشتر وجود دارد)، نوسانات قیمت که موجب می‌شود گاهی تولید همراه با ضرر باشد و...) روبه‌رو است. مهمترین محدودیتهایی که شرکت آفاق فوم با آن مواجه است محدودیت در بودجه و ظرفیت متخصص در تولید محصول، شامل میزان ظرفیت ایجاد شده از نیروی کار متخصص و دستگاه‌های ویژه می‌باشد. شرکت کیسه کشاورز نیز با این دو محدودیت مواجه است. یکی از محدودیت‌های بسیار مهم میزان تولید با در نظرگرفتن نیاز شرکت پتروشیمی می‌باشد. اگر مقدار تولید شده‌ی هر کدام از انواع کیسه‌ها بیشتر از نیاز شرکت پتروشیمی باشد، شرکت‌ها برای فروش کیسه‌ها دچار مشکل می‌شوند (به علت محدودیت در ظرفیت انبار امکان ذخیره‌سازی برای سفارشات بعدی وجود ندارد و مازاد تولید نیاز به فروش در بازار آزاد و بازاریابی دارد که شرکت‌ها چنین هدفی را دنبال نمی‌کنند) و با توجه به فضایی که هر نوع کیسه اشغال می‌کند، با محدودیت در میزان پذیرش انبار شرکت پتروشیمی (در زمانی که امکان تولید بیشتر وجود دارد) نیز مواجه هستیم.

مسئله (P_1) با داده‌های این مثال به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_{11},x_{12}} (3, 4.2)x_{11} + (5, 5.2)x_{12} + (-1, -2)x_{21} + (-0.2, 0)x_{22}\\
&s.t.\\
&\ (1.2, 1.4)x_{11} + (2, 2.4)x_{12} \leq (3, 4, 5.4)\\
&\ (2, 2.1)x_{11} + (2.3, 2.8)x_{12} \leq (5, 5.2, 6)
\end{aligned}
$$

که $x_2 = (x_{21}, x_{22})$ از حل مسئله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_{21},x_{22}} \ (1.4, 2.4)x_{21} + (2.8, 3.6)x_{22}\\
&s.t.\\
&\ (1.2, 1.4)x_{21} + (1.2, 1.6)x_{22} \leq (1.4, 1.7)\\
&\ (1.6, 1.8)x_{21} + (3.1, 3.4)x_{22} \leq (2.7, 2.8)\\
&\ (2.2, 2.5)x_{11} + (2.2, 2.6)x_{21} \leq (3.7, 4.7)\\
&\ (2.2, 2.4)x_{21} + (3.2, 3.6)x_{22} \leq (3.4, 4.7)\\
&\ (0.2, 0.4)(x_{11} + x_{21}) + (0.2, 0.6)(x_{21} + x_{22}) \leq (2.5, 4.6)\\
&\ x_{11} + x_{12} = 1\\
&\ x_{21} + x_{22} = 1\\
&x_{1j}, x_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

جریمه‌ای که شرکت آفاق فوم باید در صورت اهمال و یا به هر دلیلی بابت تأخیر در تحویل کیسه‌ها به شرکت پتروشیمی بپردازد در تابع هدف سطح اول (رهبر) لحاظ شده است. محدودیت اول و دوم که محدودیت‌های اختصاصی رهبر می‌باشند، به‌ترتیب مربوط به بودجه‌ی اختصاص‌یافته برای تولید کیسه‌ها و ظرفیت متخصص (شامل نیرو و دستگاه) می‌باشد. محدودیت‌های سوم و چهارم به‌ترتیب مربوط به بودجه و ظرفیت اختصاص‌یافته برای تولید کیسه‌های پیرو و محدودیت‌های پنجم و ششم به‌ترتیب محدودیت میزان نیاز شرکت پتروشیمی به کیسه‌ی نوع ۱ و نوع ۲ می‌باشد. محدودیت هفتم مربوط به ظرفیت انبارداری است و دو محدودیت آخر محدودیت در راهبردهای بازیکنان را نشان می‌دهند.

بعد از حل مسئله، جواب‌های میانی مسئله به‌ازای $\lambda = \frac{1}{2}$ و $\alpha = 0.5$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

جواب مسئله برای $\alpha = 0.5$:

$$x_{11} = 0.8552, x_{12} = 0.1448, x_{21} = 0.6436, x_{22} = 0.3564.$$

مقدار سود شرکت اول ۵/۲۴۳۷ واحد و مقدار سود شرکت دوم ۴/۷۲۶۶ واحد است.

در صورت عدم رضایت تصمیم‌گیرنده از این جواب‌ها، با تغییر α جواب‌های دیگر مسئله به‌دست می‌آیند.

۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله روش حلی برای مسئله‌ی استاکلبرگ دوسطحی با پارامترهای فازی $L - R$ ارائه گردید. برای ارائه‌ی پاسخی مناسب برای تصمیم‌گیرنده، الگوریتمی تعاملی ارائه کردیم. تعاملی بودن روش‌حل، کمک می‌کند تا تصمیم‌گیرنده بتواند بهترین جواب مناسب خودش را انتخاب کند. همچنین برای انطباق بیشتر با دنیای واقعی پارامترها را غیرقطعی در نظرگرفتیم. غیرقطعی بودن پارامترها به علت نادقیق بودن اطلاعات و ارزیابی‌های انجام شده و تغییرات احتمالی برای آینده، اتفاق می‌افتد. در واقع در نظرگرفتن مقادیر دقیق برای پارامترها منجر به فاصله از واقعیت می‌گردد.

گاهی اوقات در دنیای واقعی با مسائلی با تعداد قیود و یا محدودیت‌های بسیار زیاد مواجه می‌شویم که روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی کارایی ندارند و باید از روش‌های مخصوص مسائل با ابعاد بزرگ مانند روش‌های ابتکاری استفاده نمود. طبیعتاً روش ارائه شده در این مقاله نیز از این قاعده مستثنی نیست. علاوه بر این، برای تبدیل مسئله‌ی دوسطحی به یک‌سطحی از شرایط بهینگی کاروش–کان–تاکر استفاده کرده‌ایم و همان‌گونه که می‌دانیم این شرایط برای مسائل بهینه‌سازی خطی(و درحالت کلی‌تر، غیرخطی محدب) شرایط لازم و کافی برای بهینگی می‌باشند. از این‌رو اگر مسئله‌ی سطح دو غیرخطی و نامحدب باشد یا دارای متغیرهای گسسته از قبیل صحیح یا دودویی باشد، روش ارائه شده کارایی ندارد. علاوه بر این، پارامترهای مسئله فازی $L - R$ در نظرگرفته شده‌اند، بنابراین برای مسائل دارای سایر انواع پارامترهای غیرقطعی از قبیل فازی نوع ۲ و فازی شهودی قابل استفاده نیست. بدیهی است که هریک از این موارد می‌تواند موضوع پژوهش‌های بعدی برای توسعه روش ارائه شده باشد.

فهرست منابع

[۱] اسماعیلی، سمانه، حسن‌پور، حسن، بیگدلی، حمید، ۱۳۹۹. برنامه‌ریزی الفبایی برای حل بازی امنیتی با عایدی‌های فازی و محاسبه‌ی راهبرد فریب بهینه. مجله علمی پژوهشی آینده پژوهشی دفاعی، ۵(۱۶)، صص. ۱۰۸-۸۹.

[۲] بیگدلی، حمید، حسن‌پور، حسن، طیبی، جواد، ۱۳۹۵. جواب‌های خوشبینانه و بدبینانه بازی‌های ماتریسی تک هدفی و چندهدفی با عایدی‌های فازی و تحلیلی برخی موارد نظامی. مجله علمی پژوهشی علوم و فناوری‌های پدافند نوین، (۸)۲، صص. ۱۴۵-۱۳۳.

[3] Abedian, M., Amindoust, A., Maddahi, R., and Jouzdani, j., 2022. A Nash equilibrium based decision-making method for performance evaluation: a case study. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 13*, pp.5563–5579. doi:10.1007/s12652-021-03188-8

[4] Aghababaei, B., Pishvaee, M.S. and Barzinpour, F., 2022. A fuzzy bi-level programming approach to scarce drugs supply and ration planning problem under risk. *Fuzzy Sets and Systems, 434*, pp.48–72. doi:10.1016/j.fss.2021.02.021

[5] Ali, M.Y., Sultana , A. and Khan, A., 2016. Comparison of Fuzzy Multiplication Operation on Triangular Fuzzy Number. *IOSR Journal of Mathematics, 12*(4), pp. 35-41. doi:10.9790/5728-1204013541

[6] Bigdeli, H., Hassanpour, H., and Tayyebi, J., 2019. Multiobjective security game with fuzzy payoffs. *Iranian Journal of Fuzzy Systems, 16*(1), pp.89-101. doi:10.22111/IJFS.2019.4486

[7] Chakeri, A., Sheikholeslam, F., 2013. Fuzzy Nash Equilibriums in Crisp and Fuzzy Games, *Springer Verlag, Berlin, 21*(1), pp.171-176. doi:10.1109/TFUZZ.2012.2203308

[8] Change, F., Zhou, G. and et al., 2020. A Stackelberg game-theory approach for maintenance grouping of compelex multi-component system under smart product-service paradigm, *Procedia Manufacturing , 49*, pp.173-179. doi:10.1016/j.promfg.2020.07.015

[9] Dahiya, A., and Gupta, B. B., 2021. A reputation score policy and Bayesian game theory based incentivized mechanism for DDoS attacks mitigation and cyber defense. *Future Generation Computer Systems, 117*, pp.193-204. doi:10.1016/j.future.2020.11.027

[10] Fudenberg, D., Tirole, J., 1991. Game Theory. *The MIT Pres*.

[11] Haywood,O. G., 1989. Military decision and game theory. *Journal of the Operations Research Society of America, 4*(2), pp.365-385. doi: 10.1287/opre.2.4.365

[12] Ilies, R., Morgeson, F.P. and Nahrgang, J. D., 2005. Authentic leadership and eudemonic well-being: Understanding leaderfollower outcomes. *Leadership Quarterly, 16* pp. 373-394. doi:10.1016/j.leaqua.2005.03.002

[13] Isaacs, R., 1952. Differential games I, II, III, IV, RAND Corporation Research Memorandum, RM-1391, 1399, 1411, 1468.

[14] Li, Z., Marelli, D., Fu, M., Cai, Q. and Meng, W., 2021. Linear quadratic Gaussian Stackelberg game under asymmetric information patterns. *Automatica, 125*, 109406. doi:10.1016/j.automatica.2020.109406

[15] Lu, Q., Guo , Q., and Zeng , W., 2023. Optimal dispatch of community integrated energy system based on Stackelberg game and integrated demand response under carbon trading mechanism. *Applied Thermal Engineering, 219*, 119508. doi:10.1016/j.applthermaleng.2022.119508

[16] Lucchetti, R., Moretti S., Patrone F., Radrizzani P., 2010. The Shapley and Banzhaf values in microarray games Comput. *Oper, Res, 37*(8), pp.1406-1412. doi:10.1016/j.cor.2009.02.020

[17] Mazalov, V., 2014. Mathematical game theory and applications. *John Wiley Sons*

[18] Meng , Y., Wang , Y., Sun , S. and et al., 2023. Multi-objective optimal dispatching of demand response-enabled microgrid considering uncertainty of renewable energy generations based on two-level iterative strategy. *Energy Reports , 9*, pp.1842–1858. doi:10.1016/j.egyr.2022.12.149

[19] Neumann, J. V., Morgenstern,O., 1944. Theory of Games and Economic Behavior. *Wiley, New York*

[20] Nie, P. Y., and Zhang, P. A., 2008. A note on Stackelberg games. *In 2008 Chinese Control and Decision Conference* pp. 1201-1203.doi:10.1109/CCDC.2008.4597505

[21] Lo Prete, C. L. and Hobbs, B. F., 2016. A cooperative game theoretic analysis of incentives for micro grids in regulated electricity markets. *Applied Energy*, pp.524–541. doi: 10.1016/j.apenergy.2016.01.099

[22] Safari, G., Hafezalkotob, A. and Khalilzadeh, M. A., 2018. Nash bargaining model for flow shop scheduling problem under uncertainty: a case study from tire manufacturing in Iran. *Int J Adv Manuf Technol, 96*, pp.531–546. doi:10.1007/s00170-017-1461-0

[23] Sakawa, M., 2013. Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization. *Springer science business media*,

[24] Saleheen, F., Won, C.H., 2019, Statistical Stackelberg game control: Open-loop minimal cost variance case *Automatica, 101*, pp.338–344.

[25] Tasnim, S., Sarimuthu, C. R., Lan, B. L., and Yang, X., 2021. Two-person cooperative uncertain differential game with transferable payoffs. *Fuzzy Optim Decis Making, 20*, pp.567–594. doi:10.1007/s10700-021-09355-y

[26] Thang, N. K., 2013. NP-hardness of pure Nash equilibrium in Scheduling and Network Design Games. *Theoretical Computer Science, 482*, pp.86-95. doi:10.1016/j.tcs.2012.10.051

[27] Tesoriere, A., 2017. Stackelberg equilibrium with many leaders and followers. *The case of zero fixed costs, Research in Economics, 71*(1), pp.102-117. doi:10.1016/j.rie.2016.11.004

[28] Vector, C. R., Chandra, S., 2005. Fuzzy Mathematical programming and Fuzzy matrix Games. *International Mathematical Forum, 3*(36), pp.1777-1780. doi:10.1007/3-540-32371-6

[29] Stackelberg, H. V., 1952. The Theory of the Market Economy. *Oxford University Press, Oxford, England*.

[30] Wang, X., Teo , K, L., 2021. Generalized Nash equilibrium problem over a fuzzy strategy set. *Fuzzy Sets and Systems, 434*, pp172-184. doi:10.1016/j.fss.2021.06.006

[31] Yaacoub, E., Dawy, Z., 2011. Achieving the Nash bargaining solution in OFDMA uplink using distributed scheduling with limited feedback. *International Journal of Electronics and Communications, 65*(4), pp.320–330. doi:10.1016/j.aeue.2010.03.007

[32] Zaitseva, I., Malafeyev, O., Poddubnaya, N. and et al., 2023. Game-Theoretic Model of Transport Points Territorial Cooperation. *Transportation Research Procedia, 68*(3), pp.4–10. doi:10.1016/j.trpro.2023.01.002

Calculation of pessimistic, optimistic and intermediate strategies in the analysis of a Stackelberg competition under conditions of uncertainty

N. Mirazizi(1) and H. Hassanpour(1) [3] and J. Tayyebi(2)

(1) Department of Mathematics, Faculty of Mathematical sciences and Statistics,University of Birjand, Birjand, Iran
(2) Department of Industrial Engineering, Faculty of Computer and Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

Communicated by: Maziar Salahi

Received: 18 March 2024 Accepted: 22 December 2024

Abstract: In this paper, a bilevel game problem with L-R fuzzy coefficients is studied. Using the concept of alpha-cut, this problem is converted to a bilevel problem with nonfuzzy coefficients. Three kinds of optimistic, pessimistic and intermediate solutions are introduced for the problem, by considering the status of decision makers, and in each case, the bilevel problem is converted to a single-level problem using the Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions. Finally, an interactive algorithm is proposed to obtain the appropriate solution for the decision maker. At the end of the paper, an economic example and a case study for the production of polyethylene bags are given and solved by the proposed algorithm.

Keywords: Stackelberg game, Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions, pessimistic solution, intermediate solution, optimistic solution, fuzzy set theory.

[3] Corresponding author
E-mail addresses: (N. Mirazizi) nmirazizi@birjand.ac.ir, (H. Hassanpour) hhassanpour@birjand.ac.ir (J. Tayyebi) javadtayyebi@birjandut.ac.ir