مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۹۴-۱۰۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2025.46098.2256

$\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق‌های لی پکسیدر روی جبرها

سید خلیل اکرامی [۱]

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران

دبیر مسئول: محمداسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۱۷

چکیده: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر بوده و λ، φ و ψ نگاشت‌هایی خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشند. λ را یک (φ, ψ)- اشتقاق لی پکسیدر می‌نامیم، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\lambda([a_۱, a_۲]) = [\varphi(a_۱), a_۲] + [a_۱, \psi(a_۲)]$، که در آن $[a_۱, a_۲] = a_۱a_۲ - a_۲a_۱$ حاصل‌ضرب لی عناصر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ است. در این مقاله مفهوم یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر را به‌عنوان دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی $\{\Lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ معرفی می‌کنیم که به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n در رابطه

$$\Lambda_n([a_۱, a_۲]) = \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)],$$

صدق می‌کنند. سپس یک شناسه‌سازی از آن بر حسب دنباله‌ای از $\{\varphi_n, \psi_n\}$- اشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\lambda_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ ارائه می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه همه $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\Lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ و مجموعه همه دنباله‌های $\{\lambda_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از $\{\varphi_n, \psi_n\}$- اشتقاق‌های لی پکسیدر وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: جبر، همریختی لی، یکریختی لی، اشتقاق لی، ابراشتقاق لی.

رده‌بندی ریاضی: 16W25, 46L05, 47L57, 47B47.

۱ مقدمه

بررسی اشتقاق‌ها و ابراشتقاق‌ها روی جبرها، C^*-جبرها یا سایر ساختارهای جبری یکی از موضوعات جالب در ریاضی است. در این زمینه نویسندگان زیادی به پژوهش پرداخته و وجوه مختلفی از این موضوع مانند ساختار ابراشتقاق‌ها، پیوستگی آن‌ها، پایداری آن‌ها و ... را در مورد

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(S. Kh. Ekrami) ekrami@pnu.ac.ir

انواع مختلف ابراشتقاق‌ها مانند ابراشتقاق‌های ژوردان، ابراشتقاق‌های داخلی، ابراشتقاق‌های موضعی، ابراشتقاق‌های لی و یا تعمیم‌هایی از آن‌ها مورد بررسی قرار داده‌اند.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر بوده $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک اشتقاق باشد. در این‌صورت دنباله $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی که با $d_0 = I$ و $d_n = \frac{\delta^n}{n!}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شوند، در رابطه لایب‌نیتز تعمیم‌یافته

$$d_n(ab) = \sum_{i=0}^{n} d_i(a) d_{n-i}(b) \tag{1.1}$$

صدق می‌کند. به چنین دنباله $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ابراشتقاق می‌گویند. ابراشتقاق‌ها توسط هاس و اشمیت [۸] معرفی شدند. از این‌رو گاهی آن‌ها را اشتقاق‌های هاس-اشمیت می‌نامند. به عنوان کاربردی از ابراشتقاق‌ها می‌توان به [۱۵] مراجعه کرد که در آن نویسنده از ابراشتقاق‌ها برای مطالعه حل عمومی معادلات دیفرانسیل بالاتر استفاده نموده است. میرزاوزیری در [۱۶] به بررسی ابراشتقاق‌ها روی یک جبر پرداخته و ساختار آنها را بر حسب دنباله‌ای از اشتقاق‌ها روی آن جبر شناسایی نمود. او نشان داد که برای هر ابراشتقاق $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ با $d_0 = I$ روی یک جبر $\mathcal{A}$، دنباله‌ای یکتا از اشتقاق‌های $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} \big(\prod_{j=1}^{i} \frac{1}{r_j + \cdots + r_i}\big)\, \delta_{r_1} \ldots \delta_{r_i} \Big). \tag{2.1}$$

او و همکارانش در مقاله‌های [۱۷] و [۱۸] به ترتیب به بررسی ابراشتقاق‌های اول و ابراشتقاق‌های داخلی روی جبرها پرداخته‌اند. اکرامی در [۴] به بررسی ابراشتقاق‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت پرداخته و ساختار آن‌ها را شناسایی کرد. او نشان داد که اگر $\mathcal{M}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد، آنگاه به ازای هر ابراشتقاق C^*-مدول هیلبرت $\{\varphi_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{n=0}^{\infty}$ با $\varphi_0 = I$ که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x, y, z \in \mathcal{M}$، با رابطه

$$\varphi_n(\langle x, y\rangle z) = \sum_{i+j+k=n} \langle \varphi_i(x), \varphi_j(y)\rangle \varphi_k(z),$$

تعریف می‌شود، یک دنباله یکتا از اشتقاق‌های C^*-مدول هیلبرت $\{\psi_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x, y, z \in \mathcal{M}$، با رابطه

$$\psi_n(\langle x, y\rangle z) = \langle \psi_n(x), y\rangle z + \langle x, \psi_n(y)\rangle z + \langle x, y\rangle \psi_n(z),$$

تعریف می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{k} r_j = n} (-1)^{k-1}\, r_1 \varphi_{r_1} \varphi_{r_2} \ldots \varphi_{r_k} \Big),$$

که در آن مجموع داخلی روی تمام اعداد صحیح مثبت r_j محاسبه می‌شود که $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$. برای بحث در مورد اشتقاق‌ها، ابراشتقاق‌ها، ابراشتقاق‌های ژوردان، ابراشتقاق‌های داخلی، ابراشتقاق‌های اول، ابراشتقاق‌های موضعی، ابراشتقاق‌های لی و تعمیم‌های آنها خواننده می‌تواند به [۱-۸، ۱۰-۱۳، ۱۶، ۱۹، ۲۰] و [۲۱] رجوع نماید.

۲ تعاریف و مقدمات

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$ حاصل‌ضرب لی (جابه‌جاگر) عناصر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ باشد. نگاشت خطی $\ell : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را یک اشتقاق لی می‌نامیم، اگر برای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\ell([a_1, a_2]) = [\ell(a_1), a_2] + [a_1, \ell(a_2)]. \tag{1.2}$$

آشکار است که هر اشتقاق یک اشتقاق لی است. جانسون در [۱۱] ثابت کرد که هر اشتقاق لی پیوسته از یک C^*-جبر $\mathcal{A}$ به یک $\mathcal{A}$-مدول باناخ $\mathcal{M}$ استاندارد است. یعنی می‌توان آن را به شکل $d + \delta$ نوشت که در آن $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک اشتقاق و δ یک نگاشت خطی از $\mathcal{A}$ به‌توی مرکز $\mathcal{A}$ است که مقدار آن در هر جابه‌جاگر برابر صفر است. ماتیو و ویلنا [۱۴] ثابت کردند که هر اشتقاق لی (بدون شرط پیوستگی) روی یک C^*-جبر استاندارد است.

یک دنباله $\{L_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی از جبر $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ با $L_\circ = I$ را یک ابراشتقاق لی می‌نامیم، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر $n \geq \circ$ داشته باشیم

$$L_n([a_۱, a_۲]) = \sum_{i+j=n} [L_i(a_۱), L_j(a_۲)]. \tag{۲.۲}$$

آشکار است که هر ابراشتقاق یک ابراشتقاق لی است. اما برعکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. در [۹] نویسندگان نتیجه جانسون در [۱۱] را گسترش دادند و نشان دادند که هر ابراشتقاق لی روی یک C^*-جبر استاندارد است. آنها نشان دادند که اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر و $Z(\mathcal{A})$ مرکز $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه یک دنباله از نگاشت‌های خطی $\{L_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ روی $\mathcal{A}$ یک ابراشتقاق لی است اگر و فقط اگر یک ابراشتقاق $\{D_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ روی $\mathcal{A}$ و یک دنباله از نگاشت‌های خطی $\{\Delta_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به توی $Z(\mathcal{A})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\Delta_\circ = \circ$ و برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر $n \geq \circ$ داشته باشیم $\Delta_n([a_۱, a_۲]) = \circ$ و $L_n = D_n + \Delta_n$.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر بوده و λ، φ و ψ نگاشت‌هایی خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشند. در این‌صورت

الف) λ را یک (φ, ψ)- همریختی لی پکسیدر می‌نامیم، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\lambda([a_۱, a_۲]) = [\varphi(a_۱), \psi(a_۲)]. \tag{۳.۲}$$

ب) λ را یک (φ, ψ)- اشتقاق لی پکسیدر می‌نامیم، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\lambda([a_۱, a_۲]) = [\varphi(a_۱), a_۲] + [a_۱, \psi(a_۲)]. \tag{۴.۲}$$

تعریف ۲.۲. یک دنباله $\{\Phi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را یک ابراشتقاق لی می‌نامیم، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n داشته باشیم

$$\Phi_n([a_۱, a_۲]) = \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_۱), \Phi_j(a_۲)]. \tag{۵.۲}$$

در این مقاله، ابتدا با انگیزه گرفتن از [۹] مفهوم یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر از یک جبر $\mathcal{A}$ به یک جبر $\mathcal{B}$ را معرفی می‌کنیم، سپس یک شناسه‌سازی از آن را بر حسب یک دنباله از $\{\varphi_n, \psi_n\}$- اشتقاق‌های لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را ارائه می‌دهیم.
یک دنباله $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر نامیده می‌شود، اگر دو ابراشتقاق لی $\{\Phi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ و $\{\Psi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n داشته باشیم $\Lambda_n([a_۱, a_۲]) = \sum_{i+j=n}[\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)]$.
هنگامی که $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر است، $\Lambda_\circ : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک $\{\Phi_\circ, \Psi_\circ\}$- همریختی لی پکسیدر است. یعنی برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ داریم $\Lambda_\circ([a_۱, a_۲]) = [\Phi_\circ(a_۱), \Psi_\circ(a_۲)]$. این مطلب نتیجه می‌دهد که نگاشت $\widetilde{\Lambda}_\circ : \mathcal{A}/\ker(\Lambda_\circ) \to \mathcal{B}$ که با ضابطه $\widetilde{\Lambda}_\circ(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Lambda_\circ(a)$ تعریف می‌شود، یک $\{\widetilde{\Phi}_\circ, \widetilde{\Psi}_\circ\}$- همریختی لی پکسیدر است که در آن $\widetilde{\Phi}_\circ, \widetilde{\Psi}_\circ : \mathcal{A}/\ker(\Lambda_\circ) \to \mathcal{B}$ نگاشت‌های خطی هستند که با ضابطه $\widetilde{\Phi}_\circ(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Phi_\circ(a)$ و $\widetilde{\Psi}_\circ(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Psi_\circ(a)$ تعریف می‌شوند. در واقع برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_\circ([a_۱ + \ker(\Lambda_\circ), a_۲ + \ker(\Lambda_\circ)]) &= \widetilde{\Lambda}_\circ([a_۱, a_۲] + \ker(\Lambda_\circ)) \\ &= \Lambda_\circ([a_۱, a_۲]) \\ &= [\Phi_\circ(a_۱), \Psi_\circ(a_۲)] \\ &= [\widetilde{\Phi}_\circ(a_۱ + \ker(\Lambda_\circ)), \widetilde{\Psi}_\circ(a_۲ + \ker(\Lambda_\circ))].\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

بنابراین اگر $\Lambda_\circ$ پوشا باشد، آنگاه $\widetilde{\Lambda}_\circ$ یک $\{\widetilde{\Phi}_\circ, \widetilde{\Psi}_\circ\}$- یکریختی لی پکسیدر است. به‌علاوه اگر $\ker(\Lambda_\circ) \subseteq \ker \Lambda_n (n \in \mathbb{N})$، آنگاه نگاشت $\widetilde{\Lambda}_n : \mathcal{A}/\ker(\Lambda_\circ) \to \mathcal{B}$ که با ضابطه $\widetilde{\Lambda}_n(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Lambda_n(a)$ تعریف می‌شود، یک نگاشت خطی خوش‌تعریف است.

۳ شناسه‌سازی $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق‌های لی پکسیدر

در این مقاله $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر را نشان می‌دهند. ابتدا مفهوم $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\{\Phi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ و $\{\Psi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ دو ابراشتقاق لی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشند. یک دنباله $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ از نگاشت‌های خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر نامیده می‌شود، اگر برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n داشته باشیم

$$\Lambda_n([a_۱, a_۲]) = \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)]. \tag{۱.۳}$$

از قضیه بعدی به‌طور گسترده برای اثبات قضایای پس از آن استفاده خواهد شد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوری‌که $\Lambda_\circ(\mathcal{A}) = \Phi_\circ(\mathcal{A}) = \Psi_\circ(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\ker(\Lambda_\circ) \subseteq \ker \Lambda_n$، $\ker(\Phi_\circ) \subseteq \ker \Phi_n$ و $\ker(\Psi_\circ) \subseteq \ker \Psi_n$. در این‌صورت یک دنباله $\{\lambda_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از $\{\varphi_n, \psi_n\}$- اشتقاق‌های لی پکسیدر وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم

$$\begin{cases} (n+۱)\widetilde{\Phi}_{n+۱} = \sum_{k=\circ}^{n} \varphi_{k+۱}\widetilde{\Phi}_{n-k}, \\ (n+۱)\widetilde{\Psi}_{n+۱} = \sum_{k=\circ}^{n} \psi_{k+۱}\widetilde{\Psi}_{n-k}, \\ (n+۱)\widetilde{\Lambda}_{n+۱} = \sum_{k=\circ}^{n} \lambda_{k+۱}\widetilde{\Lambda}_{n-k}. \end{cases} \tag{۲.۳}$$

اثبات. چون $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ است، دنباله‌های $\{\Phi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ و $\{\Psi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ ابراشتقاق‌های لی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ هستند. چون $\Phi_\circ$ و $\Psi_\circ$ پوشا هستند، همریختی‌های لی $\widetilde{\Phi}_\circ : \mathcal{A}/\ker(\Phi_\circ) \to \mathcal{B}$ و $\widetilde{\Psi}_\circ : \mathcal{A}/\ker(\Psi_\circ) \to \mathcal{B}$ که با ضابطه $\widetilde{\Phi}_\circ(a + \ker(\Phi_\circ)) = \Phi_\circ(a)$ و $\widetilde{\Psi}_\circ(a + \ker(\Psi_\circ)) = \Psi_\circ(a)$ تعریف می‌شوند، دو یکریختی لی هستند. بنابراین $\widetilde{\Phi}_\circ^{-۱}\Phi_\circ(a) = a + \ker(\Phi_\circ)$ و $\widetilde{\Psi}_\circ^{-۱}\Psi_\circ(a) = a + \ker(\Psi_\circ)$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\widetilde{\Phi}_۱(\widetilde{\Phi}_\circ^{-۱}\Phi_\circ(a)) = \widetilde{\Phi}_۱(a + \ker(\Phi_\circ)) = \Phi_۱(a), \tag{۳.۳}$$

$$\widetilde{\Psi}_۱(\widetilde{\Psi}_\circ^{-۱}\Psi_\circ(a)) = \widetilde{\Psi}_۱(a + \ker(\Psi_\circ)) = \Psi_۱(a). \tag{۴.۳}$$

همچنین چون $\Lambda_\circ$ پوشا است، $\{\widetilde{\Phi}_\circ, \widetilde{\Psi}_\circ\}$- همریختی لی پکسیدر $\widetilde{\Lambda}_\circ : \mathcal{A}/\ker(\Lambda_\circ) \to \mathcal{B}$ که با ضابطه

$$\widetilde{\Lambda}_\circ(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Lambda_\circ(a),$$

تعریف می‌شود، یک $\{\widetilde{\Phi}_\circ, \widetilde{\Psi}_\circ\}$- یکریختی لی پکسیدر است. بنابراین $\widetilde{\Lambda}_\circ^{-۱}\Lambda_\circ(a) = a + \ker(\Lambda_\circ)$ و در نتیجه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $\widetilde{\Lambda}_۱(\widetilde{\Lambda}_\circ^{-۱}\Lambda_\circ(a)) = \widetilde{\Lambda}_۱(a + \ker(\Lambda_\circ)) = \Lambda_۱(a)$.

اکنون از استقراء روی n استفاده می‌کنیم تا نتیجه را اثبات نماییم. برای $n = \circ$ نگاشت‌های $\varphi_۱$، $\psi_۱$ و $\lambda_۱$ را روی $\mathcal{B}$ به‌صورت $\varphi_۱ = \widetilde{\Phi}_۱\widetilde{\Phi}_\circ^{-۱}$، $\psi_۱ = \widetilde{\Psi}_۱\widetilde{\Psi}_\circ^{-۱}$ و $\lambda_۱ = \widetilde{\Lambda}_۱\widetilde{\Lambda}_\circ^{-۱}$ تعریف کنید. فرض کنیم $b_۱, b_۲ \in \mathcal{B}$ دو عنصر دلخواه باشند. چون $\Phi_\circ$ و $\Psi_\circ$ پوشا هستند، عناصر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\Phi_\circ(a_۱) = b_۱$ و $\Psi_\circ(a_۲) = b_۲$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \lambda_۱([b_۱, b_۲]) &= \widetilde{\Lambda}_۱\widetilde{\Lambda}_\circ^{-۱}([\Phi_\circ(a_۱), \Psi_\circ(a_۲)]) \\ &= \widetilde{\Lambda}_۱\widetilde{\Lambda}_\circ^{-۱}(\Lambda_\circ([a_۱, a_۲])) \\ &= \Lambda_۱([a_۱, a_۲]) \\ &= [\Phi_۱(a_۱), \Psi_\circ(a_۲)] + [\Phi_\circ(a_۱), \Psi_۱(a_۲)] \\ &= [\widetilde{\Phi}_۱\widetilde{\Phi}_\circ^{-۱}(\Phi_\circ(a_۱)), \Psi_\circ(a_۲)] + [\Phi_\circ(a_۱), \widetilde{\Psi}_۱\widetilde{\Psi}_\circ^{-۱}(\Psi_\circ(a_۲))] \\ &= [\varphi_۱(b_۱), b_۲] + [b_۱, \psi_۱(b_۲)]. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

بنابراین $\lambda_۱$ یک $\{\varphi_۱, \psi_۱\}$- اشتقاق لی پکسیدر روی $\mathcal{B}$ است. به‌علاوه معادلات (۲.۳) برای $n = \circ$ برقرار هستند.

به‌عنوان فرض استقراء، فرض کنید برای هر $r = 1, \dots, n$، λ_r که در رابطه (۲.۳) تعریف شده است، یک $\{\varphi_r, \psi_r\}$- اشتقاق لی پکسیدر روی $\mathcal{B}$ باشد و معادلات (۲.۳) برای هر $r = 0, 1, \dots, n-1$ برقرار باشند. یعنی

$$\begin{cases} (r+1)\widetilde{\Phi}_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} \varphi_{k+1}\widetilde{\Phi}_{r-k}, \\ (r+1)\widetilde{\Psi}_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} \psi_{k+1}\widetilde{\Psi}_{r-k}, \\ (r+1)\widetilde{\Lambda}_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} \lambda_{k+1}\widetilde{\Lambda}_{r-k}, \end{cases} \tag{۶.۳}$$

که نتیجه می‌دهند برای هر $r = 0, 1, \dots, n-1$ داریم

$$\begin{cases} \varphi_{r+1} = \Big((r+1)\widetilde{\Phi}_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_{k+1}\widetilde{\Phi}_{r-k}\Big)\widetilde{\Phi}_0^{-1}, \\ \psi_{r+1} = \Big((r+1)\widetilde{\Psi}_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \psi_{k+1}\widetilde{\Psi}_{r-k}\Big)\widetilde{\Psi}_0^{-1}, \\ \lambda_{r+1} = \Big((r+1)\widetilde{\Lambda}_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k+1}\widetilde{\Lambda}_{r-k}\Big)\widetilde{\Lambda}_0^{-1}. \end{cases} \tag{۷.۳}$$

نشان می‌دهیم که $\lambda_{n+1} = \Big((n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\widetilde{\Lambda}_{n-\ell}\Big)\widetilde{\Lambda}_0^{-1}$ یک $\{\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}\}$- اشتقاق لی پکسیدر روی $\mathcal{B}$ است. داریم

$$\begin{aligned} &\lambda_{n+1}([b_1, b_2]) \\ &= \Big((n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\widetilde{\Lambda}_{n-\ell}\Big)\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\Big(\Lambda_0([a_1, a_2])\Big) \\ &= \Big((n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\widetilde{\Lambda}_{n-\ell}\Big)\Big([a_1 + \ker(\Lambda_0), a_2 + \ker(\Lambda_0)]\Big) \\ &= (n+1)\Lambda_{n+1}([a_1, a_2]) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\Lambda_{n-\ell}([a_1, a_2]) \\ &= (n+1) \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 0 \le i,j \le n+1}} [\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)] - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\Big(\sum_{\substack{p+q=n-\ell \\ 0 \le p,q \le n-\ell}} [\Phi_p(a_1), \Psi_q(a_2)]\Big) \\ &= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 0 \le i,j \le n+1}} (n+1)[\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)] - \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_{\ell+1}\Big(\sum_{\substack{p+q=n-\ell \\ 0 \le p,q \le n-\ell}} [\Phi_p(a_1), \Psi_q(a_2)]\Big). \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

چون $i + j = n + 1$ و برای هر $k = 1, \dots, n$، λ_k یک $\{\varphi_k, \psi_k\}$- اشتقاق لی پکسیدر است، داریم

$$\begin{aligned} &\lambda_{n+1}([b_1, b_2]) \\ &= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 0 \le i,j \le n+1}} (i+j)[\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)] - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q=n-\ell \\ 0 \le p,q \le n-\ell}} \lambda_{\ell+1}\Big([\Phi_p(a_1), \Psi_q(a_2)]\Big) \\ &= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 0 \le i,j \le n+1}} [i\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)] + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 0 \le i,j \le n+1}} [\Phi_i(a_1), j\Psi_j(a_2)] \\ &- \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q=n-\ell \\ 0 \le p,q \le n-\ell}} [\varphi_{\ell+1}\Phi_p(a_1), \Psi_q(a_2)] - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{\substack{p+q=n-\ell \\ 0 \le p,q \le n-\ell}} [\Phi_p(a_1), \psi_{\ell+1}\Psi_q(a_2)]. \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

اگر قرار دهیم

$$K_۱ = \sum_{\substack{i+j=n+۱\\ ۰\le i,j\le n+۱}} [i\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \sum_{\substack{p+q=n-\ell\\ ۰\le p,q\le n-\ell}} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_p(a_۱), \Psi_q(a_۲)], \tag{۱۰.۳}$$

$$K_۲ = \sum_{\substack{i+j=n+۱\\ ۰\le i,j\le n+۱}} [\Phi_i(a_۱), j\Psi_j(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \sum_{\substack{p+q=n-\ell\\ ۰\le p,q\le n-\ell}} [\Phi_p(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_q(a_۲)], \tag{۱۱.۳}$$

آنگاه $\lambda_{n+۱}([b_۱, b_۲]) = K_۱ + K_۲$. اکنون مقادیر $K_۱$ و $K_۲$ را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه $K_۱$ داریم

$$K_۱ = \sum_{\substack{i+j=n+۱\\ ۰\le i,j\le n+۱}} [i\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \sum_{\substack{i+j=n-\ell\\ ۰\le i,j\le n-\ell}} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)]. \tag{۱۲.۳}$$

در مجموع دوم داریم $۰ \le \ell \le n-۱$، $۰ \le i,j \le n-\ell$، $i+j+\ell = n$ و $\ell \neq n$. بنابراین اگر قرار دهیم $i+\ell = r$، آنگاه $r+j = n$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
K_۱ &= \sum_{i+j=n+۱} [i\Phi_i(a_۱), \Psi_j(a_۲)] - \sum_{r+j=n} \sum_{\substack{\ell=۰\\ \ell\neq n}}^{r} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_{r-\ell}(a_۱), \Psi_j(a_۲)]\\
&= \sum_{i+j=n} [(i+۱)\Phi_{i+۱}(a_۱), \Psi_j(a_۲)] - \sum_{i+j=n} \sum_{\substack{\ell=۰\\ \ell\neq n}}^{i} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_{i-\ell}(a_۱), \Psi_j(a_۲)]\\
&= \sum_{\substack{i+j=n,\\ i\neq n (j\neq ۰)}} [(i+۱)\Phi_{i+۱}(a_۱), \Psi_j(a_۲)] - \sum_{\substack{i+j=n,\\ i\neq n (j\neq ۰)}} \sum_{\substack{\ell=۰\\ \ell\neq n}}^{i} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_{i-\ell}(a_۱), \Psi_j(a_۲)]\\
&+ [(n+۱)\Phi_{n+۱}(a_۱), \Psi_۰(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} [\varphi_{\ell+۱}\Phi_{n-\ell}(a_۱), \Psi_۰(a_۲)]\\
&= \sum_{\substack{i+j=n,\\ i\neq n (j\neq ۰)}} \Big[\Big((i+۱)\Phi_{i+۱} - \sum_{\ell=۰}^{i} \varphi_{\ell+۱}\Phi_{i-\ell}\Big)(a_۱), \Psi_j(a_۲)\Big]\\
&+ \Big[\Big((n+۱)\Phi_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \varphi_{\ell+۱}\Phi_{n-\ell}\Big)(a_۱), \Psi_۰(a_۲)\Big]\\
&= \sum_{\substack{i+j=n,\\ i\neq n (j\neq ۰)}} \Big[\Big((i+۱)\widetilde{\Phi}_{i+۱} - \sum_{\ell=۰}^{i} \varphi_{\ell+۱}\widetilde{\Phi}_{i-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Phi}_۰^{-۱}\Phi_۰(a_۱)\big), \Psi_j(a_۲)\Big]\\
&+ \Big[\Big((n+۱)\widetilde{\Phi}_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \varphi_{\ell+۱}\widetilde{\Phi}_{n-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Phi}_۰^{-۱}\Phi_۰(a_۱)\big), \Psi_۰(a_۲)\Big].
\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

چون برای هر $i = ۰, ۱, \dots, n-۱$ داریم $(i+۱)\widetilde{\Phi}_{i+۱} = \sum_{\ell=۰}^{i} \varphi_{\ell+۱}\widetilde{\Phi}_{i-\ell}$، نتیجه می‌گیریم که

$$K_۱ = \Big[\Big((n+۱)\widetilde{\Phi}_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \varphi_{\ell+۱}\widetilde{\Phi}_{n-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Phi}_۰^{-۱}\Phi_۰(a_۱)\big), \Psi_۰(a_۲)\Big] = [\varphi_{n+۱}(b_۱), b_۲]. \tag{۱۴.۳}$$

برای محاسبه $K_۲$ داریم

$$K_۲ = \sum_{\substack{i+j=n+۱ \\ ۰\le i,j\le n+۱}} [\Phi_i(a_۱), j\Psi_j(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \sum_{\substack{i+j=n-\ell \\ ۰\le i,j\le n-\ell}} [\Phi_i(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_j(a_۲)]. \tag{۱۵.۳}$$

در مجموع دوم داریم $۰ \le \ell \le n-۱$، $۰ \le i,j \le n-\ell$، $i+j+\ell=n$ و $\ell \neq n$. بنابراین اگر قرار دهیم $j+\ell=r$، آنگاه $i+r=n$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} K_۲ &= \sum_{i+j=n+۱} [\Phi_i(a_۱), j\Psi_j(a_۲)] - \sum_{i+r=n} \sum_{\substack{\ell=۰ \\ \ell\neq n}}^{r} [\Phi_i(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_{r-\ell}(a_۲)] \qquad (۱۶.۳) \\ &= \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_۱), (j+۱)\Psi_{j+۱}(a_۲)] - \sum_{i+j=n} \sum_{\substack{\ell=۰ \\ \ell\neq n}}^{j} [\Phi_i(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_{j-\ell}(a_۲)] \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ j\neq n(i\neq ۰)}} [\Phi_i(a_۱), (j+۱)\Psi_{j+۱}(a_۲)] - \sum_{\substack{i+j=n \\ j\neq n(i\neq ۰)}} \sum_{\substack{\ell=۰ \\ \ell\neq n}}^{j} [\Phi_i(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_{j-\ell}(a_۲)] \\ &+ [\Phi_۰(a_۱), (n+۱)\Psi_{n+۱}(a_۲)] - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} [\Phi_۰(a_۱), \psi_{\ell+۱}\Psi_{n-\ell}(a_۲)] \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ j\neq n(i\neq ۰)}} \Big[\Phi_i(a_۱), \Big((j+۱)\Psi_{j+۱} - \sum_{\substack{\ell=۰ \\ \ell\neq n}}^{j} \psi_{\ell+۱}\Psi_{j-\ell}\Big)(a_۲)\Big] \\ &+ \Big[\Phi_۰(a_۱), \Big((n+۱)\Psi_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \psi_{\ell+۱}\Psi_{n-\ell}\Big)(a_۲)\Big] \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ j\neq n(i\neq ۰)}} \Big[\Phi_i(a_۱), \Big((j+۱)\widetilde{\Psi}_{j+۱} - \sum_{\substack{\ell=۰ \\ \ell\neq n}}^{j} \psi_{\ell+۱}\widetilde{\Psi}_{j-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Psi}_۰^{-۱}\Psi_۰(a_۲)\big)\Big] \\ &+ \Big[\Phi_۰(a_۱), \Big((n+۱)\widetilde{\Psi}_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \psi_{\ell+۱}\widetilde{\Psi}_{n-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Psi}_۰^{-۱}\Psi_۰(a_۲)\big)\Big]. \qquad (۱۷.۳) \end{aligned}$$

چون برای هر $j=۰,۱,\dots,n-۱$ داریم $(j+۱)\widetilde{\Psi}_{j+۱} = \sum_{\ell=۰}^{j} \psi_{\ell+۱}\widetilde{\Psi}_{j-\ell}$، نتیجه می‌گیریم که

$$K_۲ = \Big[\Phi_۰(a_۱), \Big((n+۱)\widetilde{\Psi}_{n+۱} - \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \psi_{\ell+۱}\widetilde{\Psi}_{n-\ell}\Big)\big(\widetilde{\Psi}_۰^{-۱}\Psi_۰(a_۲)\big)\Big] = [b_۱, \psi_{n+۱}(b_۲)]. \tag{۱۸.۳}$$

بنابراین

$$\lambda_{n+۱}([b_۱, b_۲]) = K_۱ + K_۲ = [\varphi_{n+۱}(b_۱), b_۲] + [b_۱, \psi_{n+۱}(b_۲)]. \tag{۱۹.۳}$$

پس $\lambda_{n+۱}$ یک $\{\varphi_{n+۱}, \psi_{n+۱}\}$- اشتقاق لی پکسیدر روی $\mathcal{B}$ است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $\{\varphi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{\psi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دو دنباله از اشتقاق‌های لی هستند. این اثبات را تمام می‌کند. $\square$

قضیه ۳.۳. فرض کنید $\{\Lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$- ابراشتقاق لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوری‌که

$$\Lambda_۰(\mathcal{A}) = \Phi_۰(\mathcal{A}) = \Psi_۰(\mathcal{A}) = \mathcal{B},$$

و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\ker(\Lambda_\circ) \subseteq \ker \Lambda_n$، $\ker(\Phi_\circ) \subseteq \ker \Phi_n$ و $\ker(\Psi_\circ) \subseteq \ker \Psi_n$. در این‌صورت دنباله $\{\varphi_n, \psi_n\}$–اشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، در معادلات

$$\begin{cases} \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} (-1)^{i-1}\, r_1 \widetilde{\Phi}_{r_1} \widetilde{\Phi}_\circ^{-1} \widetilde{\Phi}_{r_2} \widetilde{\Phi}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Phi}_{r_i} \widetilde{\Phi}_\circ^{-1} \right), \\ \psi_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} (-1)^{i-1}\, r_1 \widetilde{\Psi}_{r_1} \widetilde{\Psi}_\circ^{-1} \widetilde{\Psi}_{r_2} \widetilde{\Psi}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Psi}_{r_i} \widetilde{\Psi}_\circ^{-1} \right), \\ \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n} (-1)^{i-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_i} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \right), \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

صدق می‌کند.

اثبات. طبق قضیه ۲.۳، برای $\{\Phi_n, \Psi_n\}$–ابراشتقاق لی پکسیدر $\{\Lambda_n\}_{n=\circ}^{\infty}$، دنباله متناظر $\{\varphi_n, \psi_n\}$–اشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ در معادلات (۲.۳) صدق می‌کند. بنابراین برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = (n+1)\widetilde{\Phi}_{n+1}\widetilde{\Phi}_\circ^{-1} - \sum_{k=\circ}^{n-1} \varphi_{k+1} \widetilde{\Phi}_{n-k} \widetilde{\Phi}_\circ^{-1}, \\ \psi_{n+1} = (n+1)\widetilde{\Psi}_{n+1}\widetilde{\Psi}_\circ^{-1} - \sum_{k=\circ}^{n-1} \psi_{k+1} \widetilde{\Psi}_{n-k} \widetilde{\Psi}_\circ^{-1}, \\ \lambda_{n+1} = (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{k=\circ}^{n-1} \lambda_{k+1} \widetilde{\Lambda}_{n-k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1}. \end{cases} \tag{۲۱.۳}$$

اکنون از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$ داریم $\lambda_1 = \widetilde{\Lambda}_1 \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1}$. فرض کنید λ_k برای هر $k \leq n$ مانند معادلات (۲۰.۳) تعریف شده باشد. برای $n+1$ سمت راست معادله (۲۰.۳) برابر است با

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{k} r_j = n+1} (-1)^{k-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} + \sum_{k=2}^{n+1} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{k} r_j = n+1} (-1)^{k-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\sum_{j=1}^{k+1} r_j = n+1} (-1)^{k}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_{k+1}} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r_{k+1}=1}^{n-(k-1)} \Big(\sum_{\substack{\sum_{j=1}^{k} r_j \\ = n+1-r_{k+1}}} (-1)^{k-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \widetilde{\Lambda}_{r_{k+1}} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-(k-1)} \Big(\sum_{\substack{\sum_{j=1}^{k} r_j \\ = n+1-i}} (-1)^{k-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \widetilde{\Lambda}_{i} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-(i-1)} \Big(\sum_{\substack{\sum_{j=1}^{k} r_j \\ = n-(i-1)}} (-1)^{k-1}\, r_1 \widetilde{\Lambda}_{r_1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \widetilde{\Lambda}_{r_2} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \dots \widetilde{\Lambda}_{r_k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \Big) \widetilde{\Lambda}_{i} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n-(i-1)} \widetilde{\Lambda}_{i} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{i=\circ}^{n-1} \lambda_{n-i} \widetilde{\Lambda}_{i+1} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} \\ &= (n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}\widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} - \sum_{k=\circ}^{n-1} \lambda_{k+1} \widetilde{\Lambda}_{n-k} \widetilde{\Lambda}_\circ^{-1} = \lambda_{n+1}. \end{aligned} \tag{۲۲.۳}$$

سایر معادلات (۲۰.۳) می‌توانند به روش مشابه اثبات شوند. این اثبات را تمام می‌کند. $\square$

مثال ۴.۳. با استفاده از قضیه ۳.۳، چهار جمله از $\{\lambda_n\}$ عبارت‌اند از

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1},\\
\lambda_2 &= 2\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1},\\
\lambda_3 &= 3\widetilde{\Lambda}_3\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - 2\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1} + \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1},\\
\lambda_4 &= 4\widetilde{\Lambda}_4\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - 3\widetilde{\Lambda}_3\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - 2\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1} - \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_3\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\\
&\quad + 2\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1} + \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1} + \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\\
&\quad - \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_0^{-1}.
\end{aligned}
$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$-ابراشتقاق لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوری‌که

$$\Lambda_0(\mathcal{A}) = \Phi_0(\mathcal{A}) = \Psi_0(\mathcal{A}) = \mathcal{B},$$

و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\ker(\Lambda_0) \subseteq \ker\Lambda_n$، $\ker(\Phi_0) \subseteq \ker\Phi_n$ و $\ker(\Psi_0) \subseteq \ker\Psi_n$ و دنباله $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناظر $\{\varphi_n, \psi_n\}$-اشتقاق‌های لی پکسیدر باشد. در این‌صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Lambda_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{r_j+\cdots+r_i}\right)\lambda_{r_1}\ldots\lambda_{r_i}\Lambda_0\right),\\
\Phi_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{r_j+\cdots+r_i}\right)\varphi_{r_1}\ldots\varphi_{r_i}\Phi_0\right),\\
\Psi_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\sum_{j=1}^{i} r_j = n}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{r_j+\cdots+r_i}\right)\psi_{r_1}\ldots\psi_{r_i}\Psi_0\right),
\end{aligned}
\right. \tag{۲۳.۳}
$$

که در آن مجموع داخلی روی تمام اعداد صحیح مثبت $r_1, r_2, \ldots, r_i$ گرفته می‌شود که $\sum_{j=1}^{i} r_j = n$.

اثبات. نشان می‌دهیم که اگر $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$، $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ به شکل روابط (۲۳.۳) باشند، آنگاه $\{\widetilde{\Lambda}_n\}_{n=0}^{\infty}$، $\{\widetilde{\Phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{\widetilde{\Psi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ در روابط بازگشتی (۲.۳) صدق می‌کنند. چون جواب هر رابطه بازگشتی یکتا است، قضیه اثبات خواهد شد.
توجه کنید که اگر $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n+1$، آنگاه $\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{r_j+\cdots+r_k} = (n+1)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{r_j+\cdots+r_k}$. اکنون برای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n داریم

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\widetilde{\Lambda}_{n+1}(a+\ker(\Lambda_0))\\
&= (n+1)\Lambda_{n+1}(a)\\
&= \lambda_{n+1}\Lambda_0(a) + \sum_{k=2}^{n+1}\left(\sum_{\sum_{j=1}^{k} r_j = n+1}(n+1)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{r_j+\cdots+r_k}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k}\Lambda_0\right)(a)\\
&= \lambda_{n+1}\Lambda_0(a) + \sum_{k=2}^{n+1}\left(\sum_{r_1=1}^{n+2-k}\lambda_{r_1}\sum_{\sum_{j=2}^{k} r_j = n+1-r_1}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{r_j+\ldots+r_k}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_k}\Lambda_0\right)(a)\\
&= \lambda_{n+1}\Lambda_0(a) + \sum_{r_1=1}^{n}\lambda_{r_1}\sum_{k=2}^{n-(r_1-1)}\left(\sum_{\sum_{j=2}^{k} r_j = n-(r_1-1)}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{r_j+\cdots+r_k}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k}\Lambda_0\right)(a)\\
&= \lambda_{n+1}\Lambda_0(a) + \sum_{r_1=1}^{n}\lambda_{r_1}\Lambda_{n-(r_1-1)}(a) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Lambda_{n-(i-1)}(a)\\
&= \lambda_{n+1}\Lambda_0(a) + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{i+1}\Lambda_{n-i}(a) = \sum_{\ell=0}^{n}\lambda_{\ell+1}\Lambda_{n-\ell}(a)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}\lambda_{\ell+1}\widetilde{\Lambda}_{n-\ell}(a+\ker(\Lambda_0)).
\end{aligned} \tag{۲۴.۳}
$$

سایر معادلات (۲۳.۳) می‌توانند به روش مشابه اثبات شوند. □

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم Λ مجموعه همه $\{\Phi_n, \Psi_n\}$–ابراشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوری‌که

$$\Lambda_0(\mathcal{A}) = \Phi_0(\mathcal{A}) = \Psi_0(\mathcal{A}) = \mathcal{B},$$

و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\ker(\Lambda_0) \subseteq \ker \Lambda_n$، $\ker(\Phi_0) \subseteq \ker \Phi_n$ و $\ker(\Psi_0) \subseteq \ker \Psi_n$. همچنین λ مجموعه تمام دنباله‌های $\{\varphi_n, \psi_n\}$– اشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد. چون جواب هر رابطه بازگشتی (۲.۳) یکتا است، می‌توان نتیجه زیر را به‌دست آورد:

اگر برای هر $\Lambda \in \{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$، دنباله $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ را با معادلات (۲۰.۳) تعریف کنیم، آنگاه طبق قضیه ۳.۳، $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \lambda$. برعکس اگر برای هر $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$، $\{\Lambda_n\}$ را با معادلات (۲۳.۳) تعریف کنیم، آنگاه طبق قضیه ۵.۳، $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda$. این مطلب نشان می‌دهد که یک تناظر یک‌به‌یک بین Λ و λ وجود دارد.

۴ نتیجه‌گیری

فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر بوده و λ، φ و ψ نگاشت‌هایی خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشند. λ را یک (φ, ψ)– اشتقاق لی پکسیدر می‌نامیم، اگر برای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\lambda([a_1, a_2]) = [\varphi(a_1), a_2] + [a_1, \psi(a_2)]$، که در آن $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ حاصل‌ضرب لی عناصر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ است. در این مقاله مفهوم یک $\{\Phi_n, \Psi_n\}$–ابراشتقاق لی پکسیدر را به‌عنوان دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ که به ازای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ و هر عدد صحیح نامنفی n در رابطه

$$\Lambda_n([a_1, a_2]) = \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)],$$

صدق می‌کنند، معرفی کردیم. سپس یک شناسه‌سازی از آن بر حسب دنباله‌ای از $\{\varphi_n, \psi_n\}$– اشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ ارائه دادیم. همچنین نشان دادیم که اگر Λ مجموعه همه $\{\Phi_n, \Psi_n\}$– ابراشتقاق‌های لی پکسیدر $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوری‌که $\Lambda_0(\mathcal{A}) = \Phi_0(\mathcal{A}) = \Psi_0(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\ker(\Lambda_0) \subseteq \ker \Lambda_n$، $\ker(\Phi_0) \subseteq \ker \Phi_n$ و $\ker(\Psi_0) \subseteq \ker \Psi_n$ و λ مجموعه تمام دنباله‌های $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\{\varphi_n, \psi_n\}$– اشتقاق‌های لی پکسیدر از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه یک تناظر یک‌به‌یک بین Λ و λ وجود دارد.

فهرست منابع

[1] Ali, Sh., 2012. On generalized $*$-derivations in $*$-rings. *Palestine Journal of Mathematics, 1*, pp.32–37.

[2] Cortes, W. and Haetinger, C., 2005. On Jordan generalized higher derivations in rings. *Turkish Journal of Mathematics, 29*, pp.1–10.

[3] Ekrami, S.Kh., 2024. A note on characterization of higher derivations and their product. *Journal of Mahani Mathematical Research, 13*(1), pp.403–415. doi:10.22103/jmmr.2023.21376.1432

[4] Ekrami, S.Kh., 2024. Characterization of Hilbert C*-module higher derivations. *Georgian Mathematical Journal, 31*(3), pp.397–403. doi:10.1515/gmj-2023-2085

[5] Ekrami, S.Kh., 2022. Jordan higher derivations, a new approach. *Journal of Algebraic Systems, 10*(1), pp.167–177. doi:10.22044/JAS.2021.10636.1527

[6] Ekrami, S.Kh., 2024. Local higher derivations on Hilbert C*-modules. *Journal of Advanced Mathematical Modeling, 13*(4), pp.524–533. doi:10.22055/JAMM.2024.44416.2189

[7] Haetinger, C., 2002. Higher derivations on Lie ideals. *Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional, 3*, pp.141–145. doi:10.5540/tema.2002.03.01.0141

[8] Hasse, H. and Schmidt, F.K., 1937. Noch eine Begrüdung der theorie der höheren Differential quotienten in einem algebraischen Funtionenkörper einer Unbestimmeten. *J. Reine Angew. Math., 177*, pp.215-237.

[9] Janfada, A.R., Saidi, H. and Mirzavaziri, M., 2015. Characterization of Lie higher derivations on C^*-algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 41*(4), pp.901–906.

[10] Jewell, N.P., 1977. Continuity of module and higher derivations. *Pacific Journal of Mathematics, 68*, pp.91–98.

[11] Johnson, B.E., 1996. Symmetric amenability and nonexistence of Lie and Jordan derivations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 120*(3), pp.455–473.

[12] Johnson, B.E. and Sinclair, A.M., 1968. Continuity of derivations and a problem of Kaplansky. *American Journal of Mathematics, 90*, pp.1067–1073. doi: 10.2307/2373290

[13] Loy, R.J., 1973. Continuity of higher derivations. *Proceedings of the American Mathematical Society, 5*, pp.505–510.

[14] Matheiu, M. and Villena, A.R., 2003. The structure of Lie derivations on C^*-algebras. *Journal of Functional Analysis, 202*(2), pp.504–525. doi:10.1016/S0022-1236(03)00077-6

[15] Miller, J.B., 2009. Higher derivations on Banach algebras. *American Journal of Mathematics, 92* pp. 2233–2239.

[16] Mirzavaziri, M., 2010. Characterization of higher derivations on algebras. *Communications in Algebra, 38*, pp.981–987. doi:10.1080/00927870902828751

[17] Mirzavaziri, M., 2010. Prime higher derivations on algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 36*(1), pp 201–210.

[18] Mirzavaziri, M., Naranjani, K. and Niknam, A., 2010. Innerness of higher derivations. *Banach J. Math. Anal., 4*(2), pp. 121-128.

[19] Nowicki, A., 1984. Inner derivations of higher orders. *Tsukuba Journal of Mathematics, 8*, pp.219–225.

[20] Roy, A. and Sridharan, R., 1968. Higher derivations and central simple algebras. *Nagoya Mathematical Journal, 32*, pp.21–30.

[21] Xu, S. and Xiao, Z., 2014 Jordan higher derivation revisited. *Gulf Journal of Mathematics, 2*(1), pp.11–21. doi:10.56947/gjom.v2i1.176

Pexider Lie $\{\Phi_n, \Psi_n\}$-higher derivations on algebras

Sayed Khalil Ekrami [2]

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box 19395-3697, Tehran, Iran.

Communicated by: Mohammad Esmaeil Samei

Received:13 February 2024 Accepted: 6 January 2025

Abstract: Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be two algebras and λ, φ and ψ be linear mappings from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$. λ is said to be a pexider Lie (φ, ψ)-derivation, if $\lambda([a_1, a_2]) = [\varphi(a_1), a_2] + [a_1, \psi(a_2)]$ for all $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, in which $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ is the Lie product of the elements $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. In this paper, we introduce the concept of a pexider Lie $\{\Phi_n, \Psi_n\}$-higher derivation as a sequence of linear mappings $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$ satisfying the equation

$$\Lambda_n([a_1, a_2]) = \sum_{i+j=n} [\Phi_i(a_1), \Psi_j(a_2)],$$

for all $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ and all non-negative integers n. Then we characterize it in terms of sequence of pexider Lie $\{\varphi_n, \psi_n\}$-derivations $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$. Also, we show that there is a one-to-one correspondence between the set of all pexider Lie $\{\Phi_n, \Psi_n\}$-higher derivations $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ and the set of all sequences $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ of pexider Lie $\{\varphi_n, \psi_n\}$-derivations.

Keywords: Algebra, Lie homomorphism, Lie isomorphism, Lie derivation, Lie higher derivation.

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: (S. Kh. Ekrami) ekrami@pnu.ac.ir