



## به کارگیری روش ریتز برای حل مسائل کنترل بهینه معادلات سهموی با استفاده از کنترل کننده درونی

محمد عرب فیروزجایی<sup>(۱)</sup>، اکبر هاشمی برزآبادی<sup>(۱)</sup>، زهرا سیه چهره خلردی<sup>(۱)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران  
دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۱۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۳/۲۷

**چکیده:** در این مقاله یافتن جواب تقریبی برای مسایل کنترل بهینه تحت معادلات سهموی با در نظر گرفتن کنترل در منبع داخلی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور از روش تقریبی ریتز با در نظر گرفتن تابع برآورنده‌ای که در شرایط مرزی معادله حاکم به صورت دقیق صدق می‌کند استفاده شده است. با جایگذاری فرم‌های پارامتری در معادله دیفرانسیل و تابع هدف مساله به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی می‌رسیم که حل این روش به کمک روش‌های معمول بهینه‌سازی منجر به یافتن پارامترهای مجهول و در نهایت جواب تقریبی برای مساله خواهد شد. همگرایی این روش مورد بررسی قرار گرفته و به منظور بررسی توانمندی روش چند مثال عددی ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** مساله بهینه‌سازی، حساب تغییرات، روش ریتز، معادله جزئی سهموی

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

### ۱ مقدمه

در این مقاله یک مسئله کنترل بهینه را برای یک معادله سهموی کلی در نظر می‌گیریم. مسائلی که در این مقاله به آن پرداخته شده است، شناسایی یک کنترل توزیع شده که هزینه معین را به حداقل می‌رساند، می‌باشد و در عین حال حالت نهایی را نزدیک به هدف مشخص می‌کند. نظریه کنترل بهینه زمینه‌ای است که از سال‌های ۵۱۹ به خاطر فعالیت‌های آمریکا و روسیه در رابطه با کشفیات در منظومه شمسی آغاز گردید. مسائل ریاضی سفینه‌های فضایی نیز شامل مسائل بهینه‌سازی است. در واقع هدف ایجاد مسیرهایی است که در راستای آن مسیرها، یک فضاپیما که با یک موتور راکت کوچک کنترل و هدایت می‌شود، به هدف مورد نظرش در کمترین زمان ممکن و یا با کمترین سوخت مصرف شده برسد. این نوع مسائل جدید با روش‌هایی که تا آن زمان ابداع شده بودند قابل حل نبودند و باید نظریه حساب تغییرات توسعه می‌یافت تا بتواند با مسائل جدید هم‌اوردی کند [۱۴]. ریاضیدان نابینای روس پونتریاگین و همکارانش روش اصل ماکزیمم را بنیاد نهادند. کتاب او [۱۵] در سال ۱۹۶۱ به زبان انگلیسی در آمریکا ترجمه شد. از دیدگاه ریاضی در مسائل کنترل بهینه هدف یافتن بردار کنترلی است که معادلات حاکم بر سیستم، شرایط مرزی، قیدهای مسیری و دینامیک سیستم را به طور هم‌زمان برآورده کند و همچنین طبق معیاری این

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

کنترل بهینه باشد. بنابراین نظریه کنترل بهینه یک نسخه جدیدتر از نظریه حساب تغییرات است. در مسائل کنترل بهینه قیود به صورت دینامیک پیچیده تر ظاهر می شوند. کنترل بهینه معادلات سهموی با منابع داخلی یک حوزه تحقیقاتی چالش برانگیز و مهم با کاربردهایی در زمینه‌های مختلف مانند انتقال حرارت، دینامیک سیالات و علم مواد است. با توسعه راهبردهای کنترل کارآمد و قوی برای این سیستم‌ها، محققان می‌توانند عملکردها را بهینه کنند، مصرف انرژی را کاهش دهند و قابلیت اطمینان سیستم را در کاربردهای عملی بهبود بخشند [۱، ۵، ۸، ۱۷، ۱۹]. برای یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات با مشتقات جزئی سهموی در حضور منبع داخلی نیز می‌توان طبقه‌بندی روش‌های مستقیم و غیرمستقیم را در نظر گرفت. در روش‌های غیرمستقیم به کمک معادلات الحاقی مساله به دستگاه معادلات غیرخطی تقلیل می‌یابد [۱۳، ۱۸]. اما به طور معمول روش‌های مستقیم بدلیل کارایی بهتر به طور وسیعی برای این گونه مسائل به کار گرفته می‌شوند [۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲]. در این میان روش‌های طیفی ویژگی‌های منحصر بفرد خود را با توجه به عدم نیاز به نقاط گره ای و افزای فضای متغیرهای مستقل و همچنین تبدیل مستقیم به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی دارند و بسیار مورد توجه هستند. عموماً روش‌های طیفی کارآمد و روزآمد بسیاری برای یافتن جوابهای معادلات دیفرانسیل سهموی ابداع شده‌اند و در میان آنها روش‌های ریلی ریتز با در نظر گرفتن توابع برآورنده روش‌های موفق برای یافتن جوابهای تقریباً این معادلات هستند [۲، ۱۰]. این روش‌ها به شکل مناسبی برای یافتن مسایل کنترل بهینه نیز تعمیم داده شده‌اند [۳]. در این مقاله هدف یافتن جواب‌های تقریبی برای یافتن رده‌ای از مسایل کنترل بهینه تحت معادلات سهموی با حضور منبع داخلی است که در آن عامل منبع داخلی به صورت یک تابع غیرخطی بر حسب تابع کنترل در خود معادله لحاظ شده است و تنها شرط در نظر گرفته شده برای این تابع وارون پذیر بودن آن است. در این روش با تغییراتی که در تابع تقریب در نظر گرفته شده است و به کمک تابع برآورنده شرایط مساله را در برای تابع تقریب در نظر می‌گیریم و سپس تابع هدف مساله به یک مساله غیرخطی خواهیم رسید و سپس با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل اقدام به حل می‌کنیم. ساختار این مقاله در ادامه به شکل زیر است: در بخش (۲) چگونگی بکارگیری روش ریلی ریتز به کمک تابع برآورنده در تبدیل مساله (۱.۲) تشریح شده است. همگرایی روش تقریبی ارائه شده در بخش (۳) مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش (۴) نتایج عددی برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده است.

## ۲ روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه برای معادلات با مشتقات جزئی سهموی

در این بخش چگونگی حل مسائل کنترل بهینه برای معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی با روش ریتز ارائه می‌دهیم. این نوع از معادلات را در حالت کلی به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize } \int_0^T \int_0^T F(t, x, y, y_x, y_{xx}, y_t, u, u_t) dx dt, \quad (1.2)$$

با شرایط معادلات دیفرانسیل جزئی زیر

$$y_t = k\Delta y + N[u], \quad (2.2)$$

که در آن  $N$  یک عملگر غیرخطی وارون پذیر و  $T$  یک ثابت است. شرایط اولیه و مرزی مساله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(0, t) = g_0(t), y(T, t) = g_1(t), \quad (3.2)$$

$$y(x, 0) = f(x).$$

در ابتدا  $u$  را از معادله (۲.۲) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = N^{-1}(y_t - k\Delta y). \quad (4.2)$$

و پس از آن تقریب جواب را بر اساس روش ریتز به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x, t) \cong \tilde{y}(x, t) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k'} c_{ij} x^i t^j \phi_i(x) \psi_j(t) + w(x, t), \quad (5.2)$$

در تقریب بالا  $c_{ij}$  ضرایب ناشناخته و  $\phi_i(x), \psi_j(t)$  توابع پایه‌ای چند جمله‌ای است. در تقریب (۵.۲)، تابع  $w(x, t)$  را تابع برآورنده گویند که در شرایط اولیه و مرزی مساله صدق می‌کند یعنی

$$w(x, 0) = f(x), w(0, t) = g_0(t), w(T, t) = g_T(t).$$

اکنون با قراردادن (۴.۲) و تقریب (۵.۲) در معادله (۱.۲) داریم:

$$J = \int_0^T \int_0^T F(t, x, \tilde{y}, \tilde{y}_x, \tilde{y}_{xx}, \tilde{y}_t) dx dt. \quad (۶.۲)$$

با در نظر گرفتن شرایط لازم بهینگی برای تابع  $J$  به دستگاه معادلات غیر خطی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial J}{\partial c_{ij}} = 0, \quad j = 0, \dots, k, \quad i = 1, \dots, k'. \quad (۷.۲)$$

با حل این دستگاه، به ضرایب ناشناخته  $c_{ij}$  دست پیدا می‌کنیم که با قرار دادن این ضرایب در معادله (۵.۲) جواب تقریبی مساله را به دست می‌آوریم. برای حل این دستگاه از نرم افزار متمتیکا بهره می‌گیریم.

### ۳ همگرایی روش

در این بخش با ارائه لم ها و قضایای آنالیز همگرایی روش گفته شده در بالا را توضیح خواهیم داد. در ادامه نشان خواهیم داد که با افزایش مقادیر  $k, k'$  در (۵.۲) مینیمم معادله (۶.۲) به سمت می نیمم تابع (۱.۲) میل خواهد کرد. قبل از آن به ارائه فضاهای تابعی لازم، لم ها و قضایای مورد نیاز می‌پردازیم. ابتدا معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(x, t, y(x, t), \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}) = 0, \quad (۱.۳)$$

و همچنین شرایط مرزی:  $y(0, t) = g_0(t), y(T, t) = g_1(t)$  و شرایط اولیه:  $y(x, 0) = f(x)$ . را در نظر می‌گیریم. فضای باناخ  $(C^{(r,1)}(U), \|\cdot\|')$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C^{(r,1)}(U) = \left\{ y(x, t) \mid \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \in C(U), \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \in C(U) \right\},$$

جایی که

$$U = [0, 1] \times [0, 1],$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \|y\|_{\infty} &= \sup |y(x, t)|_{(x,t) \in U}, \\ \|y(x, t)\|_{(r,x)} &= \|y(x, t)\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right\|_{\infty}, \\ \|y(x, t)\|_{(1,t)} &= \|y(x, t)\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right\|_{\infty}, \\ \|y(x, t)\|' &= \|y(x, t)\|_{(r,x)} + \|y(x, t)\|_{(1,t)}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} E(U) &= \{h(x, t) \in C^{(r,1)}(U) \mid h(0, t) = 0, h(1, t) = 0\}, \\ \tilde{E}(U) &= \{h(x, t) \in C^{(n,m)}(U) \mid h(0, t) = g_0(t), h(1, t) = g_1(t)\}. \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

در ادامه لمی را بیان می‌کنیم که نقش اساسی در آنالیز همگرایی روش تعریف شده در بخش قبل دارد. این لم نشان می‌دهد که توابع چندجمله‌ای در فضای متریک  $E(U)$  چگال هستند.

**لم ۱.۳.** فرض کنید  $y(x, t) \in E(U)$ . آنگاه دنباله‌ای از توابع چندجمله‌ای  $\{s_l(x, t)\}_{l \in N} \subset E(U)$  وجود دارند که نسبت به نرم  $\|\cdot\|'$  به تابع  $y(x, t)$  میل می‌کنند.

**اثبات:** فیروزجایی و یوسفی در [۴] این لم را اثبات کرده اند.

**ملاحظه ۲.۳.** اگر  $y(x, t)$  را جواب واقعی مساله (۱.۲) و  $w(x, t)$  را تابع برآورنده در نظر بگیریم، آنگاه:  $y(x, t) - w(x, t) \in E(U)$  از لم (۱.۳) دنباله‌ای از توابع چندجمله‌ای  $\{s_l(x, t)\}_{l \in N}$  طوری که  $s_l(x, t) \rightarrow y(x, t) - w(x, t)$  نسبت به  $\|\cdot\|'$  وجود خواهند داشت. از این رو با در نظر گرفتن  $y^*(x, t) := s_l(x, t) + w(x, t)$  نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\|y^*(x, t) - y(x, t)\|' \rightarrow 0.$$

فضای تابعی  $G_{kk'}(U)$  را به صورت تعریف می‌کنیم:

$$G_{kk'}(U) = \tilde{E}(U) \cap \left( \left\langle \{\phi_l(x)\}_{l=0}^{l=k} \right\rangle \times \left\langle \{\psi_l(t)\}_{l=0}^{l=k'} \right\rangle + w(x, t) \right),$$

که در آن  $\left( \left\langle \{\phi_l(x)\}_{l=0}^{l=k} \right\rangle \times \left\langle \{\psi_l(t)\}_{l=0}^{l=k'} \right\rangle \right)$  را زیر فضایی باناخ از  $C^{(n,m)}(U)$  که توسط چندجمله‌ای‌های پایه از مرتبه  $k, k'$  تولید می‌شود در نظر می‌گیریم. البته  $G_{kk'}(U)$  زیرفضایی متریک از  $\tilde{E}(U)$  نیز خواهد بود. اکنون تابع  $J$  را در (۶.۲) به عنوان یک عملگر به صورت  $R \rightarrow J : \left( C^{(n,m)}(U), \|\cdot\|' \right) \rightarrow R$  در نظر می‌گیریم. در ادامه در لم (۴.۳) نشان داده می‌شود که تابع  $J$  در دامنه‌اش پیوسته است. از این خاصیت مهم در قضیه (۵.۳) استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۳.۳.** اگر  $g$  نگاشت پیوسته از یک فضای متریک فشرده به یک فضای متریک باشد، آنگاه به طور یکنواخت پیوسته است.

**اثبات:** رویدن در [۱۶] این قضیه را اثبات کرده است.

**لم ۴.۳.** تابع  $J$  در فضای باناخ  $(C^{(n,m)}(U), \|\cdot\|')$  پیوسته است.

**اثبات:** ابتدا  $F(\cdot)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x, t, y(x, t), \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}) = 0.$$

پس از آن نشان می‌دهیم که

$$J(y(x, t)) = \int_0^1 \int_0^1 F(y(x, t)) dx dt,$$

روی فضای  $J : (C^{(r,1)}(U), \|\cdot\|')$  پیوسته است. فرض کنید،  $u^* \in C(U)$  و  $\epsilon > 0$  را در اختیار داشته باشیم.  $l > 0$  در نظر بگیرد و

$$I := U \times \prod_{i=0}^m [-L_i - l, L_i + l]$$

جایی که

$$L_0 = \|y^*\|_\infty, \quad L_1 = \left\| \frac{\partial y^*}{\partial t} \right\|_\infty, \quad L_2 = \left\| \frac{\partial y^*}{\partial x} \right\|_\infty, \quad L_3 = \left\| \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \right\|_\infty.$$

آشکار است که برای  $x \in [0, 1]$  و  $t \in [0, 1]$  خواهیم داشت

$$Y^* = \left( x, t, y^*, \frac{\partial y^*}{\partial t}, \frac{\partial y^*}{\partial x}, \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \right) \in I,$$

فرض کنید  $\delta > 0$  و  $\|y - y^*\|' < \delta$  بنابراین برای مقادیر به اندازه کافی کوچک  $\delta$  داریم

$$Y = \left( x, t, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \in I, .$$

از آنجایی که  $F$  روی  $I$  نسبت به همه آرگومان هایش پیوسته و  $I$  نیز فشرده است، بر اساس قضیه (۳.۳)،  $K$  به طور یکنواخت پیوسته خواهد بود. بنابراین اگر  $\delta > 0$  به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه از  $\|Y - Y^*\| < \delta$  نتیجه می شود که  $|F(Y) - F(Y^*)| < \epsilon$  و پس از آن بدست می آوریم:

$$|J[y(x, t)] - J[y^*(x, t)]| < \epsilon.$$

حال می توانیم همگرایی روش گفته شده در بخش قبل را از قضیه زیر داشته باشیم.

**قضیه ۵.۳.** فرض کنید،  $\eta_{kk'}$  کمترین مقدار تابع  $J$  روی  $G_{kk'}(U)$  باشد، آنگاه داریم

$$\lim_{(k, k') \rightarrow (\infty, \infty)} \eta_{kk'} = v.$$

که در آن  $v$  مینیمم معادله (۱.۲) است.

**اثبات:** برای هر  $\epsilon > 0$  داده شده، فرض کنید،  $y^* \in G_{kk'}(U)$  طوری که  $J[y^*] < v + \epsilon$  (چنین  $y^*$  ای از خاصیت مینیمم وجود خواهد داشت). بر اساس لم (۴.۳)،  $J$  روی  $(C^{(2,1)}(U), \|\cdot\|')$  پیوسته است. بنابراین داریم

$$|J[y] - J[y^*]| < \epsilon, \quad (۳.۳)$$

وقتی که  $\delta < \|y - y^*\|$  باشد. بر اساس ملاحظه (۲.۳) برای مقادیر به اندازه کافی بزرگی از  $k, k'$ ،  $\gamma_{kk'} \in G_{kk'}(U)$  طوری که  $\|\gamma_{kk'} - y^*\| < \delta$  و علاوه بر آن  $y_{kk'}$  عنصری از  $G_{kk'}(U)$  است طوری که  $J[y_{kk'}] = \eta_{kk'}$ . آنگاه از (۳.۳) داریم

$$0 \leq J[y_{kk'}] \leq J[\gamma_{kk'}] < v + 2\epsilon,$$

و بنابراین از اینکه  $\epsilon > 0$  اختیاری است، نتیجه می شود که

$$\lim_{(k, k') \rightarrow (\infty, \infty)} \eta_{kk'} = \lim_{(k, k') \rightarrow (\infty, \infty)} J[y_{kk'}] = v.$$

این اثبات قضیه را کامل می کند.

## ۴ نتایج عددی

برای نشان دادن اثربخشی روش، در این قسمت چند مساله کنترل با محدودیت مشتقات جزئی سهموی را در نظر می گیریم. مثال های زیر نشان می دهند جواب تقریبی بدست آمده با (۵.۲) را می توان به شکل ساده ای تعیین کرد و همگرایی گفته شده در بخش قبل را هم می توان در این مثال ها یافت.

**مثال ۱.۴.** مساله کنترل بهینه با قید معادله دیفرانسیل جزئی سهموی زیر را در نظر می گیریم:

$$\min J = \int_0^1 \int_0^1 [y(x, t) + u_t(x, t) + 2 \cos(t)]^2 dx dt, \quad (۱.۴)$$

با قید معادله دیفرانسیل جزئی سهموی

$$y_t = y_{xx} + u, \quad (۲.۴)$$

و با شرط اولیه

$$y(x, 0) = 0.$$

و شرایط مرزی زیر

$$y(0, t) = 0, y(1, t) = 0.$$

برای این مساله جواب واقعی به صورت می‌باشد:

$$y(x, t) = x(x - 1)\sin(t),$$

$$u(x, t) = x(x - 1)\cos(t) - 2\sin(t).$$

برای حل این مساله، بر اساس معادله (۲.۴) داریم:

$$u(x, t) = y_t - y_{xx}. \quad (3.4)$$

اکنون برای استفاده از روش ریتز تقریب تابع جواب را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{y}(x, t) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k'} c_{ij} x^i t^j (t - 1) \phi_i(x) \psi_j(t), \quad (4.4)$$

که در آن  $\psi_j(t) = t^j$  و  $\phi_i = x^i$  با پیگیری این روش و قرار دادن (۳.۴) و تقریب (۴.۴) در مساله و حل دستگاه مورد نظر برای  $k, k'$  های مختلف خواهیم داشت:

$k, k'$	$k = 0, k' = 2$	$k = 0, k' = 4$	$k = 0, k' = 8$
Min value $J$	$0.00001449$	$3.798588 \times 10^{-10}$	$8.881784 \times 10^{-16}$

جدول ۱: مقادیر مینیمم  $J$  مربوط به مثال (۱.۴).

جدول (۱) نشان می‌دهد هر چه تعداد  $k, k'$  افزایش می‌یابد مقدار کمینه تابع اصلی به تدریج کاهش یافته و به جواب واقعی مساله (صفر) هم‌گرا می‌شود.

برای نمونه، با حل دستگاه (۷.۲)، برای این مثال و محاسبه مقادیر  $c_{ij}$  به ازای  $(k = 0, k' = 2)$  داریم

$$c_{00} = 1.0084109, c_{01} = -0.0285045, c_{02} = -0.1376325,$$

با جایگذاری این مقادیر در تابع تقریب (۴.۴)، خواهیم داشت.

$$\tilde{y}(x, t) = tx(-1 + x)(1.0084109) + t^2x(-1 + x)(-0.0285045) + t^3x(-1 + x)(-0.1376325)$$

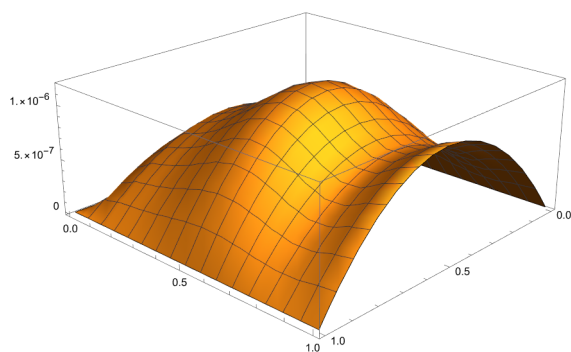
همچنین با محاسبه مقادیر  $c_{ij}$  به ازای  $(k = 0, k' = 4)$  داریم

$$c_{00} = 0.9999511, c_{01} = -0.003397, c_{02} = -0.1678508,$$

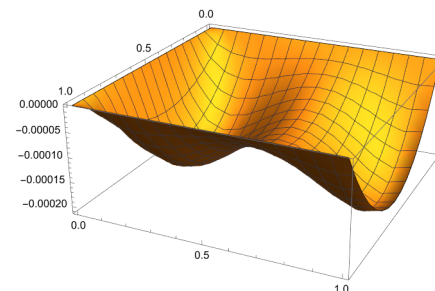
$$c_{03} = 0.0019074, c_{04} = 0.0071196,$$

با جایگذاری این مقادیر در تابع تقریب (۴.۴)، خواهیم داشت.

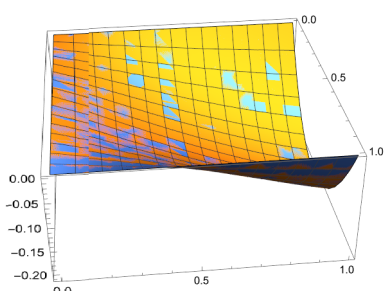
$$\tilde{y}(x, t) = tx(-1 + x)(0.9999511) + t^2x(-1 + x)(0.003397) + t^3x(-1 + x)(-0.1678508) + t^4x(-1 + x)(0.0019074) + t^5x(-1 + x)(0.0071196) = tx^2 - tx + \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^3}{6} - \frac{xt^5}{120} + \frac{x^2t^5}{120} \cong x(x - 1)\sin(t)$$



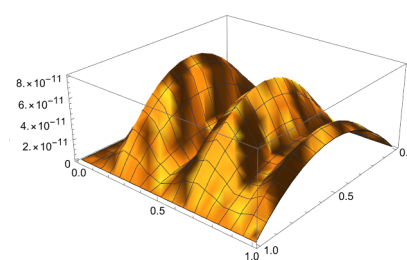
(ب) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $n = 0, m = 4$



(آ) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $n = 0, m = 2$



(د) نمودار جواب واقعی (نارنجی) و جواب تقریبی (آبی) به ازای  $n = 0, m = 8$



(ج) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $n = 0, m = 8$

شکل ۱: مقایسه جواب واقعی و جواب تقریبی مثال (۱.۴) در بازه  $[0, 1]$

خطای مطلق جواب تقریبی به ازای نقاط بررسی شده در جدول (۱)، در شکل های زیر رسم شده است.

همان طور که در شکل (۱) ملاحظه می کنید خطای مطلق جواب تقریبی بدست آمده این مسئله در (آ)، (ب)، (ج) نشان داده شده است که از روی آن می توان به صحت و درستی روش پی برد. حال برای یافتن جواب کنترل، با گرفتن مشتقات جزئی از تابع جواب و قرار دادن در معادله (۳.۴) خواهیم داشت:

به ازای  $(k = 0, k' = 2)$  داریم:

$$\tilde{u}(x, t) = -2/0.16t + 0/0.57t^2 + 0/275t^3 + 1/0.0(-1+x)x - 0/0.57t(-1+x)x - 0/412t^2(-1+x)x \cong x(-1+x)\cos t - 2\sin t.$$

به ازای  $(k = 0, m = 4)$  داریم:

$$\tilde{u}(x, t) = -1.99t - 0/0.006t^2 + 0/335t^3 - 0/0.3t^4 - 0/0.14t^5 + 0/99(-1+x)x + 0/0.006t(-1+x)x - 0/503t^2(-1+x)x + 0/0.07t^3(-1+x)x + 0/0.35t^4(-1+x)x \cong x(-1+x)\cos t - 2\sin t.$$

مثال ۲.۴. مساله کنترل بهینه با قید معادله دیفرانسیل جزئی سهموی زیر را در نظر می گیریم:

$$\min J = \int_0^1 \int_0^1 (y(x, t) - tu(x, t))^2 dxdt \tag{5.4}$$

با قید معادله دیفرانسیل جزئی سهموی

$$y_t = y_{xx} + u^3, \tag{6.4}$$

و با شرط اولیه

$$y(x, 0) = 0$$

و شرایط مرزی زیر

$$y(0, t) = 0, y(1, t) = t.$$

برای این مساله جواب واقعی به صورت می‌باشد:

$$y(x, t) = xt,$$

$$u(x, t) = \sqrt{x}.$$

برای حل این بر اساس معادله (۴.۲) داریم:

$$u(x, t) = \sqrt{y_t - y_{xx}}. \quad (7.4)$$

حال برای استفاده از روش ریتز تقریب تابع جواب را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{y}(x, t) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k'} c_{ij} x^i t^j + tx^2(3x - 2), \quad (8.4)$$

که در آن  $\phi_i(x) = x^i$  و  $\psi_j(t) = t^j$  در نظر بگیریم. با پیگیری این روش و قراردادن تقریب (۸.۴) و (۷.۴) در مساله و حل دستگاه مورد نظر برای  $m, n$  های مختلف خواهیم داشت:

$k, k'$	$k = 0, k' = 5$	$k = 1, k' = 3$	$k = 1, k' = 4$
Min value $J$	۵/۴	$7.10543 \times 10^{-15}$	$5.32907 \times 10^{-15}$

جدول ۲: مقادیر مینیمم  $J$  مربوط به مثال (۲.۴).

جدول (۲) نشان می‌دهد هر چه تعداد  $k, k'$  افزایش می‌یابد مقدار کمینه تابع اصلی به تدریج کاهش یافته و به جواب واقعی مساله (صفر) هم‌گرا می‌شود.

برای نمونه، با حل دستگاه ((۷.۲))، برای این مساله و محاسبه مقادیر  $c_{ij}$  به ازای  $(k = 1, k' = 3)$  داریم

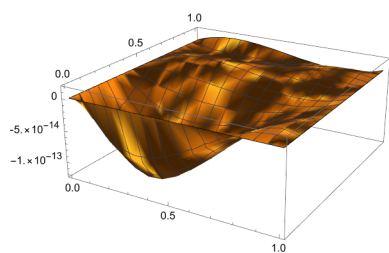
$$\begin{aligned} c_{00} &= 1., c_{01} = -5.55435 \times 10^{-11}, c_{02} = 7.74692 \times 10^{-11}, \\ c_{03} &= -3.47742 \times 10^{-11}, c_{10} = -3., c_{11} = 7.15269 \times 10^{-11}, \\ c_{12} &= -1.03673 \times 10^{-10}, c_{13} = 4.78977 \times 10^{-11}, \end{aligned}$$

با جایگذاری در (۸.۴)، تابع تقریب به جواب واقعی هم‌گرا می‌شود.

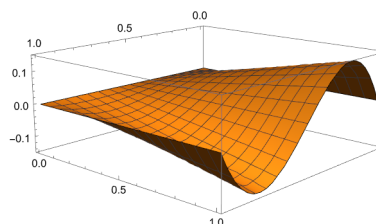
$$\begin{aligned} \tilde{y}(x, t) &= tx^2(-2 + 3x) + t(-1 + x)x(1) + \dots + t(-1 + x)x^2(-3) + \dots \\ &= -2tx^2 + 3tx^3 - tx + tx^2 + 0 + 3tx^2 - 3tx^3 + 0 \cong xt \end{aligned}$$

خطای مطلق جواب تقریبی به ازای نقاط بررسی شده در جدول (۲)، در شکل های زیر رسم شده است.

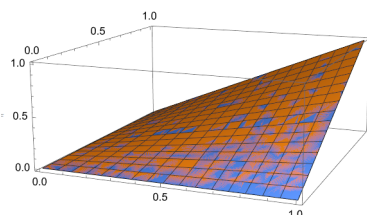




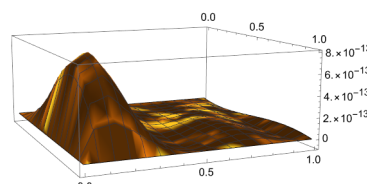
(ب) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $k = 1, k' = 3$



(ا) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $k = 0, k' = 5$



(د) نمودار جواب واقعی (نارنجی) و جواب تقریبی (آبی) به ازای  $k = 1, k' = 4$



(ج) خطای مطلق  $y(x, t) - \tilde{y}(x, t)$  به ازای  $k = 1, k' = 4$

شکل ۲: مقایسه جواب واقعی و جواب تقریبی مثال (۲.۴) در بازه  $[0, 1]$

همان طور که در شکل (۲) مشاهده می‌کنید خطای مطلق جواب واقعی و تقریبی به ازای نقاط مختلف بررسی شده است. در قسمت (د) نمونه‌ای از نمودار مساله رسم شده است. اکنون روی کنترل بررسی می‌کنیم.

از تابع جواب مشتقات جزئی گرفته و در معادله (۷.۴) جایگذاری می‌کنیم. نتایج زیر به دست آمده است  
کنترل تقریبی به ازای  $(k = 0, k' = 5)$

$$\tilde{u}(x, t) = \left( 5t + \dots - 12tx - 25(-1+x)x - \dots - 2t(-2+3x) + x^2(-2+3x) \right)^{\frac{1}{5}} \cong \sqrt[5]{x}$$

کنترل تقریبی به ازای  $(k = 1, k' = 3)$

$$\tilde{u}(x, t) = \left( 2t - \dots + 6t(-1+x) - \dots - 1.(-1+x)x - \dots - 3x^2(-1+x) + \dots - 2t(-2+3x) + x^2(-2+3x) \right) \cong \sqrt{x}$$

کنترل تقریبی به ازای  $(k = 1, k' = 4)$

$$\tilde{u}(x, t) = \left( 2t + \dots + 6t(-1+x) - \dots - (-1+x)x - \dots - 3(-1+x)x^2 + \dots - 2t(-2+3x) + x^2(-2+3x) \right)^{\frac{1}{4}} \cong \sqrt{x}$$

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تقریباً جدیدی برای حل مسائل کنترل بهینه تحت معادلات سهموی با در نظر گرفتن کنترل در منبع داخلی معرفی شده است. به کارگیری روش بهبود یافته ریتز برای این نوع از مسائل خصوصاً مسائل غیرخطی بسیار موفقیت‌آمیز بوده است. همکاری این روش

هم برای این دسته از مسائل به طور گسترده مورد بحث قرار گرفت. از محاسبات عددی به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که امکان حل انواع مختلف از مسائل غیرخطی به این روش نیز وجود دارد. با توجه به نتایج به دست آمده در این پژوهش، پیشنهاد می‌گردد که این روش را روی مسائل کنترل بهینه جزئی سهموی با شرایط نوین و یا روبین پیاده‌سازی کرد و همچنین با توجه به موفقیت این روش می‌توان امیدوار بود تقریب‌های مناسبی را برای این دسته از مسائل که می‌توانند در کاربردهای وسیعی از جمله در فرآیندهای شیمیایی و همین طور در سیستم‌های حاکم در معادلات زیست فناوری داشته باشند، یافت. لذا تحقیق حاصل می‌تواند راه‌گشای تولید روش‌های پارامتری‌سازی مبتنی بر روش ریلی ریتز برای دسته وسیع‌تری از معادلات با مشتقات جزئی باشند.

## فهرست منابع

- [1] Casas, E. and Yong, J., 2023. Optimal control of a parabolic equation with memory, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 29 .doi:10.1051/cocv/2023013.
- [2] Fardi, M., Amini, E., Mohammadi, S., 2024. A finite difference scheme for time-space fractional distributed-order diffusion equations with weakly singular solutions, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, 14(1), pp. 94-109. doi:10.22055/JAMM.2024.44387.2187.[In Persian]
- [3] Firoozjaee, M. A., Jafari, H., Johnston, S. J. and Baleanu, D., 2022. On Ritz Approximation for a class of Fractional Optimal Control Problems, *Fractals*, 30(8), 2240201. doi: 10.1142/S0218348X22402010.
- [4] Firoozjaee, M. A. and Yousefi, S. A., 2018. A numerical approach for fractional partial differential equations by using Ritz approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 338, pp. 711–721. doi: 10.1016/j.amc.2018.05.043.
- [5] Gengsheng, W. and Lijuan, W., 2002. State-Constrained Optimal Control Governed by Non-Well-Posed Parabolic Differential Equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(5), pp. 1517-1539. doi:10.1137/S0363012900377006.
- [6] Grubišić, L., Lazar, M. , Nakić, I. and Tautenhahn, M., 2023. Optimal Control of Parabolic Equations – A Spectral Calculus Based Approach, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 61(5). doi:10.1137/21M1449762.
- [7] Lazar, M., Molinari, C. and Peypouquet, J., 2017. Optimal control of parabolic equations by spectral decomposition, *Optimization*, 66 , pp. 1359–1381. doi: 10.1080/02331934.2017.1307365.
- [8] Lazar, M. and Molinari, C., 2021. Optimal distributed control of linear parabolic equations by spectral decomposition, *Optimal Control Applications and Methods*, 42(4), pp. 877-1224. doi:10.1002/oca.2708.
- [9] Lasiecka, I. and Triggiani, R., 2000. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories, *I. Abstract Parabolic Systems, Encyclopedia Math. Appl.* 74, Cambridge University Press, Cambridge. doi: 10.1017/CBO9781107340848.
- [10] Lotfi, A. and Yousefi, S. A., 2014. Epsilon-Ritz method for solving a class of fractional constrained optimization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 163, pp.884-899. doi: 10.1007/s10957-013-0511-5.
- [11] Meidner, D. and Vexler, B., 2007. Adaptive space-time finite element methods for parabolic optimization problems, *SIAM J. Control Optim*, 46 , pp. 116–142. doi: 10.1137/060648994.

- [12] Nemati, A., Yousefi, S. A., (2017). A numerical scheme for solving two-dimensional fractional optimal control problems by the Ritz method combined with fractional operational matrix, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 34(4), pp. 1079–1097, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnw009>.
- [13] Nemati, A. (2017). Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method along with Bernstein operational matrix. *International Journal of Control*, 91(12), 2632–2645. <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1334267>.
- [14] Pinch E. R., (1993). *Optimal control and calculus of variations*, Oxford University Press, New York.
- [15] Pontryagin L. S., Boltyanski V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko E. F., 1962. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons Inc, New York.
- [16] Royden, H. L., 1998. *Real Analysis*, 3rd Ed, Macmillan Publishing Company U.S.A.
- [17] Tröltzsch, F., 2010. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Philadelphia, 112. doi: 10.1090/gsm/112.
- [18] Tröltzsch, F., 2010. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, *Grad. Stud. in Math.* 112, American Mathematical Society, Providence, RI. doi.org/10.1090/gsm/112.
- [19] Yuan, W., Xiaochuan, L. and Sai, Li., 2015. Optimal Control Method of Parabolic Partial Differential Equations and Its Application to Heat Transfer Model in Continuous Cast Secondary Cooling Zone, *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2015, pp.1-10. doi: 10.1155/2015/585967.



## Applying the Ritz method to solve optimal control problems of parabolic equations using internal controller

M. A. Firoozjaee<sup>1</sup>, A. H. Borzabadi<sup>1</sup>, Z. S. Khelardi<sup>1</sup>

2

<sup>(1)</sup> Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran

Received: 16 June 2024

Accepted: 2 February 2025

Communicated by: Sohrab Effati

**Abstract:** In this article, we solve control problems with the conditions of parabolic partial differential equations. In order to solve this type of mentioned problems, we use an iterative method based on basic polynomials and generating function. In this method, we first consider the solution of the problem based on the given partial differential equation, and then we approximate this solution based on the basic polynomials and the generating function (the function that applies to the initial conditions of the problem). which apply precisely in the given boundary conditions. After that, by placing this solution in the given sub-function and optimality conditions, we reach a system of nonlinear equations. By solving this device of unknown coefficients, we get the approximate answer. In fact, an approximation of the answer is made in a finite-dimensional space. We have also shown the convergence of the proposed method for this type of problem. In order to check the effectiveness of the method, we have solved some examples using it and presented the obtained numerical results.

**Keywords:** Optimization problem, calculus of variations, Ritz method, least squares, parabolic partial equation.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>2</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (M. A. Firoozjae) [m\\_firoozjaee@mazust.ac.ir](mailto:m_firoozjaee@mazust.ac.ir) (A. H. Borzabadi) [borzabadi@mazust.ac.ir](mailto:borzabadi@mazust.ac.ir) (A. H. Borzabad) [ali.av484@gmail.com](mailto:ali.av484@gmail.com)