



روش هم محلی و هم محلی تکراری برای حل عددی معادلات انتگرال ترکیبی و لترا فردهلم دوبعدی روی نواحی غیرمستطیلی و بررسی آنالیز خطای آن

حجت اله لعلی دستجردی^۱

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵ تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۳۰

دبیر مسئول: علیرضا فخرزاده جهرمی

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش بدون شبکه و روش هم مکانی و هم مکانی تکراری به حل عددی معادلات انتگرال ترکیبی و لترا فردهلم دوبعدی روی نواحی غیرمستطیلی می پردازیم. این روش یک روش بدون شبکه است و از نقاط پراکنده برای تقریب جواب معادله استفاده می شود. پیاده سازی این روش ساده و محاسبات آن به آسانی انجام می گیرد. همگرایی روش بررسی می شود و نتایج عددی نشان می دهد که این روش، با آنالیز تحلیل آن مطابقت دارد.

واژه های کلیدی: توابع پایه ای شعاعی، معادلات انتگرال و لترا فردهلم ترکیبی، همگرایی، روش هم محلی.

رده بندی ریاضی: 45D05

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل ریاضیات، فیزیک و مهندسی را می توان به صورت معادلات انتگرال و لترا فردهلم مدل سازی کرد. در این مقاله به حل عددی معادله انتگرال

$$u(x, t) - \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, s, u(\xi, s)) d\xi ds = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.1)$$

می پردازیم که در آن $F(x, t, \xi, s, u)$ ، $f(x, t)$ توابع معلوم، و روی $D = \Omega \times [0, T]$ و $C(D^2 \times \mathbb{R})$ تعریف شده و Ω یک مجموعه فشرده از $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) با نرم $\|\cdot\|$ است. همچنین $u(x, t)$ تابع مجهول است که باید به طور تقریبی به دست آید. وجود و یکتایی جواب (۱.۱) در [۴، ۵] مورد بررسی قرار گرفته است. معادله (۱.۱) را می توان به فرم

$$u = \mathcal{T}u,$$

نوشت که در آن عملگر انتگرال $\mathcal{T} : C(\Omega \times [0, T]) \rightarrow C(\Omega \times [0, T])$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{T}u(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, s, u(\xi, s)) d\xi ds + f(x, t). \quad (2.1)$$

^۱ نویسنده مسئول مقاله:

در این مقاله فرض می‌کنیم که Ω یک ناحیه کراندار دوبعدی غیرمستطیلی است.

در مورد وجود و یکتایی جواب این معادله می‌توان به [۴، ۵] مراجعه نمود. روشهای مناسب برای حل معادلات چند بعدی روشهایی مانند هم‌محلی و گالرکین هستند. برای این معادله زمانی که ناحیه Ω زیر مجموعه اعداد حقیقی است کارهایی انجام شده است. در [۸] موجک دو بعدی لژاندر استفاده شده است. روش تجزیه آدومیان [۶، ۷] برای نوع خطی این معادله مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۱۰] روش نیستروم بر اساس روش دوزنقه به کار رفته است. همچنین اخیراً کارهای جدیدی روی این معادله انجام شده است که خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه بیشتر، منابع [۱۷-۱۹] را بنگرد. زمانی که ناحیه انتگرال‌گیری یک ناحیه غیرمستطیلی است استفاده از روشهای معمول گفته شده برای این مساله انجام نشده است. لعلی و همکاران [۱۱] از توابع پایه‌ای شعاعی برای حل این مساله استفاده کردند. این روش یک روش بدون شبکه نامیده می‌شود. اگر بخواهیم از روشهای معمول برای چنین نواحی استفاده کنیم باید از روش مثلث‌سازی استفاده کرد که پیچیده‌گی‌های خاص خود را دارد. تا جایی که مطالعات ما نشان می‌دهد این مساله برای اولین بار با این روش حل شده و روش دیگری برای این مساله استفاده نشده است که بخواهیم این روشها را با هم مقایسه کنیم. از معروف‌ترین روشها برای داده‌های پراکنده و مش آزاد استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی است. درونبایی با استفاده توابع پایه‌ای شعاعی در سال ۱۹۷۱ توسط هاردی ارائه شد [۹]. در [۱۲، ۱۳] این توابع برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی استفاده شده است. برای مطالعه بیشتر در مورد توابع پایه‌ای شعاعی می‌توان مراجع [۲، ۳] را نگریست.

ادامه این مقاله به صورت زیر است: در قسمت ۲، توابع پایه‌ای شعاعی معرفی شده است. پیاده‌سازی روش هم‌محلی و هم‌محلی تکراری در قسمت ۳ ارائه شده است. در قسمت ۴، تحلیل خطای روش پیاده‌سازی شده است. و در نهایت مثال‌های عددی در قسمت ۵، آورده شده است.

۲ توابع پایه‌ای شعاعی

اخیراً استفاده از روشهای بدون شبکه برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل مورد توجه ریاضیدانان زیادی قرار گرفته است. استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی از روشهای بدون شبکه‌ای است که می‌تواند به راحتی برای حل مسائل مورد استفاده قرار گیرد [۹]. مهمترین ویژگی توابع پایه‌ای شعاعی این است که بدون توجه به بعد مساله از یک متغیر استفاده می‌شود. در ادامه تعریفی از توابع پایه‌ای شعاعی را ارائه می‌دهیم [۱، ۱۶].

تعریف ۱.۲. یک تابع $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ شعاعی نامیده می‌شود، اگر یک تابع یک متغیره $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$ ، جایی که $r = \|\mathbf{x}\|$ و $\|\cdot\|$ یک نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ است.

بعضی از توابع مهم شعاعی در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: بعضی از توابع مهمی که توابع شعاعی را تولید می‌کنند	
نام تابع	تعریف
گوسی (GA)	$\phi(r) = \exp(-cr^2), c > 0$
چند مربعی (MQ)	$\phi(r) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} (r^2 + c^2)^\beta, c, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}$
چند مربعی معکوس (IMQ)	$\phi(r) = (r^2 + c^2)^{-\beta}, c, \beta > 0$
صفحه نازک تکه‌ای	$\phi(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log(r), k \in \mathbb{N}$

در جدول ۱ مقدار $\lceil \beta \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از β است.

تعریف ۲.۲. [۱]: اندازه تراکم γ از یک مجموعه داده شده $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ از یک مجموعه کراندار Ω به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{\mathcal{X}, \Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_j \in \mathcal{X}} \|x - x_j\|.$$

اندازه تراکم شعاع بزرگترین گویی است که می‌توان درون ناحیه‌ی Ω جای داد به طوری که هیچ نقطه‌ای از مجموعه‌ی $\mathcal{X}$ در آن نباشد.

تعریف ۳.۲. [۱]: گوییم مجموعه Ω در شرط مخروط داخلی صدق می‌کند اگر زاویه‌ی $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ و $r > 0$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x \in \Omega$ جهتی مانند $\eta(x)$ وجود داشته باشد به طوری که مخروط

$$C(x, \eta(x), \theta, r) = \{x + \lambda y : y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_2 = 1, y^T \eta(x) \geq \cos(\theta), \lambda \in [0, r]\}$$

کاملاً در Ω قرار گیرد.

تعریف ۴.۲ ([۱]) فرض کنید H فضای هیلبرت از $\mathbb{R} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. تابع $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته باز تولید هسته از H است اگر

$$x \in \Omega \text{ به ازای هر } K(x, \cdot) \in H \text{ .۱}$$

۲. $u(x) = \langle u, K(x, \cdot) \rangle_H$ به ازای هر $u \in H$ و به ازای هر $x \in \Omega$ اگر $K(x, y) = \phi(x - y)$ که ϕ یک تابع شعاعی است.

قضیه ۵.۲ ([۱]) فرض کنید

$$H_\phi(\Omega) = \text{span}\{\phi(\cdot - y) : y \in \Omega\},$$

در این صورت دوتایی

$$\langle \sum_{j=1}^N c_j \phi(\cdot - x_j), \sum_{k=1}^N d_k \phi(\cdot - y_k) \rangle_\phi = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j d_k \phi(x_j, y_k), \quad (۱.۲)$$

یک ضرب داخلی روی $H_\phi(\Omega)$ تعریف می کند.

تعریف ۶.۲ ([۱]) یک تابع حقیقی پیوسته زوج ϕ روی $\mathbb{R}^s$ معین مثبت نامیده می شود اگر

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \phi(x_j - x_k) \geq 0, \quad (۲.۲)$$

به ازای هر نقاط متمایز $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^s$ و هر $C = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$.

تابع ϕ معین مثبت اکید روی $\mathbb{R}^s$ نامیده می شود اگر حالت تساوی در رابطه ی (۲.۲) فقط به ازای $C = 0$ برقرار شود.

قضیه ۷.۲ ([۱۶]) فرض کنید ϕ یک تابع شعاعی و معین مثبت اکید باشد. در نتیجه دو تایی $\langle, \rangle_\phi$ یک ضرب داخلی روی $H_\phi(\Omega)$ تعریف می کند. به علاوه $H_\phi(\Omega)$ یک فضای پیش هیلبرت با تابع باز تولید ϕ است.

تعریف ۸.۲ ([۱]) فضای طبیعی $\mathcal{N}_\phi(\Omega)$ از ϕ مکمل $H_\phi(\Omega)$ با توجه به $\|\cdot\|_\phi$ تعریف می شود طوری که به ازای همه $u \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ داریم $\|u\|_\phi = \|u\|_{\mathcal{N}_\phi(\Omega)}$.

۱.۲ درونیایی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی

درونیایی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی برای یک تابع $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ با استفاده از نقاط $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ و تابع شعاعی $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ و $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ است. تقریب تابع $u(x)$ با استفاده از $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ به صورت ترکیب خطی زیر خواهد بود:

$$\mathcal{P}_N u(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \phi(\|x - x_k\|), \quad (۳.۲)$$

که

$$\mathcal{P}_N : C(\Omega) \rightarrow C_N(\Omega),$$

یک عملگر هم محلی روی نقاط $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ است و همچنین

$$C_N(\Omega) = \text{span}\{\phi(\|x - x_1\|), \phi(\|x - x_2\|), \dots, \phi(\|x - x_N\|)\},$$

دارای بعد متناهی است. مساله درونیایی پیدا کردن مقادیر $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ است به طوری که $\mathcal{P}_N u(x)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\mathcal{P}_N u(x_i) = u(x_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

این شرط منجر به دستگاه زیر خواهد شد:

$$A\Lambda = U, \quad (5.2)$$

که در آن A یک ماتریس $N \times N$ است و داریم:

$$A_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|), i, j = 1, 2, \dots, N,$$

Λ بردار ضرائب $\mathcal{P}_N u(x)$ و U داده های $u(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ می باشد. در [۱] وارون پذیری ماتریس ضرائب این دستگاه نشان داده شده است.

۳ پیاده سازی روش

برای پیاده سازی روش فرض می کنیم $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ داده های پراکنده روی $[0, T]$ و $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ داده های پراکنده روی Ω باشند. توزیع نقاط می تواند به صورت منظم یا تصادفی باشد. همچنین فرض می کنیم که Ω یک ناحیه غیر مستطیلی باشد. تقریب تابع دو متغیره $u(x, t)$ را با ترکیب خطی زیر خواهیم داشت:

$$\mathcal{P}_{M,N} u(x, t) = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N c_{k,j} \phi_k(x) \eta_j(t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

که

$$\phi_k(x) = (\|x - x_k\|^2 + c^2)^{-\beta}, \quad c, \beta > 0$$

$$\eta_j(t) = ((t - t_j)^2 + c^2)^{-\beta}, \quad j = 0, \dots, M.$$

برای راحتی معادله (۱.۳) را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathcal{P}_{M,N} u(x, t) = \sum_{\mu=1}^Q d_\mu \psi_\mu(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.3)$$

که در آن $Q = (M+1)(N+1)$ و $d_\mu = c_{k,j}$, $\psi_\mu(x, t) = \phi_k(x) \eta_j(t)$ باید در نظر داشت که $\mathcal{P}_{M,N}$ عملگر هم محلی از $C(\Omega)$ به $C_{M,N}$ است که در آن $C_{M,N} = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_Q\}$ اندیس μ نیز از رابطه $\mu = (N+1)j + k + 1$ به دست می آید. با قرار دادن رابطه (۲.۳) در (۱.۱) خواهیم داشت:

$$\sum_{\mu=1}^Q d_\mu \psi_\mu(x, t) - \int_0^t \int_\Omega K(x, t, \xi, s, \sum_{\mu=1}^Q d_\mu \psi_\mu(\xi, s)) d\xi ds = f(x, t), \quad (3.3)$$

$$(x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

برای تقریب انتگرال های در رابطه ی (۳.۳) بازه انتگرال یعنی $[0, t]$ را با تبدیل

$$s(t, \theta) = \frac{t}{\varphi} \theta + \frac{t}{\varphi}$$

به بازه $[-1, 1]$ تبدیل می کنیم. در این صورت (۳.۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sum_{\mu=1}^Q d_\mu \psi_\mu(x, t) - \int_{-1}^1 \int_\Omega \frac{t}{\varphi} K(x, t, \xi, s(t, \theta), \sum_{\mu=1}^Q d_\mu \psi_\mu(\xi, s(t, \theta))) d\xi d\theta = f(x, t), \quad (4.3)$$

$$(x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

اکنون فرض می کنیم Ω ناحیه ای به صورت غیرمستطیلی زیر باشد:

$$\Omega = \{\xi = (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \tau \leq 1, v_1(\tau) \leq \sigma \leq v_2(\tau)\}, \quad (5.3)$$

در این صورت معادله (۴.۳) را می توان به صورت زیر نوشت: (۶.۳)

$$\sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(x, t) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{v_1(\tau)}^{v_2(\tau)} \frac{t}{\tau} K(x, t, \sigma, \tau, s(t, \theta), \sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(\sigma, \tau, s(t, \theta))) d\sigma d\tau d\theta = f(x, t).$$

همچنین با تبدیل بازه $[v_1(\tau), v_2(\tau)]$ به بازه $[-1, 1]$ با استفاده از تبدیل

$$\sigma(\tau, z) = \frac{v_2(\tau) - v_1(\tau)}{2} z + \frac{v_2(\tau) + v_1(\tau)}{2},$$

معادله (۶.۳) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(x, t) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K_1(x, t, \sigma(\tau, z), \tau, s(t, \theta), \sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(\sigma(\tau, z), \tau, s(t, \theta))) dz d\tau d\theta = f(x, t), \quad (7.3)$$

که در آن

$$K_1(\bullet) = t^{\frac{(v_2(\tau) - v_1(\tau))}{2}} K(\bullet). \quad (8.3)$$

با جای گذاری نقاط هم محلی $(x_i, t_r), i = 0, \dots, N, r = 0, \dots, M$ ، رابطه (۷.۳) خواهیم داشت: (۹.۳)

$$\sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(x_i, t_r) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K_1(x_i, t_r, \sigma(\tau, z), \tau, s(t_r, \theta), \sum_{\mu=1}^Q d_{\mu} \psi_{\mu}(\sigma(\tau, z), \tau, s(t_r, \theta))) dz d\tau d\theta = f(x_i, t_r).$$

اکنون برای تقریب انتگرالها در (۹.۳) از یک روش عددی انتگرال گیری گوسی m نقطه ای با نقاط $\{\theta_l\}, \{\tau_p\}, \{z_q\}$ و وزنهای $\{w_l\}, \{w_p\}, \{w_q\}$ استفاده می کنیم و می توان نوشت:

$$\sum_{\mu=1}^Q \hat{d}_{\mu} \psi_{\mu}(x_i, t_r) - \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m w_p w_q w_l K_1(x_i, t_r, \sigma(\tau_p, z_q), \tau_p, s(t_r, \theta_l), \sum_{\mu=1}^Q \hat{d}_{\mu} \psi_{\mu}(\sigma(\tau_p, z_q), \tau_p, s(t_r, \theta_l))) = f(x_i, t_r). \quad (10.3)$$

معادله (۱۰.۳) یک دستگاه معادلات غیرخطی است که می توان آن را با استفاده از روش نیوتن به طور تقریبی حل نمود و ضرائب $\hat{d}_{\mu}$ را به دست آورد. بنا براین تقریب تابع $u(x, t)$ در هر نقطه $\Omega \times [0, T]$ به صورت زیر است:

$$\hat{u}_{M,N}(x, t) = \sum_{\mu=1}^Q \hat{d}_{\mu} \psi_{\mu}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

حالت کلی تر ناحیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_d,$$

که در آن Ω_i , $1 \leq i \leq d$ نواحی به فرم (۵.۳) هستند و اشتراک درون مجموعه های Ω_i باید تهی باشد. در این صورت دستگاه معادلات به صورت زیر را داریم:

$$\sum_{\mu=1}^Q \hat{d}_\mu \psi_\mu(x_i, t_r) - \sum_{e=1}^d \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m w_p w_q w_l K_1(x_i, t_r, \sigma_e(\tau_p, z_q), \tau_p, s(t_r, \theta_l), \sum_{\mu=1}^Q \hat{d}_\mu \psi_\mu(\sigma_e(\tau_p, z_q), \tau_p, s(t_r, \theta_l))) = f(x_i, t_r).$$

که در آن

$$\sigma_e(\tau, z) = \frac{v_{2,e}(\tau) - v_{1,e}(\tau)}{2} z + \frac{v_{2,e}(\tau) + v_{1,e}(\tau)}{2}. \quad (۱۲.۳)$$

و $v_{1,e}$ ، $v_{2,e}$ توابع پیوسته ای روی Ω_e هستند.

روش تکراری هم محلی بر اساس تقریب $\hat{u}_n(x, t)$ که از روش هم محلی به دست آمده به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{l=1}^{m_n} \sum_{p=1}^{m_n} w_l w_p \frac{t}{\tau} K(x, t, \xi_p, s(t, \theta_l), \hat{u}_n(\xi_p, s(t, \theta_l))) + f(x, t), n \geq 1.$$

دلیل تعریف روش تکراری هم محلی این است که تقریب بهتری نسبت به هم محلی داشته باشیم و در مثال ارائه شده این نشان داده شده است. البته تحلیل خطای آن موضوعی است که می تواند به عنوان یک موضوع مناسب مورد بررسی قرار گیرد.

۴ تحلیل خطای روش

در این قسمت خطای روش را مورد بررسی قرار می دهیم. عملگر تقریب $\mathcal{T}_n$ را روی $C(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{T}_n u(x, t) = \sum_{l=1}^{m_n} \sum_{p=1}^{m_n} w_l w_p \frac{t}{\tau} K(x, t, \xi_p, s(t, \theta_l), u(\xi_p, s(t, \theta_l))) + f(x, t), n \geq 1.$$

فرض های زیر را برای $\{\mathcal{T}_n \mid n \geq 1\}$ در نظر می گیریم [۱۴]:

۱. $\mathcal{T}_n$ و عملگرهای غیر خطی پیوسته تام روی $C(\Omega)$ به $C(\Omega)$ هستند.

۲. $\mathcal{T}_n$ یک خانواده فشرده از عملگرها روی $C(\Omega)$ هستند یعنی برای هر مجموعه کراندار $B \subset C(\Omega)$ بستار $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n(B)$ روی $C(\Omega)$ فشرده است.

۳. $\mathcal{T}_n$ به طور نقطه ای به $\mathcal{T}$ روی $C(D)$ همگراست.

۴. در هر نقطه از $\mathcal{T}_n, C(D)$ یک خانواده پیوسته یکنواخت است.

۵. $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}_n$ دوبر مشتق پذیر فرشه روی $B(u_0, r) = \{u : \|u - u_0\| \leq r, r > 0\}$ هستند و $\|\mathcal{T}_n''\| \leq \alpha < \infty$.

قضیه زیر را برای هر $u \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ با استفاده از تابع شعاعی چندمربعی معکوس داریم [۱].

قضیه ۱.۴. فرض کنید $\phi(x)$ تابع شعاعی چند مربعی معکوس باشد. همچنین فرض می کنیم $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ یک مجموعه باز و کراندار و در شرط مخروط داخلی صدق کند. اگر درونیاب $\mathcal{N}_\phi(\Omega)$ را با $u \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ نشان دهیم، در این صورت برای بعضی C ها داریم:

$$\|u - \mathcal{P}_{M,N}u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\frac{-C}{h^{\bar{\chi},D}}} \|u\|_{\mathcal{N}_\phi(\Omega)}. \quad (1.4)$$

معادله (۱.۳) را می توان به صورت عملگری زیر نمایش داد:

$$\hat{u}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{T}_n \hat{u}_n, \quad (2.4)$$

برای این که دقت بهتری به دست آوریم، همان طور که در بالا اشاره شد رابطه زیر را تعریف می کنیم که فرم عملگری روش تکراری هم محلی نامیده می شود^۳:

$$\tilde{u}_n = \mathcal{T}_n \hat{u}_n, \quad (3.4)$$

که بنابر این می توان نوشت:

$$\mathcal{P}_n \tilde{u}_n = \hat{u}_n. \quad (4.4)$$

در نتیجه داریم:

$$\tilde{u}_n = \mathcal{T}_n \mathcal{P}_n \tilde{u}_n. \quad (5.4)$$

قضیه زیر که برای همگرایی روش استفاده می شود را ارائه می دهیم [۱۵].

قضیه ۲.۴. فرض کنید شرایط ۱-۵ برقرار باشد. همچنین u_0 جواب (۱) باشد. همچنین فرض می کنیم عدد ۱ مقدار ویژه عملگر $\mathcal{T}'(u_0)$ نباشد که مشتق فرشه $\mathcal{T}$ در u_0 می باشد. اگر شرط ۵ روی $C(\Omega)$ $B(u_0, r) \subseteq C(\Omega)$ برقرار باشد، در این صورت u_0 یک جواب ایزوله از معادله (۱) است. به علاوه اعداد Λ, ε وجود دارند به طوری که به ازای هر $n \geq \Lambda$ یک جواب یکتای $\tilde{u}_n$ در $B(u_0, \varepsilon)$ دارد. همچنین عدد ثابت λ_1 وجود دارد به طوری که

$$\|\tilde{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n \mathcal{P}_n u_0\|, \quad n \geq \Lambda. \quad (6.4)$$

قضیه زیر همگرایی $\hat{u}_n$ را به جواب دقیق u نشان می دهد.

قضیه ۳.۴. فرض کنید شرایط قضیه های (۱.۴) و (۲.۴) برقرار باشد و $u_0 \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ یک جواب یکتا از (۱.۲) باشد. در این صورت اعداد $M, \epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > M$ این روش یک جواب یکتای $\hat{u}_n \in B(u_0, \epsilon)$ دارد و

$$\|\hat{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\frac{-C}{h^{\bar{\chi},\Omega}}} \|u_0\|_{\mathcal{N}_\phi(\Omega)} (1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_1 \lambda_3 \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (7.4)$$

اثبات. با استفاده از قضیه (۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lambda_1 \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n \mathcal{P}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \lambda_1 \{ \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{T}_n(u_0 - \mathcal{P}_n u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

همچنین با استفاده از ۱ عملگر $\mathcal{T}_n$ روی $C(\Omega)$ به ازای n های بزرگ کراندار یکنواخت است. بنابراین می توان نوشت:

$$\|\tilde{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \{ \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \lambda_2 \|u_0 - \mathcal{P}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \}. \quad (9.4)$$

از طرفی دیگر داریم:

$$\|\hat{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - \mathcal{P}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{P}_n\| \|\tilde{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (10.4)$$

³Iterated collocation method

با ترکیب (۸.۴) و (۱۰.۴) خواهیم داشت:

$$\|\hat{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - \mathcal{P}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{P}_n\|_{L^\infty(\Omega)} \{\lambda_1 \{\|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \lambda_2 \|u_0 - \mathcal{P}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}, \quad (11.4)$$

چون که عملگر $\mathcal{P}_n$ یک عملگر درونیایی است بنابراین کراندار است و فرض می‌کنیم:

$$\|\mathcal{P}_n\| \leq \lambda_3 < \infty.$$

بنابراین با استفاده از قضیه (۴/۱) داریم

$$\|\hat{u}_n - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\frac{-c}{h\bar{\chi}, \Omega}} \|u_0\|_{\mathcal{N}_\phi(\Omega)} (1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_1 \lambda_3 \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (12.4)$$

□

و اثبات تمام است.

۵ نتایج عددی

در این قسمت به ارائه یک مثال عددی می‌پردازیم. از تابع معکوس چند گانه مربعی استفاده می‌کنیم. برای این تابع مقادیر $\beta = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3}{4}$ و $c = 4$ را انتخاب می‌کنیم. همچنین روش عددی انتگرال گیری را ۵ نقطه ای گوسی انتخاب می‌کنیم. برای بررسی خطای روش از ماکسیمم خطای مطلق یعنی

$$\|e\|_\infty = \max |u(x, t) - \hat{u}(x, t)|, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T],$$

استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۵. معادله ترکیبی ولترا فردهلم

$$u(x, y, t) - \int_0^t \int_\Omega k(x, y, t, \sigma, \tau, s, u(\sigma, \tau, s)) d\sigma d\tau ds = f(x, y, t),$$

را در نظر بگیرید که در آن $\Omega = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{4}, \sin(\sigma) \leq \tau \leq \cos(\sigma)\}$

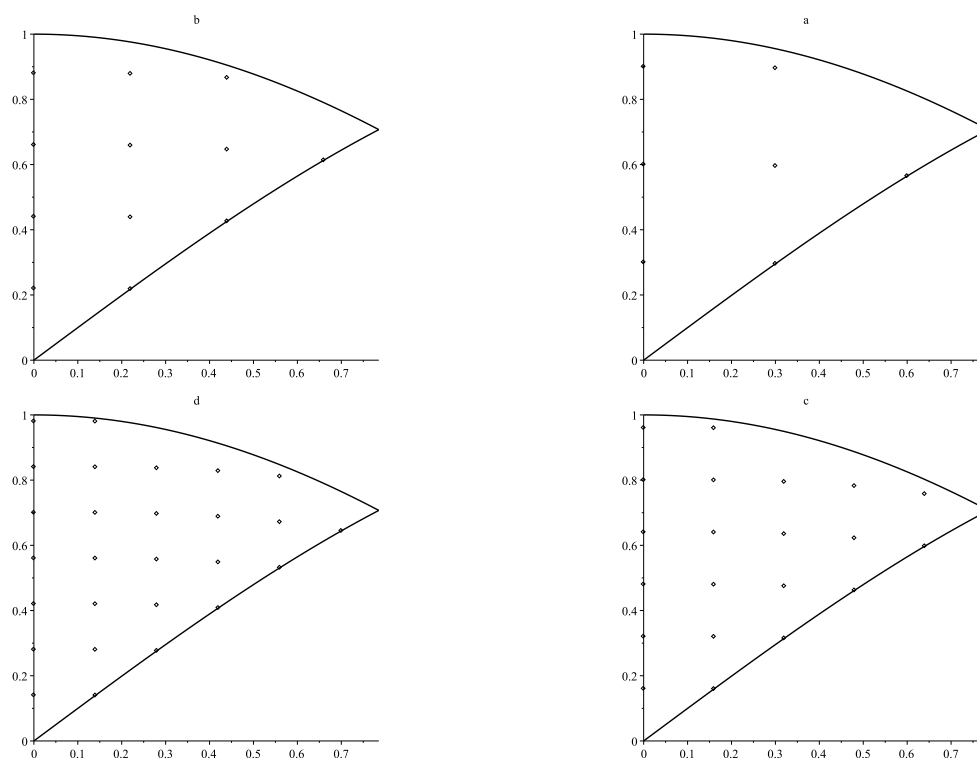
$$k(x, y, t, \sigma, \tau, s, u) = \sin(x)u^2.$$

جواب دقیق این مساله $u(x, y, t) = x$ است و تابع $f(x, y, t)$ بر اساس مساله بدست می‌آید. نتایج عددی به ازای مقادیر متفاوت M, N و β در جدول ۲ نشان داده شده است. توزیع نقاط در شکل ۱ ارائه شده است. همچنین در شکل ۲ مقدار ماکسیمم خطا به ازای $M = 2, N = 27, \beta = 0.5, 1.5$ ارائه شده است.

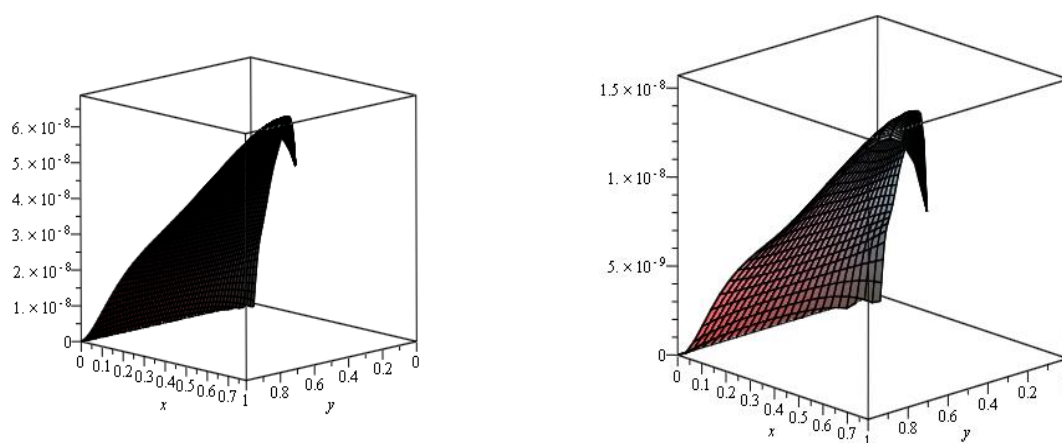
برای این که نشان دهیم روش هم‌محلی تکراری (۳.۴) نسبت به روش هم‌محلی جواب بهتری می‌دهد، برای این مثال روش هم‌محلی، و هم‌محلی تکراری را به ازای $M = 2, N = 5, \beta = 1.5$ به کار می‌بریم. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود روش هم‌محلی تکراری نسبت به هم‌محلی خطای کمتری را ارائه می‌دهد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش بدون شبکه یا مش آزاد متنی بر هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای حل معادله انتگرال ترکیبی ولترا فردهلم روی نواحی غیرمستطیلی استفاده کردیم. خطای روش ارائه شد. این روش، که مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی است، یک روش بدون شبکه‌بندی است و نیازی به مثلث‌سازی نیست و پیاده‌سازی آن بسیار ساده است. روش‌های استاندارد برای تقریب توابع چندمتغیره و ساختن پایه‌های مناسب نیاز به مثلث‌سازی دارد که معمولاً روش سختی برای بعد بیشتر از دو است. با توجه به مثال ارائه شده مشاهده می‌شود که روش هم‌محلی تکراری خطای کمتری نسبت به هم‌محلی دارد. نوع ناحیه برای این روش مهم نیست و هر ناحیه غیرمستطیلی را می‌توان در نظر گرفت. این روش را می‌توان برای معادله انتگرال اینتگرو دیفرانسیل نیز به کار برد.



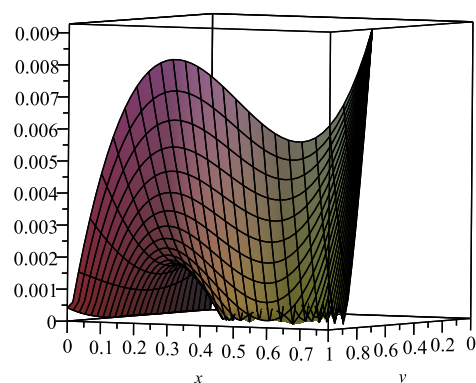
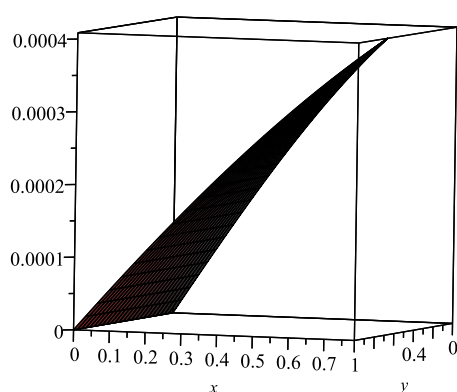
شکل ۱: توزیع نقاط برای مثال ۱ ($a: N = 7$ ، $b: N = 12$ ، $c: N = 21$ ، $d: N = 27$).



شکل ۲: قدر مطلق خطا برای مثال ۱ (چپ: $M = 2, N = 27, \beta = 0.5$ ، راست: $M = 2, N = 27, \beta = 1/5$).

جدول ۲: ماکسیمم خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف M, N و β با $t = 0.5$ برای مثال ۱.

$\beta = 1.5$	$\beta = 0.5$	N, M
5.0×10^{-3}	2.5×10^{-3}	۳، ۲
1.5×10^{-3}	8.0×10^{-4}	۷، ۳
1.0×10^{-5}	4.0×10^{-6}	۱۲، ۳
4.0×10^{-6}	2.0×10^{-6}	۲۱، ۲
6.0×10^{-8}	1.5×10^{-8}	۲۷، ۲



شکل ۳: قدر مطلق خطا برای مثال ۱ به ازای $\beta = 1.5, N = 5, M = 2$ (چپ: هم‌محلی تکراری، راست: هم‌محلی).

فهرست منابع

- [1] Wendland, H., 2005. *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press.
- [2] Madych, W.R and Nelson, S.A., 1990. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions II, *Math. Comput.* 54 (189), pp.211-230. doi:10.1090/S0025-5718-1990-0993931-7
- [3] Madych, W.R. and Nelson, S.A., 1992. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation, *J. Approx. Theory*, 70, pp.94-114. doi:10.1016/0021-9045(92)90058-V
- [4] Kauthen, P.J., 1989. Continuous time collocation methods for Volterra-Fredholm integral equations, *Numer. Math.* 56, pp.409-424. doi:10.1007/BF01396646
- [5] Brunner, H. and Van der Houwen, P.J., 1986. *The numerical solution of Volterra equations*, CWI Monographs, vol. 3, North-Holland, Amsterdam.

- [6] Maleknejad, K. and Hadizadeh, M., 1999. A new computational method for Volterra-Fredholm integral equations, *Comput. Math. Appl.* 37, pp.1-8. doi:10.1016/S0898-1221(99)00107-8
- [7] Wazwaz, A.M., 2002. A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations, *Appl. Math. Comput.* 127, pp.405-414. doi: 10.1016/S0096-3003(01)00020-0
- [8] Banifatemi, E., Razzaghi, M. and Yousefi, S., 2007 Two-dimensional Legendre Wavelets Method for the mixed Volterra-Fredholm integral equations, *J. Vibr. Control.* 13, pp.1667-1675. doi:10.1177/1077546307078751
- [9] Hardy, R.L., 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *J. Geophys. Res.* 76, pp.1905-1915. doi:10.1029/JB076i008p01905
- [10] Han, G. and Zhang, L., 1994. Asymptotic expansion for the trapezoidal Nystrom method of linear Volterra-Fredholm equations, *J. Comput. Appl. Math.* 51, pp.339-348. doi:10.1016/0377-0427(92)00013-Y
- [11] Laeli Dastjerdi, H., Maalek Ghaini, F. M. and Hadizadeh, M., 2013. A meshless approximate solution of mixed Volterra-Fredholm integral equations, *Int. J. Comput. Math.* 90, pp.527-538. doi:10.1080/00207160.2012.720677
- [12] Kansa, E.J., 1990. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates, *Comput. Math. Appl.* 19 (8-9), pp.127-145. doi:10.1016/0898-1221(90)90270-T
- [13] Kansa, E.J., 1990. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Comput. Math. Appl.* 19 (8-9), pp.147-161. doi:10.1016/0898-1221(90)90271-K
- [14] Atkinson, K. E. and Potra, F. A., 1987. Projection and iterated projection methods for nonlinear integral equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 24, pp.1352-1373. doi:10.1137/0724087
- [15] Atkinson, K. and Flores, J., 1993. The discrete collocation method for nonlinear integral equations, *IMA J. Numer. Anal.* 13, pp.195-213. doi:10.1093/imanum/13.2.195
- [16] Fasshauer, G.E., 2006. *Meshfree methods*. In: Rieth, M., Schommers, W. (eds.) Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology, American Scientific Publishers, 27, pp.33-97.
- [17] Erfanian, M. and Zeidabadi, H., 2019. Solving two-dimensional nonlinear mixed Volterra Fredholm integral equations by using rationalized Haar functions in the complex plane, *J. Math. Model.* 7, pp.399-416. doi:10.22124/JMM.2019.13987.1300
- [18] Katani, R. and Mckee, S., 2020. A hybrid Legendre block-pulse method for mixed Volterra-Fredholm integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 376, 112867. doi:10.1016/j.cam.2020.112867
- [19] Paul, S.K., Mishra, L.N and Mishra, V.N., 2023. Analysis of mixed type nonlinear Volterra-Fredholm integral equations involving the Erdélyi-Kober fractional operator, *J. King Saud Univ. Sci.* 35, 102949. doi:10.1016/j.jksus.2023.102949



Collocation and iterated collocation method for the numerical solution of mixed two-dimensional Volterra-Fordhelm integral integral equations on non rectangular region with its error analysis

Hojatollah Laeli Dastjerdi ⁴

Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran

Received: 19 August 2024

Accepted: 20 May 2025

Communicated by: Alireza Fakharzadeh Jahromi

Abstract: In this paper, using the meshless method based on collocation and iterated collocation method, we investigate the numerical solution of the two-dimensional Volterra-Fordhelm integral integral equations on non-rectangular regions. This method is a meshfree method and scattered points are used to approximate the solution of the equation. The implementation of this method is simple and its calculations are done easily. The convergence of the method is checked and the numerical results show that this method is consistent with its analysis.

Keywords: Radial Basis functions; Mixed Volterra-Fredholm integral equations; Convergence; Collocation method;



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

⁴Corresponding author.

E-mail addresses: h.laeli@cfu.ac.ir (Hojatollah Laeli Dastjerdi)