



نمای فاز سراسری زیرخانواده‌ای از سیستم فیتزو-ناگایاما

نسرین صدری^(۱) و عارفه نبوی^(۲)

^(۱) دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

ط پژوهشگاه دانش‌های بنیادین، پژوهشکده ریاضی، تهران، ایران

^(۲) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

دبیر مسئول: فاطمه هلم قانع

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۱۵

چکیده: مطالعه عملکرد و انتقال داده‌ها در سیستم‌های عصبی از اهداف اصلی علم نورون‌شناسی به شمار می‌روند و سیستم فیتزو-ناگایاما یکی از مدل‌های ریاضی معرفی شده در این حوزه است. تا کنون چندین خانواده از سیستم‌های فیتزو-ناگایاما معرفی شده است. در این مقاله، علاوه بر بررسی انشعابات موضعی و تحلیل آن‌ها بر اساس واکنش‌های نورونی، به مطالعه نمای فاز سراسری بر روی دیسک پوانکاره یک خانواده دو بعدی از این مدل می‌پردازیم و نماهای فاز را دسته‌بندی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: سیستم فیتزو-ناگایاما، نمای فاز سراسری، فشرده‌سازی پوانکاره

رده‌بندی ریاضی: 34C05, 34C07, 37C08

۱ مقدمه

نحوه انتقال داده‌ها در دستگاه عصبی یکی از اهداف علم نورون‌شناسی به شمار می‌رود. نورون‌ها واحد بنیادی دستگاه عصبی هستند که وظیفه آن‌ها انتقال اطلاعات از طریق سیگنال‌های الکتریکی و شیمیایی است. سیستم فیتزو-ناگایاما یکی از مدل‌های ریاضی برای نمایش ریاضی عملکرد نورون‌ها است. سیستم فیتزو-ناگایاما دو بعدی

$$\begin{aligned}\dot{x} &= c \left(x + y - \frac{1}{3}x^3 \right), \\ \dot{y} &= -\frac{1}{c}(x - a + by),\end{aligned}\tag{۱.۱}$$

که در آن $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید [۵، ۱۰].

در این مدل، متغیر x معرف پتانسیل غشایی نورون است که فعالیت الکتریکی نورون را نشان می‌دهد و y متغیر بازایی است. در واقع، این متغیر رفتار فرایندهای کندتر در نورون (مانند فعال شدن کانال‌های یونی خاص) را کنترل می‌کند. همچنین، متغیرهای a ، b و c به ترتیب نشان‌دهنده‌ی آستانه تحریک (نورون چقدر آسان یا سخت تحریک می‌شود)، کنترل‌کننده تأثیر متغیر بازایی بر روی پتانسیل غشایی و مقیاس زمانی و سرعت دینامیک نورون (تعیین سرعت فرایندها) می‌باشند.

در سیستم‌های زیستی مانند مغز یا قلب، درک انشعابات می‌تواند به شناخت بهتر شرایط بیماری یا نوسانات طبیعی کمک کند. مدل فیتزو-ناگایاما در نورون‌شناسی به دلیل توانایی آن در توصیف رفتارهای نوسانی و آستانه‌ای نورون‌ها اهمیت زیادی دارد. این سیستم، گذار بین حالت استراحت و تحریک نورون‌ها را به خوبی مدل می‌کند و می‌تواند نوسانات حدی و شرایط لازم برای بروز آن‌ها را پیش‌بینی کند. بنابراین مدل فیتزو-ناگایاما با داشتن دو متغیر پویا و سه پارامتر، رفتارهای کلیدی نورون‌ها را به خوبی مدل می‌کند.

این مدل در ابتدا در سال ۱۹۶۱ توسط فیتزو [۵] و در سال ۱۹۶۲ توسط ناگایاما [۱۰] معرفی شد. تا کنون تعمیم‌های مختلفی از این سیستم و با ابعاد مختلف معرفی شده‌اند، [۳، ۱۱]. همچنین مطالعات گسترده‌ای بر روی این خانواده از سیستم‌ها صورت گرفته و مقالات تحقیقاتی زیادی به چاپ رسیده شده است.

جورجسکو و همکارانش در سال ۲۰۰۳ به مطالعه و بررسی انشعابات سیستم (۱.۱) در حالت غیرتباهیده $a \neq 0$ و با فرض ثابت بودن $c > 1$ پرداختند. در پژوهش آن‌ها، به مواردی همچون انشعاب گره‌زینی، هاپف و هموکلینیک اشاره شده است [۴]. ما در این مقاله نشان خواهیم داد که در حالت ناتباهیده انشعاب چنگال، جایگزین انشعاب گره‌زینی خواهد شد. افزون بر این نه تنها منحنی انشعاب هاپف را در حالت تباهیده ارائه می‌کنیم بلکه وقوع آن را طبق قضیه انشعاب هاپف اثبات و ضریب اول لیاپانوف را به جهت بررسی پایداری سیکل حدی منشعب شده، محاسبه می‌کنیم، این در حالی است که ضریب اول لیاپانوف در مقاله [۴] محاسبه نشده است. از دیگر تفاوت‌های اساسی کار جورجسکو و همکارانش با این پژوهش، عدم ارائه دقیق نقاط تعادل و بررسی پایداری نقاط به دلیل پیچیدگی محاسبات در حالت غیرتباهیده است. این در حالی است که ما نقاط تعادل و پایداری آن‌ها را در حالت $a = 0$ به طور کامل مطالعه می‌کنیم.

در سال ۲۰۰۰، روکسونیو و همکارانش شرایط وقوع انشعاب هاپف تعمیم‌یافته را برای این سیستم و در حالت غیرتباهیده $a \neq 0$ مطالعه کردند [۱۱]. از موارد تمایز این مقاله با نتایج مقاله حاضر می‌توان به عدم وقوع انشعاب هاپف تعمیم‌یافته اشاره کرد که به کمک ضریب اول لیاپانوف محاسبه شده، اثبات می‌شود.

در MathSciNet، بیشتر از ۷۰۰ مقاله منتشر شده در مورد این سیستم یا مرتبط با آن وجود دارد که ورژن تأخیری، تصادفی و گسسته این سیستم مورد بررسی قرار گرفته شده است و کنترل بهینه و یا همگام‌سازی این سیستم و مدل‌های تعمیم‌یافته آن مورد بررسی قرار گرفته شده است. برای آشنایی بیشتر با این سیستم و برخی از نتایج و تحقیقات انجام شده، [۸] را بنگرید.

مطالعه نمای فاز سراسری سیستم‌های دینامیکی از جمله موضوعات جذاب و به‌روز تحقیقاتی است که توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. نمای فاز سراسری سیستم آشوبی راسلر در سال ۲۰۱۱ توسط لیما و ایبره مطالعه شد، [۶]. در سال ۲۰۱۹، والز نمای فاز سراسری سیستم نیوئل-وایت‌هد که در فیزیک و دینامیک سیالات برای توصیف تغییرات ناپایدار در جریان‌های همرفتی استفاده می‌شود را به طور کامل مطالعه کرده است [۱۲]. ایبره و نبوی در سال ۲۰۲۲ به مطالعه نمای فاز سراسری سیستم سلکوف که بیانگر فرایند زیستی گلیکولیز است پرداختند، [۹]. در سال ۲۰۲۳، ایبره و والز نمای فاز سراسری مدار تعمیم‌یافته واندربیل را بر روی دیسک پوانکاره ارائه کردند [۸].

مطالعه‌ی انشعابات و نمای فاز سراسری روی دیسک پوانکاره در سیستم‌های دینامیکی و نظریه‌ی آشوب از جهات مختلف، مفید و حائز اهمیت است که به‌طور خلاصه به برخی از آن‌ها می‌توان به‌صورت زیر اشاره کرد:

(۱) دیسک پوانکاره یک مدل هندسی است که اجازه می‌دهد تحولات سیستم‌های دینامیکی را در یک ناحیه‌ی فشرده و محدود نمایش دهیم. این ویژگی کمک می‌کند تا بتوان رفتار کلی سیستم را بدون نیاز به نمایش فضای فاز نامحدود بررسی کنیم. (۲) از آنجا که نقاط ثابت، مسیرهای پایدار و ناپایدار و ساختارهای کلی سیستم در دیسک پوانکاره مشخص می‌شوند، این روش برای مشاهده‌ی تغییرات رفتار دینامیکی تحت تأثیر پارامترها بسیار مفید است. به‌عنوان مثال، مدل فیتزو-ناگایاما که رفتارهای گذرا و عملکرد نورون‌ها را توصیف می‌کند، دارای جاذب‌ها، مدارهای حدی و نقاط تعادل است که تحلیل آن‌ها روی دیسک پوانکاره امکان بررسی دقیق پایداری و سیکل‌های حدی را فراهم می‌کند. (۳) در سیستم‌های زیستی، پارامترهایی مانند جریان‌های ورودی، ضریب بازایی و میزان تحریک می‌توانند منجر به تغییرات ناگهانی در رفتار نورونی شوند. با استفاده از دیسک پوانکاره، این تغییرات را می‌توان در یک فضای محدود و فشرده مطالعه کرد و نقاط بحرانی را شناسایی کرد. (۴) در مدل‌سازی بیماری‌های نورولوژیک، تحلیل فاز سراسری روی دیسک پوانکاره می‌تواند به فهم بهتر الگوهای ناهنجار و راه‌های کنترل آن‌ها منجر شود. (۵) بررسی مرکز سراسری برای درک رفتار بلندمدت سیستم و پیش‌بینی پایداری سیستم حائز اهمیت است. به‌عنوان مثال در سیستم‌های قلبی و عروقی، مرکز سراسری می‌تواند نشان دهد که چگونه ضربان قلب از ریتم منظم به آریتمی تغییر می‌کند. لازمه‌ی مطالعه مرکز سراسری، بررسی انشعابات موضعی و نمای فاز سراسری بر روی دیسک پوانکاره است، [۷].

تا کنون هیچ مطالعه‌ای به بررسی انشعابات موضعی سیستم (۱.۱) در حالت تباهیده و همچنین تحلیل نمای فاز سراسری آن بر روی دیسک پوانکاره انجام نشده است. این خلأ پژوهشی انگیزه‌ای برای انجام یک کار تحقیقاتی جدید و مهم است که می‌تواند به درک عمیق‌تری از رفتار دینامیکی این سیستم منجر شود.

این مقاله به‌صورت زیر بخش‌بندی شده است: در بخش دوم به تعاریف و مفاهیم اولیه در مورد بزرگ‌نمایی و فشرده‌سازی پوانکاره اشاره

شده است. در بخش سوم، نقاط تعادل متناهی سیستم به ازای $a = 0$ محاسبه و منحنی های انشعاب موجود از جمله انشعاب چنگال، هاپف (به همراه محاسبه ضریب لیاپانوف به منظور بررسی پایداری سیکل حدی منشعب شده) و تغییر نوع نقطه تعادل از گره به کانون (و یا بالعکس) ارائه و از نقطه نظر واکنش های نوروئی بررسی شده است. در بخش چهارم به بررسی و رسم نماهای فاز سراسری سیستم در دیسک پوانکاره پرداخته شده است. در این بخش، یکی از نتایج اصلی مقاله در قالب قضیه زیر، ارائه شده است:

قضیه ۱.۱. نمای فاز سراسری سیستم (۱.۱) به ازای مقادیر

$$\{(a, b, c) | a = 0, b > 0, c < 0\}, \quad (2.1)$$

به طور توپولوژیکی معادل با شکل (۲) و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای

$$\{(a, b, c) | a = 0, b < 0, c > 0\}, \quad (3.1)$$

به طور توپولوژیکی معادل با یکی از نماهای فاز در شکل (۳) است.

در پایان و در بخش پنجم به منظور راستی آزمایی نتایج تحلیلی ارائه شده در مقاله، شبیه سازی های متعدد عددی انجام شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۲ بزرگنمایی

فرض کنید p یک نقطه تعادل از میدان برداری $X = (R, S)$ باشد. نقطه تعادل p را پوچ توان (و به طور خطی صفر) می نامیم هرگاه به ترتیب $DX(p) \neq 0$ و هر دو مقدار ویژه $DX(p)$ برابر با صفر باشد و $(DX(p) = 0)$.

بزرگنمایی از روش های مهم در مطالعه رفتار توپولوژیکی جواب های یک سیستم دینامیکی حقیقی در همسایگی نقاط تعادل پوچ توان و به طور خطی صفر است. در این روش نقطه تعادل p به یک خط یا دایره گسترده می شود و نقاط تعادل جدید روی خط یا دایره بررسی می شوند. روش های متنوعی برای انجام بزرگنمایی وجود دارد. ما در این مقاله از بزرگنمایی در جهت x استفاده خواهیم کرد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x, y) = R_m(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= S(x, y) = Q_m(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (1.2)$$

را در نظر بگیرید که در آن R_m و Q_m چند جمله ای های از درجه $m \geq 1$ می باشند. اکنون با اعمال تغییر متغیر $(x, y) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ سیستم (۱.۲) در مختصات قطبی به صورت

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mathcal{R}(\theta)r + \dots, \\ \dot{\theta} &= \mathcal{T}(\theta) + \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

بازنویسی خواهد شد. چندجمله ای $\mathcal{T}$ را چندجمله ای مشخصه سیستم (۱.۲) و θ^* را مسیر مشخصه می نامند. چندجمله ای $\mathcal{T}$ در مختصات دکارتی به صورت

$$\mathcal{T}(x, y) = xS_m(x, y) - yR_m(x, y) \quad (3.2)$$

نوشته می شود.

بزرگنمایی در جهت x به صورت نگاشت $(x, z) \mapsto (x, z)$ تعریف می شود. این نگاشت نقطه تعادل مبدأ را به خط $x = 0$ تصویر می کند. سیستم (۱.۲) با بزرگنمایی در جهت x به

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x, xz), \\ \dot{z} &= \frac{Q(x, xz) - zS(x, xz)}{x} \end{aligned} \quad (4.2)$$

تبدیل می شود.

برای بررسی رفتار جواب های دستگاه (۱.۲) اطراف نقاط تعادل، لازم است رفتار نقاط تعادل سیستم (۴.۲) را روی خط $x = 0$ بررسی نمود. در صورتی که تعدادی از این نقاط، ناتباهیده باشند آنگاه عملیات بزرگنمایی را ادامه خواهیم داد.

۲.۲ فشرده سازی پوانکاره

در رسم نماهای فاز یک میدان برداری، می‌بایست کل صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ مورد بررسی قرار گیرد که در عمل غیرممکن است. برای رسم نمای فاز میدان‌های برداری چندجمله‌ای، می‌توان از فشرده‌سازی پوانکاره استفاده کرد. در این روش، امکان رسم نمای فاز در یک صفحه‌ی متناهی به جای رسم در کل صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ فراهم می‌شود.

فرض می‌کنیم که $P = P(x_1, x_2)$ و $Q = Q(x_1, x_2)$ و میدان برداری به صورت $\mathbf{x} = P \frac{\partial}{\partial x_1} + Q \frac{\partial}{\partial x_2}$ باشد. همچنین $d = \max(\text{degree}(P, Q))$.

ابتدا کره‌ی پوانکاره

$$\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

و صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ را به عنوان صفحه‌ای از $\mathbb{R}^2$ مماس بر $\mathbb{S}^2$ در نقطه $(0, 0, 1)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید تصویر مرکزی $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ هر نقطه‌ی $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ را به دو نقطه از $\mathbb{S}^2$ تصویر کند. این دو نقطه از برخورد کره‌ی $\mathbb{S}^2$ با خطی پدید می‌آیند که مبدأ مختصات را به نقطه‌ی $(x_1, x_2, 1)$ وصل می‌کند. واضح است که مدار استوای $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ از کره در تناظر با بی‌نهایت $\mathbb{R}^2$ است. میدان برداری $\mathbf{x}$ در $\mathbb{R}^2$ میدان برداری $\bar{\mathbf{x}}$ را بر $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ القا می‌کند. میدان جدید $\bar{\mathbf{x}}$ از دو نسخه متقارن نسبت به مبدأ میدان برداری $\mathbf{x}$ تشکیل می‌شود، یکی از آنها در نیم کره شمالی $\mathbb{R}^2$ و دیگری در نیم کره جنوبی.

با ضرب میدان برداری $\bar{\mathbf{x}}$ در عامل $\Delta^{1-d} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{d-1} = y_3^{d-1}$ ، به یک میدان برداری روی $\mathbb{S}^2$ توسعه داده می‌شود. میدان برداری توسعه یافته $(p(\mathbf{x}))$ را فشرده‌سازی پوانکاره میدان برداری $\mathbf{x}$ روی $\mathbb{R}^2$ می‌نامیم. برای مطالعه رفتار دینامیکی $\mathbf{x}$ در بی‌نهایت، رفتار میدان برداری $p(\mathbf{x})$ روی $\mathbb{S}^1$ باید بررسی شود.

از نقشه‌های (چارت‌های) موضعی برای محاسبات کار با رویه‌ها، استفاده می‌شود. برای کره‌ی $\mathbb{S}^2$ شش چارت موضعی به شکل

$$U_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i > 0\}, \quad V_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i < 0\},$$

و نگاشت‌های متناظر $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت $\phi_i(y) = \psi_i(-y) = (y_m/y_i, y_n/y_i)$ تعریف می‌شوند به طوریکه $i = 1, 2, 3$ و $m < n$. مقادیر $\phi_i(y)$ و $\psi_i(y)$ را به ازای هر $i = 1, 2, 3$ با (u, v) نشان می‌دهیم. اگر $\bar{\mathbf{x}}|_{U_1}$ نمایش میدان برداری تعریف شده به صورت $D\phi_1(y)\bar{\mathbf{x}}(x)$ باشد، آنگاه می‌توان دید که میدان برداری $p(\mathbf{x})$ در نقشه‌ی موضعی (U_1, ϕ_1) به صورت

$$\dot{u} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right),$$

در نقشه‌ی موضعی (U_2, ϕ_2) به صورت

$$\dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right),$$

و در نقشه‌ی موضعی (U_3, ϕ_3) به صورت

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v),$$

می‌باشند [۲].

مدار استوای $\mathbb{S}^1$ در هر نقشه‌ی موضعی متناظر با $v = 0$ و تحت جریان میدان برداری $p(\mathbf{x})$ پایا است. نقاط تعادل نامتناهی از $\mathbf{x}$ نقاط تعادلی از $p(\mathbf{x})$ می‌باشند که روی $\mathbb{S}^1$ قرار دارند. همچنین اگر $y \in \mathbb{S}^1$ یک نقطه تعادل نامتناهی باشد، قرینه آن نیز یک نقطه تعادل نامتناهی است و این دو نقطه تعادل در صورت زوج (فرد) بودن درجه میدان برداری، پایداری مخالف (مشابه) دارند. تصویر نیم کره‌ی بالایی $\mathbb{S}^2$ بر روی صفحه‌ی $y_3 = 0$ تحت نگاشت $\pi(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2)$ را دیسک پوانکاره $\mathbb{D}$ می‌نامند. با توجه به تقارن منحنی‌های جواب $\mathbb{S}^2$ نسبت به مبدأ مختصات، تنها کافی است جریان میدان برداری $p(\mathbf{x})$ را روی نیم کره بسته بالایی $\mathbb{S}^1 \cup H_+$ مطالعه کنیم.

به تصویر نمای فاز $p(\mathbf{x})$ در نیم کره بالایی تحت نگاشت π برای رسم نمای فاز در دیسک پوانکاره، نیاز داریم. توجه داشته باشید که نقاط تعادل $(u, 0)$ نقاط تعادل نامتناهی در نقشه‌های موضعی U_i و V_i به ازای $i = 1, 2, 3$ می‌باشند. همچنین برای مطالعه نقاط تعادل نامتناهی کافی است آن‌ها را در نقشه موضعی U_1 بررسی کنیم و سپس تحقیق کنیم که آیا مبدأ مختصات یک نقطه تعادل از نقشه موضعی U_2 است یا خیر؟

۳ نقاط تعادل متناهی

در اینجا به بررسی نقاط تعادل در حالت $a = 0$ می پردازیم. سیستم (۱.۱) به ازای $a = 0$ دارای حداکثر سه نقطه تعادل متناهی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_1 &: (0, 0), \\ E_2 &: \left(-\sqrt{\frac{3(b-1)}{b}}, \frac{1}{b}\sqrt{\frac{3(b-1)}{b}} \right), \\ E_3 &: \left(\sqrt{\frac{3(b-1)}{b}}, -\frac{1}{b}\sqrt{\frac{3(b-1)}{b}} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

تذکر ۱.۳. در مدل های نورونی مانند فیتزو-ناگایاما، نقاط تعادل نشان دهنده حالت های پایدار پتانسیل غشای نورون هستند. اگر نقطه تعادل پایدار باشد، نورون پس از تحریک اولیه، به آرامی به وضعیت استراحت باز می گردد و فعالیت اسپایکینگ خودبه خودی ندارد. و در صورت ناپایداری، به سرعت از وضعیت استراحت خارج می شود و می تواند به فعالیت های نوسانی یا اسپایکینگ منجر شود. در زمینه شبکه های عصبی، اسپایکینگ به پدیده ای اشاره دارد که در آن نورون ها سیگنال های الکتریکی (اسپایک ها) را ارسال می کنند.

اثر و دترمینان ماتریس ژاکوبی در هر یک از نقاط تعادل فوق به صورت زیر است

$$\begin{aligned} Tr(E_1) &= c - \frac{b}{c}, & Det(E_1) &= 1 - b, \\ Tr(E_{2,3}) &= -\frac{2c^2b - 3c^2 + b^2}{cb}, & Det(E_{2,3}) &= 2(b - 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

همچنین به منظور تعیین نماز فاز موضعی در اطراف هر یک از نقاط تعادل، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی را در هر یک از نقاط تعادل به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}^1 &= \frac{c^2 - b \pm \sqrt{(c^2 + b)^2 - 4c^2}}{2c}, \\ \lambda_{\pm}^{2,3} &= \frac{3c^2 - b^2 - 2c^2b \pm \sqrt{4c^4b^2 - 12c^4b - 4c^2b^3 + 9c^4 + 2c^2b^2 + b^4}}{2cb}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

با بررسی علامت عبارت های $(c^2 + b)^2 - 4c^2$ و $4c^4b^2 - 12c^4b - 4c^2b^3 + 9c^4 + 2c^2b^2 + b^4$ و همچنین تعیین علامت دترمینان و اثر ماتریس ژاکوبی J در هر یک از نقاط تعادل، نتایج زیر را خواهیم داشت.

لم ۲.۳. نقطه تعادل مبدأ به ازای تمام مقادیر پارامترهای b و c وجود دارد. از سوی دیگر با عبور از منحنی انشعاب

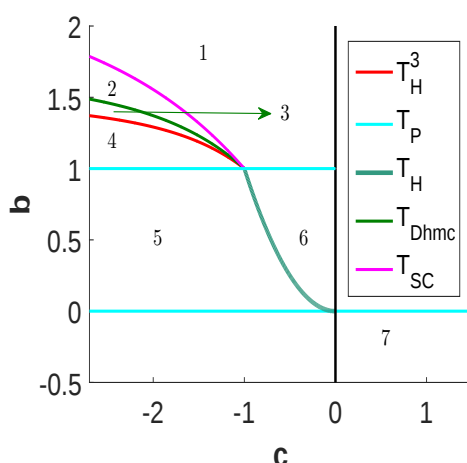
$$T_P = \{(b, c) | b(b - 1) = 0\} \quad (4.3)$$

نقاط تعادل $E_{2,3}$ متولد می شوند و انشعاب چنگال بین سه نقطه تعادل E_i رخ خواهد داد.

اثبات. با توجه به نقاط تعادل سیستم در معادله (۱.۳) عدم وجود نقاط تعادل E_2 و E_3 برای مقادیر $b(b - 1) < 0$ ثابت می شود و لم اثبات خواهد شد.

□

تذکر ۳.۳. در سیستم های زیستی، انشعاب چنگال مکانیزمی برای تغییر الگوی فعالیت نورونی محسوب می شود. این انشعاب می تواند بیانگر گذار از رفتار آستانه ای به رفتار چندحالتی در نورون ها باشد. از سوی دیگر از آنجایی که این انشعاب، امکان ایجاد حالت های پایدار چندگانه را فراهم می کند، در برخی مدل های شبکه های عصبی، نقش مهمی در توسعه حافظه و یادگیری دارد.



شکل ۱: منحنی‌های انشعاب

لم ۴.۳. نقطه تعادل مبدأ به ازای مقادیر $b > 1$ همواره از نوع زین و به ازای مقادیر $b < 1$ از نوع گره یا کانون است. همچنین، با عبور پارامترها از منحنی

$$T_F^1 = \{(b, c) | b = -c^2 \pm 2c\}, \quad (5.3)$$

نوع نقطه تعادل مبدأ از گره به کانون و برعکس تغییر خواهد کرد.

اثبات. درمینان ماتریس ژاکوبی در نقطه تعادل مبدأ به ازای مقادیر $b < 1$ همواره منفی است و بنابراین به ازای این مقادیر، نقطه تعادل مبدأ یک زین است. از سوی دیگر با توجه به مقادیر ویژه λ_1^+ ادعای مطرح شده در قسمت دوم لم، به راحتی اثبات می‌شود.

☐

لم ۵.۳. نقاط تعادل $E_{2,3}$ به ازای مقادیر منفی b همواره از نوع زین و به ازای مقادیر $b > 1$ از جنس گره یا کانون هستند. به علاوه با گذر بارامترها از منحنی

$$T_F^{2,3} = \{ (b, c) \mid (b^2 + 2cb - 2c^2b + 3c^2) (b^2 - 2cb - 2c^2b + 3c^2) = 0 \}, \quad (6.3)$$

جنس این نقاط از گره به کانون و برعکس تبدیل می‌شود.

اثبات. با توجه به اینکه $Det(E_{2,3}) = 2(b-1)$ و این واقعیت که نقاط تعادل $E^{2,3}$ به ازای مقادیر $0 < b < 1$ وجود ندارند، قسمت اول لم اثبات می‌شود. از سوی دیگر با توجه به مقادیر ویژه $\lambda_{\pm}^{2,3}$ ادعای مطرح شده در قسمت دوم لم، نتیجه می‌شود.

☐

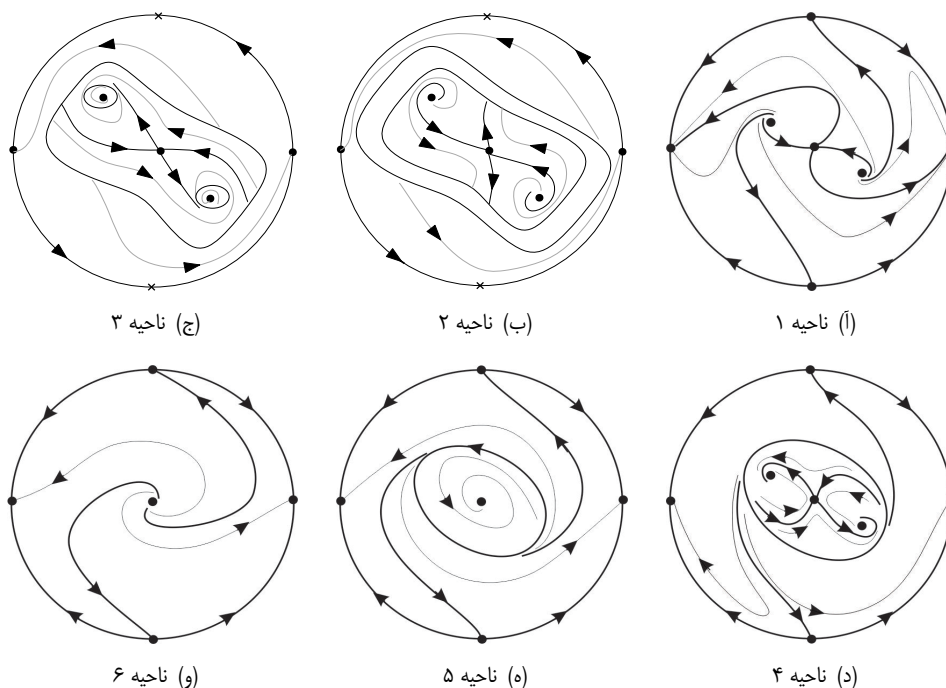
لم ۶.۳ فرض کنید $a = 0$. در این صورت مبدأ یک نقطه تعادل برای سیستم (۱.۱) است و با عبور پارامترها از منحنی انشعاب

$$T_H = \{(b, c) | b = c^2, -1 < c < 1\}, \quad (4.3)$$

در اطراف مبدأ و با عبور از منحنی، انشعاب

$$T_H^{2,3} = \left\{ (b, c) | b = c \left(-c \pm \sqrt{c^2 + 3} \right) \right\}, \quad (\text{A.3})$$

در اطراف نقاط تعادل $E_{2,3}$ انشعاب هایف رخ خواهد داد.



شکل ۲: نمای فاز سراسری به ازای مقادیر (۱.۴)

اثبات. با توجه به مقادیر ویژه‌ی متناظر با ماتریس ژاکوبی در مبدأ، معادله (۳.۳)، بر روی منحنی $b = c^2$ ماتریس ژاکوبی یک جفت مقدار ویژه موهومی محض به صورت $i\sqrt{1-c^2}$ دارد. اکنون ν را به عنوان پارامتر انشعاب در نظر بگیرید به طوریکه $b = c^2 + \nu$. در این صورت شرط تقاطع $\frac{d\text{Re}\lambda(\nu)}{d\nu} = -\frac{1}{2c} \neq 0$ نیز برقرار خواهد بود. از سوی دیگر با محاسبه ضریب اول لیاپانوف داریم $l = \frac{c}{32(c^2-1)}$ و وقوع انشعاب هاپف در نقطه تعادل مبدأ ثابت می شود. وقوع انشعاب هاپف منشعب شده از نقاط تعادل $E^{2,3}$ به طور مشابه اثبات می شود. $\square$

تذکر ۷.۳. وقوع انشعاب هاپف در سیستم های عصبی و زیستی معرف تغییر رفتار سیستم از حالت ایستا به رفتار نوسانی است. این تغییر در نورون ها معمولاً به معنی شروع نوسانات پتانسیل غشایی و در نتیجه فعالیت دوره ای، اسپایکینگ و برستینگ در نورون ها است که در تنظیم و پردازش اطلاعات مغزی نقش مهمی دارند. در نورون ها، انشعاب هاپف فوق (زیر) بحرانی می تواند شروع فعالیت تناوبی ملایم (فعالیت ناگهانی و جهشی نورونی) را توضیح دهد. در زمینه شبکه های عصبی، برستینگ به زمانی گفته می شود که یک نورون یا گروهی از نورون ها اسپایک های متوالی و سریعی تولید می کنند، به طوری که این پالس ها به صورت انفجار رخ می دهند.

لم ۸.۳. [۴، معادله ۶ و ۷] در سیستم مورد نظر، دو پدیده دینامیکی زیر وجود دارد.

۱. چرخه هموکلینیک دوگانه T_{Dhmc} ، که به طور تقریبی در امتداد منحنی زیر شکل می گیرد:

$$b = -\frac{5}{7}c - \frac{c}{7}\sqrt{25c^2 + 119}$$

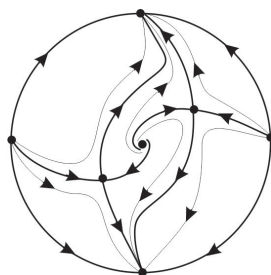
۲. انشعاب گره زینی چرخه های حدی T_{SC} ، که به طور تقریبی با عبور از منحنی زیر اتفاق می افتد:

$$b = -\frac{5}{14}c - \frac{c}{14}\sqrt{25c^2 + 336}$$

۴ نمای فاز سراسری در حالت $bc < 0$

قضیه ۱.۴. نمای فاز سراسری سیستم (۱.۱) به ازای مقادیر

$$\{(a, b, c) | a = 0, b > 0, c < 0\}, \quad (۱.۴)$$



(ا) ناحیه ۷

شکل ۳: نمای فاز سراسری به ازای مقادیر (۲.۴)

به‌طور توپولوژیکی معادل با شکل (۲) و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای

$$\{(a, b, c) \mid a = 0, b < 0, c > 0\}, \quad (۲.۴)$$

به‌طور توپولوژیکی معادل با یکی از نماهای فاز در شکل (۳) است.

اثبات. سیستم (۱.۱) در چارت موضعی اول به‌صورت

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -cu^2v^2 - \frac{b}{c}uv^2 - cuv^2 + \frac{a}{c}v^3 - \frac{1}{c}v^2 + \frac{c}{3}u, \\ \dot{v} &= -cuv^3 - cv^3 + \frac{c}{3}v, \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

است. مبدأ تنها نقطه تعادل سیستم فوق روی $v = 0$ است و مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی برابر $\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$ است. بنابراین به ازای $c > 0$ یک گره ناپایدار و به ازای $c < 0$ یک گره پایدار است. سیستم (۱.۱) در چارت موضعی دوم به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{c}u^2v^2 - \frac{a}{c}uv^3 - \frac{c}{3}u^3 + \frac{b}{c}uv^2 + cuv^2 + cv^2, \\ \dot{v} &= \frac{1}{c}uv^3 - \frac{a}{c}v^4 + \frac{b}{c}v^3. \end{aligned} \quad (۴.۴)$$

نقطه $(0, 0)$ یک نقطه تعادل تباهیده با قسمت خطی صفر است. با اعمال بزرگ‌نمایی $(u, v) \rightarrow (u_1, w)$ که در آن $w = \frac{v_1}{u_1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{a}{c}u_1^4v_1^3 + \frac{1}{c}u_1^4v_1^2 + cu_1^3v_1^2 + \frac{b}{c}u_1^3v_1^2 + cu_1^2v_1^2 - \frac{c}{3}u_1^3, \\ \dot{v}_1 &= -cu_1^2v_1^3 - cu_1v_1^3 + \frac{c}{3}u_1^2v_1. \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

با حذف عامل مشترک u_1 داریم:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{a}{c}u_1^3v_1^3 + \frac{1}{c}u_1^3v_1^2 + cu_1^2v_1^2 + \frac{b}{c}u_1^2v_1^2 + cu_1v_1^2 - \frac{c}{3}u_1^2, \\ \dot{v}_1 &= -cu_1v_1^3 - cv_1^3 + \frac{c}{3}u_1v_1. \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

مجدداً مبدأ یک نقطه تعادل تباهیده با قسمت خطی صفر برای سیستم فوق است. بنابراین برای تعیین نوع نقطه تعادل، مجدد نیاز به انجام بزرگ‌نمایی داریم. از آنجایی که $u_1 = 0$ یک مسیر مشخصه است، به منظور از دست ندادن برخی دینامیک‌های موجود، ابتدا جهت را

با انجام تغییر متغیر $(u_1, v_1) = (u_2 - v_2, v_2)$ از $u_1 = 0$ به $u_1 = v_1$ برمی گردانیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = & \frac{1}{3c} \left(3c^2 u_2 v_2 - c^2 u_2^2 - 2c^2 v_2^2 + 3c^2 u_2 v_2^2 + 3bu_2^2 v_2^2 + 3c^2 u_2^2 v_2^2 + 3u_2^3 v_2^2 \right. \\ & - 6c^2 v_2^3 - 6bu_2 v_2^3 - 9c^2 u_2 v_2^3 - 9u_2^2 v_2^3 - 3au_2^3 v_2^3 + 3bv_2^4 + 6c^2 v_2^4 \\ & \left. + 9u_2 v_2^4 + 9au_2^2 v_2^4 - 3v_2^5 - 9au_2 v_2^5 + 3av_2^6 \right), \\ \dot{v}_2 = & \frac{c}{3} v_2 (u_2 - v_2 - 3v_2^2 - 3u_2 v_2^2 + 3v_2^3). \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

اکنون با بزرگ‌نمایی $(u_2, v_2) \rightarrow (u_3, w)$ که در آن $w = \frac{v_3}{u_3}$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 = & \frac{1}{3c} u_3^2 \left(3c^2 v_3 - c^2 - 2c^2 v_3^2 + 3c^2 u_3 v_3^2 + 3bu_3^2 v_3^2 + 3c^2 u_3^2 v_3^2 + 3u_3^3 v_3^2 - 6c^2 u_3 v_3^3 \right. \\ & - 6bu_3^2 v_3^3 - 9c^2 u_3^2 v_3^3 - 9u_3^3 v_3^3 - 3au_3^4 v_3^3 + 3bu_3^2 v_3^4 + 6c^2 u_3^2 v_3^4 + 9u_3^3 v_3^4 \\ & \left. + 9au_3^4 v_3^4 - 3u_3^3 v_3^5 - 9au_3^4 v_3^5 + 3au_3^4 v_3^6 \right), \\ \dot{v}_3 = & \frac{1}{3c} u_3 v_3 (1 - v_3) \left(2c^2 - 2c^2 v_3 - 6c^2 u_3 v_3^2 - 3bu_3^2 v_3^2 - 6c^2 u_3^2 v_3^2 - 3u_3^3 v_3^2 + 3bu_3^2 v_3^3 \right. \\ & \left. + 6c^2 u_3^2 v_3^3 + 6u_3^3 v_3^3 + 3au_3^4 v_3^3 - 3u_3^3 v_3^4 - 6au_3^4 v_3^4 + 3au_3^4 v_3^5 \right). \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

با حذف عامل مشترک u_3 سیستم زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 = & \frac{1}{3c} u_3 \left(3c^2 v_3 - c^2 - 2c^2 v_3^2 + 3c^2 u_3 v_3^2 + 3bu_3^2 v_3^2 + 3c^2 u_3^2 v_3^2 + 3u_3^3 v_3^2 - 6c^2 u_3 v_3^3 \right. \\ & - 6bu_3^2 v_3^3 - 9c^2 u_3^2 v_3^3 - 9u_3^3 v_3^3 - 3au_3^4 v_3^3 + 3bu_3^2 v_3^4 + 6c^2 u_3^2 v_3^4 + 9u_3^3 v_3^4 \\ & \left. + 9au_3^4 v_3^4 - 3u_3^3 v_3^5 - 9au_3^4 v_3^5 + 3au_3^4 v_3^6 \right), \\ \dot{v}_3 = & \frac{1}{3c} v_3 (1 - v_3) \left(2c^2 - 2c^2 v_3 - 6c^2 u_3 v_3^2 - 3bu_3^2 v_3^2 - 6c^2 u_3^2 v_3^2 - 3u_3^3 v_3^2 + 3bu_3^2 v_3^3 \right. \\ & \left. + 6c^2 u_3^2 v_3^3 + 6u_3^3 v_3^3 + 3au_3^4 v_3^3 - 3u_3^3 v_3^4 - 6au_3^4 v_3^4 + 3au_3^4 v_3^5 \right). \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

نقاط تعادل سیستم (۹.۴) که بر روی خط $u_3 = 0$ قرار دارند عبارت‌اند از:

$$E_1 : (u_3, v_3) = (0, 0), \quad E_2 : (u_3, v_3) = (0, 1).$$

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی در نقطه E_1 برابر $\begin{pmatrix} -\frac{c}{3} \\ \frac{2c}{3} \end{pmatrix}$ و بنابراین یک نقطه تعادل زین است. از طرف دیگر، E_2 یک نقطه تعادل تباهیده با قسمت خطی صفر است. بنابراین برای تعیین نوع آن، نیاز به انجام بزرگ‌نمایی دیگری داریم. پیش از انجام این کار، ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $(u_3, v_3) = (u_4, 1 + v_4)$ آن را به مبدأ مختصات، انتقال می‌دهیم. سیستم انتقال یافته به صورت

$$\begin{aligned} \dot{u}_4 = & \frac{1}{3c} u_4 \left(-3c^2 u_4 - c^2 v_4 - 12c^2 u_4 v_4 + 3c^2 u_4^2 v_4 - 2c^2 v_4^2 - 15c^2 u_4 v_4^2 + 3bu_4^2 v_4^2 \right. \\ & + 12c^2 u_4^2 v_4^2 - 6c^2 u_4 v_4^3 + 6bu_4^2 v_4^3 + 15c^2 u_4^2 v_4^3 - 3u_4^3 v_4^3 + 3au_4^4 v_4^3 \\ & \left. + 3bu_4^2 v_4^4 + 6c^2 u_4^2 v_4^4 - 6u_4^3 v_4^4 + 9au_4^4 v_4^4 - 3u_4^3 v_4^5 + 9au_4^4 v_4^5 + 3au_4^4 v_4^6 \right), \\ \dot{v}_4 = & -\frac{1}{3c} v_4 (1 + v_4) \left(-6c^2 u_4 - 2c^2 v_4 - 12c^2 u_4 v_4 + 3bu_4^2 v_4 + 6c^2 u_4^2 v_4 - 6c^2 u_4 v_4^2 \right. \\ & + 6bu_4^2 v_4^2 + 12c^2 u_4^2 v_4^2 - 3u_4^3 v_4^2 + 3au_4^4 v_4^2 + 3bu_4^2 v_4^3 + 6c^2 u_4^2 v_4^3 \\ & \left. - 6u_4^3 v_4^3 + 9au_4^4 v_4^3 - 3u_4^3 v_4^4 + 9au_4^4 v_4^4 + 3au_4^4 v_4^5 \right). \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

است.

مشابه عملیات‌هایی که بر روی سیستم (۶.۴) انجام داده‌ایم، به ترتیب با اعمال چرخش $(u_4, v_4) = (u_5 - v_5, v_5)$ بر روی سیستم (۱۰.۴) و سپس بزرگ‌نمایی $(u_5, v_5) = (u_6, u_6 v_6)$ و حذف عامل مشترک u_6 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{u}_6 &= -\frac{1}{3c} u_6 (3c^2 - 11c^2 v_6 + \mathcal{O}(|u_6, v_6|^2)), \\ \dot{v}_6 &= \frac{1}{3c} v_6 (v_6 - 1) (-9c^2 + 6c^2 v_6 + \mathcal{O}(|u_6, v_6|^2)). \end{aligned} \quad (11.4)$$

نقاط $E_6 = (0, \frac{3}{2})$ و $E_5 = (0, 1)$ ، $E_4 = (0, 0)$ نقاط تعادل سیستم (۱۱.۴) بر روی خط $u_6 = 0$ هستند. مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی در نقطه E_4 و E_5 به ترتیب برابر $\begin{pmatrix} -c \\ 3c \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \frac{2c}{3} \\ -c \end{pmatrix}$ است. بنابراین از نوع نقطه تعادل زین هستند. از طرف دیگر، مقادیر ویژه متناظر با نقطه تعادل E_6 برابر $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3c}{2} \end{pmatrix}$ است و یک نقطه تعادل نیمه‌هذلولوی است. با استفاده از قضیه (۱۹.۲) از [۲] نتیجه می‌گیریم که نقطه تعادل E_6 به ازای مقادیر (۱.۴) از نوع زین و به ازای مقادیر (۲.۴) گره ناپایدار است. با توجه به اطلاعات اشاره شده در مورد نقاط تعادل متناهی و پایداری آن‌ها و نماهای فاز موضعی در مبدا چارتهای اول و دوم به پنج رفتار توپولوژیکی متفاوت برای نواحی مشخص شده در (۳) (ب) خواهیم رسید. $\square$

۵ شبیه‌سازی عددی

در این بخش به منظور راستی آزمایی و اثبات نتایج تئوری به دست آمده در مقاله، به انجام شبیه‌سازی‌های عددی به کمک نرم‌افزار متلب می‌پردازیم.

۱. در شکل ۴(الف)، مدارهای سیستم به ازای شرط اولیه $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ در خلاف جهت زمان به نقطه تعادل $E_1 : (x, y) \simeq (1, -0.6)$ همگرا می‌شوند که نشان‌دهنده‌ی ناپایداری این نقطه تعادل است.

۲. مدارهای سیستم به ازای شرط اولیه $(x_0, y_0) = (-0.05, 0.05)$ در خلاف جهت زمان به نقطه تعادل $E_2 : (x, y) \simeq (-1, 0, 6)$ همگرا می‌شوند که نشان‌دهنده‌ی ناپایداری این نقطه تعادل است، شکل ۴(ب).

۳. در شکل ۴(ج)، مدارهای سیستم به ازای $(c, b) = (-2, 1.1)$ از ناحیه ۴ به نقطه تعادل پایدار $E_1 : (x, y) \simeq (0.52, -0.47)$ همگرا می‌شوند.

۴. مدارهای سیستم به ازای $(c, b) = (-2, 1.1)$ از ناحیه ۴ و با شرط اولیه $(x_0, y_0) = (1, 0.02)$ به نقطه تعادل پایدار $E_2 : (x, y) \simeq (-0.52, -0.47)$ همگرا می‌شوند، شکل ۴(د).

۵. وجود سیکل حدی منشعب شده از مبدأ به ازای مقادیر $(c, b) = (-2, 1.1)$ از ناحیه ۴، شکل ۴(ه).

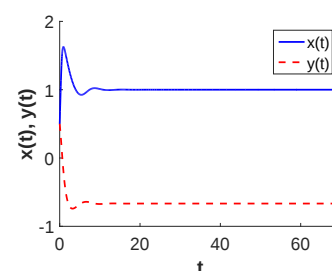
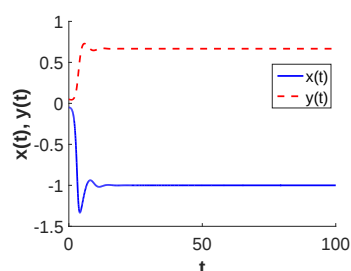
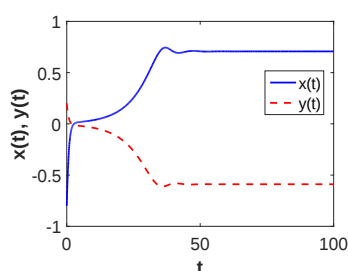
۶. شکل ۴(و) نشان‌دهنده‌ی همگرایی مدارهای سیستم به نقطه تعادل مبدأ به ازای مقادیر $(c, b) = (-2, 0.5)$ از ناحیه ۵.

۷. وجود سیکل حدی در اطراف نقطه تعادل مبدأ به ازای مقادیر $(c, b) = (-2, 0.5)$ از ناحیه ۵، شکل ۴(ز).

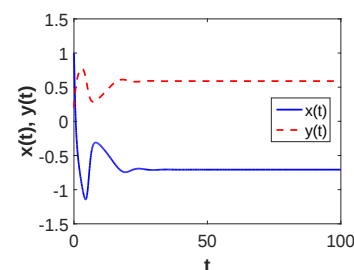
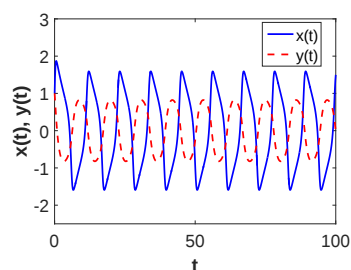
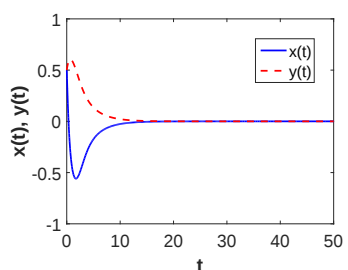
۸. شکل ۴(ح) واگرایی نقطه تعادل مبدأ به ازای مقادیر $(c, b) = (-0.5, 0.5)$ از ناحیه ۶ را نشان می‌دهد.

۹. منشعب شدن دو سیکل حدی در اطراف نقاط تعادل E_2 و E_3 ، شکل ۴(ط).

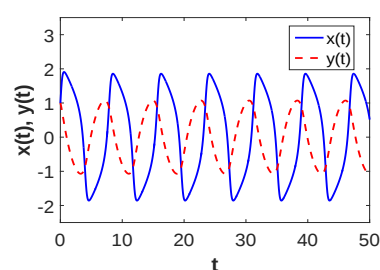
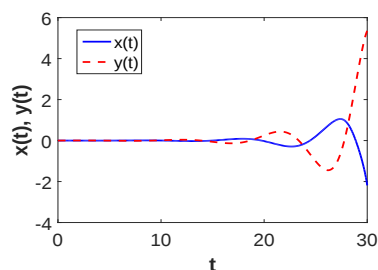
۱۰. وقوع انشعاب هموکلینیک دوگانه، شکل ۴(ی).



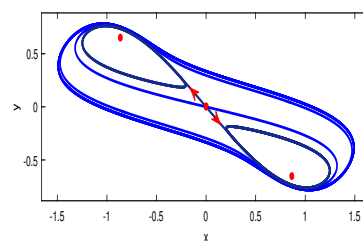
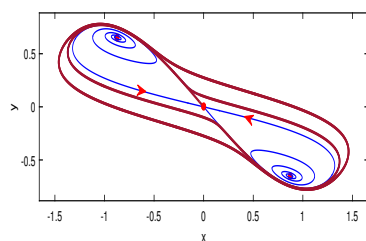
(الف) ناحیه ۱: $(c, b) = (-2, 1.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(0.5, 0.5)$
 (ب) ناحیه ۱: $(c, b) = (-2, 1.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(-0.05, 0.05)$
 (ج) ناحیه ۲: $(c, b) = (-2, 1.1)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(-0.8, 0.2)$



(د) ناحیه ۴: $(c, b) = (-2, 1.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(1, 0.2)$
 (ه) ناحیه ۴: $(c, b) = (-2, 1.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(1, 1)$
 (و) ناحیه ۵: $(c, b) = (-2, 0.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(0.5, 0.5)$



(ز) ناحیه ۵: $(c, b) = (-2, 0.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(1, 1)$
 (ح) ناحیه ۶: $(c, b) = (-0.5, 0.5)$. مدارهای سیستم (۱.۱) به ازای شرط اولیه $(0.0005, 0.0005)$



(ط) ناحیه ۲: $(c, b) = (-2, 1.33)$
 (ی) ناحیه ۳: $(c, b) = (-2, -1.34)$

شکل ۴: مدارها و نمای فاز سیستم (۱.۱) متناظر با ناحیه های ۱-۷ در شکل ۲

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل دقیقی از مدل دو بعدی فیتزو-ناگایاما ارائه شده است که به‌عنوان یک سیستم برای توصیف پالس‌های عصبی در سیستم‌های زیستی شناخته می‌شود. نقاط تعادل این سیستم در حالت $a = 0$ به‌طور کامل بررسی شده‌اند و وقوع انشعابات مانند چنگال و هاپف مورد تحلیل قرار گرفته شده است. این بررسی‌ها نشان دادند که سیستم مورد مطالعه می‌تواند تحت شرایط خاصی، رفتارهای پیچیده‌ای مانند سیکل‌های حدی را تجربه کند که نقشی مهمی در پدیده‌های زیستی و مدل‌سازی فعالیت‌های نورونی ایفا می‌کند. یکی از مهم‌ترین دستاوردهای این پژوهش، دسته‌بندی نواحی مختلف فضای پارامترها بر اساس ساختار انشعابات است. با رسم منحنی‌های انشعاب، فضای پارامترها به ناحیه‌های همبند متناهی تقسیم شده است که هر یک ویژگی‌های دینامیکی مشخصی دارند. همچنین، با استفاده از ابزارهای فشرده‌سازی پوانکاره و بزرگ‌نمایی، ساختار کلی نمای فاز سراسری سیستم برای مقادیر مختلف پارامترها بر روی دیسک پوانکاره بررسی شدند. نتایج نشان دادند که بسته به مقدار و علامت پارامترهای c ، b نمای فاز سیستم می‌تواند به یکی از حالات توپولوژیکی معادل با شکل‌های ۲ و ۳ تبدیل شود. این تحلیل‌ها به درک بهتر چگونگی تغییر رفتار دینامیکی این سیستم تحت تأثیر تغییرات پارامترهای زیستی کمک می‌کند. در پایان، این نتایج می‌توانند در مدل‌سازی رفتارهای غیرخطی در سیستم‌های زیستی و طراحی شبکه‌های عصبی مصنوعی و بیولوژیکی مفید باشند.

فهرست منابع

- [1] Daniel Cebrián-Lacasa, Pedro Parra-Rivas, Daniel Ruiz-Reyn and Lendert Gelens, Six decades of the FitzHugh-Nagumo model: A guide through its spatio-temporal dynamics and influence across disciplines, arXiv, (2024).
- [2] F. Dumortier, J. Llibre and J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer, New York, 2006.
- [3] W. Gao and J. Wang, Existence of wavefronts and impulses to FitzHugh–Nagumo equations, 2004. *Nonlinear Analysis* **57** pp. 667-676, doi: 10.1016/j.na.2004.03.009.
- [4] Adelina Georgescu, Carmen Ročşoreanu and Nicolaie Giurgiteanu, 2003. Global Bifurcations in FitzHugh-Nagumo Model, *Trends in Mathematics: Bifurcations, Symmetry and Patterns*, pp. 197-202, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116602666>.
- [5] R. Fitzhugh, 1961. Impulses and physiological states in theoretical models and propagation in nerve membrane, *Biophys. J.*, **1**, (445), doi: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6.
- [6] M. F. Lima and J. Llibre, 2011. Global dynamics of the Rössler system with conserved quantities, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44**(36), 365201, doi: 10.1088/1751-8113/44/36/365201.
- [7] J. Llibre and Claudia Valls, 2023. Global centers of the generalized polynomial Liénard differential systems, *Journal of Differential Equations*, **330**, pp. 66-80, doi: 10.1016/j.jde.2022.05.013.
- [8] J. Llibre and Claudia Valls, 2023. Global phase portraits of the generalized van der Pol systems, *Bull. Sci. Math.*, **182**, 103213, doi: 10.1016/j.bulsci.2022.103213.
- [9] Jaume Llibre and Arefeh Nabavi, 2022. Phase portraits of the Selkov model in the Poincaré disc, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, **27**, pp. 7607-7623, doi: 10.3934/dcdsb.2022056.
- [10] J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, 1963. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proceedings of the IRE*, **50**, pp. 2061-2070, doi: 10.1109/JRPROC.1962.288235.

- [11] C. Rocsoreanu, N. Giurgiteanu and A. Georgescu, 2000. Degenerated Hopf bifurcation in the Fitzhugh-Nagumo system. 2. Bautin bifurcation, *Revue D'analyse Numérique et de Théorie de L'approximation*, **29**(1), pp. 97109, doi: 10.33993/jnaat291-659.
- [12] Claudia Valls, 2019. On the global dynamics of the Newell-Whitehead system, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **26**(4), pp. 569-578, doi: 10.1080/14029251.2019.1640466.



Global Phase Portraits of a Subfamily of Fitzhugh-Nagumo System

Nasrin Sadri^{(1) 2} and Arefeh Nabavi⁽²⁾

⁽¹⁾ School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran and School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM) †, P. O. Box 19395-5746, Tehran, Iran

⁽²⁾ Department of Mathematical Science, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Communicated by: Fatemeh Helen Ghane

Received: 5 September 2024

Accepted: 20 May 2025

Abstract: Studying the performance and data transmission in the nervous system is one of the main objectives of neuroscience, and the FitzHugh-Nagumo system is one of the mathematical models introduced in this field. So far, several families of FitzHugh-Nagumo systems have been introduced. In this paper, we investigate the global phase portraits of a family of two dimensional FitzHugh-Nagumo system and categorise the phase portraits on the Poincaré disc.

Keywords: Fitzhugh-Nagumo system, Global phase portrait, Poincaré Compactification.

²Corresponding author

E-mail addresses: (Nasrin Sadri) n.sadri@ut.ac.ir, (Arefeh Nabavi) a.nabavi@math.iut.ac.ir

† This research was in part supported by a grant from IPM (No. 1403370046) and This work based upon research funded by Iran National Science Foundation (INSF) under project No 4041099