مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال 1404، دوره ۱۵، شماره ۱، ص ۹۲–۹۹
شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.48558.2334

ساختار موضعاً دوگان مسطح و مسطح تصویری تبدیلات مربعی مترهای ریشه m–ام

میلاد زینالی لکی [(۱)] [۱] و داریوش لطیفی [(۲)]

[(۱)] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران
[(۲)] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دبیر مسئول: مهدی نجفی خواه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۰۷

چکیده: در این مقاله، متریک مربعی $F=(\alpha+\beta)^{۲}/\alpha$ را در نظر گرفته و به مطالعه‌ی تبدیل متریک‌های مربعی از متریک‌های فینسلری ریشه‌ی m–ام می‌پردازیم. همچنین شرط لازم و کافی را برای اینکه این نوع از متریک‌های فینسلری بتوانند مسطح تصویری موضعی و مسطح دوگان موضعی باشند مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: (α,β)–متریک، متریک فینسلری ریشه‌ی m–ام، متریک مربعی، متریک مسطح تصویری موضعی، متریک مسطح دوگان موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 53C25; 53C30, 53C60

۱ مقدمه

فرض کنید M یک خمینه هموار n–بعدی بوده و $TM:=\cup_{x\in M}T_xM$ کلاف مماسی M باشد. در این‌صورت منظور از یک ساختار فینسلری، تابع نامنفی حقیقی مقدار $F:TM\to[۰,\infty)$ است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱. F روی کلاف مماسی $TM\backslash\{۰\}$ هموار باشد.

۲. به ازای هر $x\in M$، $y\in T_xM$ و $\lambda>۰$، $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$.

۳. ماتریس (g_{ij}) معروف به ماتریس هسیان به ازای هر نقطه از $TM\backslash\{۰\}$ معین مثبت باشد.

$$(g_{ij}):=\left(\left[\frac{F^{۲}}{۲}\right]_{y^iy^j}\right).$$

[۱]نویسنده مسئول مقاله

(M. Zeinali Laki) miladzeinali@gmail.com, (D. Latifi) latifi@uma.ac.ir

به‌عنوان مهم‌ترین متریک‌های فینسلری می‌توان به متریک راندرز [۲]، متریک سری بینهایت [۳]، متریک نمائی [۴] و متریک مربعی [۵] اشاره کرد که همه‌ی این متریک‌ها از نوع (α, β)-متریک‌ها می‌باشند [۳]. در این مقاله، متریک مربعی با تابع $F = \frac{(\alpha+\beta)^۲}{\alpha}$ را در نظر گرفته و تبدیلاتی از آن را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. برای مطالعه بیشتر در زمینه‌ی (α, β)-متریک‌ها می‌توان مراجع [۱، ۲] را نگریست. توجه شود که برای هر متریک فینسلری F ضرایب اسپری متناظر با آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$G^i = \frac{g^{ik}}{۴}\left[۲\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right] y^p y^q.$$

اکنون فرض کنید (x^i, y^i) مختصاتی در یک کارت موضعی روی TM بوده و (M, F) یک فضای فینسلری باشد. همچنین فرض کنید F تابعی اسکالر با تعریف $F = \sqrt[m]{A}$ باشد که در آن داریم:

$$A := a_{i_۱\dots i_m}(x) y^{i_۱} y^{i_۲} \dots y^{i_m}. \tag{۱.۱}$$

خاطر نشان شود که در رابطه‌ی (۱.۱) $a_{i_۱\dots i_m}$ در تمامی اندیس‌هایش متقارن است. در این‌صورت F را ریشه‌ی m-ام متریک فینسلری می‌نامند. چندجمله‌ای $A := a_{i_۱\dots i_m}(x) y^{i_۱} y^{i_۲} \dots y^{i_m}$ با درجه‌ی m را تقلیل‌پذیر [۶] گویند هرگاه $A = BC$، که در آن B و C چندجمله‌ای‌هایی با درجه‌ی اکیداً کمتر از m هستند و $degree(B) + degree(C) = m$. در غیر این‌صورت آن را تقلیل‌ناپذیر [۷] گویند.

طی سال‌های اخیر مطالعات زیادی در رابطه با متریک‌های ریشه‌ی m-ام فینسلری انجام شده که این موضوع اهمیت این نوع متریک‌ها را می‌رساند. از آن جمله می‌توان به کاربردهای آن در فیزیک، ساختارهای فضا-زمان و نظیر آنها اشاره کرد. از این مطالعات می‌توان مراجع [۵، ۷، ۸] را نگریست. در [۵]، نویسندگان نشان دادند که هر متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام تعریف‌شده روی زیرمجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^n$ با بعد $n \geq ۲$ که دارای انحنای میانگین بروالد ایزوتروپیک است در واقع متریک‌های ضعیفاً بروالد هستند. همچنین آنها شرایط مسطح دوگان موضعی [۸] بودن این متریک‌ها و همچنین شرایط متریک آنتونلی [۹] بودن این متریک‌ها را نیز بررسی کرده‌اند. در [۶]، برخی از نتایج روی متریک‌های ریشه‌ی m-ام فینسلری تعمیم‌یافته بررسی شده و شرایط مسطح دوگان موضعی بودن این متریک‌ها به‌دست آورده شده است.

فرض کنید (M, F) یک خمینه‌ی فینسلری بوده و $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$ یک ۱-فرمی روی M باشد. در این‌صورت یک تبدیل فینسلری با تعریف $F(x, y) \to \bar{F}(x, y) = f(F, \beta)$ وجود دارد به‌طوری‌که در آن $f(F, \beta)$ یک تابع همگن مثبت از تابع فینسلری F است. این تبدیل از متریک فینسلری F را یک β-تبدیل از متریک F می‌نامند. توجه شود که هرگاه $\sup_{F(x,y)=۱} |\beta| < ۱$ آنگاه $\bar{F}$ یک متریک فینسلری است. در این مقاله β-تبدیل زیر که معروف به تبدیل مربعی [۱۰] است را مورد بررسی قرار خواهیم داد:

$$\bar{F}(x, y) = \frac{(F + \beta)^۲}{F}, \tag{۲.۱}$$

که در آن $\beta \neq ۰$ یک ۱-فرمی روی M است. توجه شود که هرگاه F یک متریک ریمانی باشد، متریک (۲.۱) به متریک مربعی تبدیل خواهد شد.

متریک فینسلری F روی زیرمجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^n$ را مسطح تصویری موضعی [۱۱] گویند اگر و تنها اگر ضرایب اسپری در شرط $G^i = P y^i$ صدق کنند که در آن $P = P(x, y)$ تابعی اسکالر روی $TM\backslash\{۰\}$ بوده و به ازای هر $\eta > ۰$ در رابطه‌ی $P(x, \eta y) = \eta P(x, y)$ صدق می‌کند. همچنین متریک فینسلری F روی خمینه‌ی M را مسطح دوگان موضعی گویند اگر و تنها اگر در هر نقطه، دستگاه مختصات (x^i) چنان موجود باشد که ضرایب اسپری در شرط زیر صدق کنند:

$$G^i = -\frac{g^{ij} H_{y^j}}{۲},$$

[2] Randers
[3] Infinite Series
[4] Exponential
[5] Square
[6] Reducible
[7] Irreducible
[8] Locally dually flat
[9] Antonelli
[10] Square change
[11] Locally projectively flat

که در آن $H = H(x, y)$ یک تابع اسکالر همگن و C^∞ روی $TM\backslash\{\circ\}$ است. خاطر نشان شود که متریک فینسلری F را مسطح دوگان گویند هرگاه در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^{۲} F^{۲}}{\partial x^k \partial y^l} y^k = ۲\frac{\partial F^{۲}}{\partial x^l}. \tag{۳.۱}$$

در [۴]، نشان داده شد که متریک فینسلری F روی زیرمجموعه‌ی باز U تصویری است هرگاه:

$$F_{x^k y^l} y^k = F_{x^l}, \tag{۴.۱}$$

که در آن فاکتور تصویری برابر $P = \frac{F_{x^k} y^k}{۲F}$ است.

اکنون فرض کنید F یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام تعریف شده روی زیرمجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^n$ است. برای راحتی کار قرار می‌دهیم:

$$A_i := \frac{\partial A}{\partial y^i}, \quad A_{ij} := \frac{\partial^{۲} A}{\partial y^i \partial y^j}.$$

اکنون در نظر بگیرید که ماتریس (A_{ij}) یک تانسور معین مثبت تعریف کند و (A^{ij}) معکوس آن باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$y^i A_i = mA,\ y^i A_{ij} = (m-۱)A_j,\ y_i = \frac{A^{\frac{۲}{m}-۱} A_i}{m},\ A^{ij} A_{jk} = \delta^i_k,$$

$$A^{ij} A_i = \frac{y^j}{m-۱},\ A_i A_j A^{ij} = \frac{mA}{m-۱},\ A_\circ := A_{x^m} y^m,\ A_{\circ l} := A_{x^m y^l} y^m.$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$\beta_{x^l} := \frac{\partial \beta}{\partial x^l} = \frac{\partial b_i}{\partial x^l} y^i,\ \beta_\circ := \frac{\partial \beta}{\partial x^l} y^i = \beta_{x^l} y^i,\ \beta_{\circ l} := \beta_{x^k y^l} y^k,\ \beta_l := \frac{\partial \beta}{\partial y^l}.$$

در این مقاله، تبدیل مربعی از یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام را در نظر گرفته و شرط لازم و کافی را برای اینکه تبدیل مربعی از یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام مسطح تصویری موضعی و مسطح دوگان موضعی باشد بررسی کرده‌ایم. در واقع نتایج زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۱. فرض کنید $F = \sqrt[m]{A}$ یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنید $\bar{F} = \frac{(F+\beta)^{۲}}{F}$ تبدیل مربعی از F باشد که در آن β یک ۱-فرمی مخالف صفر روی M است. در این‌صورت $\bar{F}$ مسطح تصویری موضعی است اگر و تنها اگر b_iها ثابت بوده و یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد:

۱. F متریکی از نوع بروالد-موور [12] باشد یعنی $F = \sqrt[m]{y^{i_۱} \dots y^{i_m}}$.

۲. $A\beta\beta_l = \left(۱ - \frac{۲}{m}\beta^{۲}\right) A_l$.

قضیه ۲.۱. فرض کنید $F = \sqrt[m]{A}$ یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنید $\bar{F} = \frac{(F+\beta)^{۲}}{F}$ تبدیل مربعی از F باشد که در آن β یک ۱-فرمی مخالف صفر روی M است. در این‌صورت $\bar{F}$ مسطح دوگان موضعی است اگر و تنها اگر

$$A_{x^l} = \frac{A\theta_l}{۳} + \frac{۲\theta A_l}{۳m}, \tag{۵.۱}$$

$$AA_\circ \beta_l + AA_l \beta_\circ - \frac{۱}{m} A_\circ A_l \beta - \frac{A^{۲} m \beta_\circ \beta_l}{\beta} = \circ. \tag{۶.۱}$$

[12] Berwald-Moór

۲ اثبات قضیه‌ی ۱.۱

در این بخش به اثبات قضیه‌ی ۱.۱ می‌پردازیم. برای اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱.۲. فرض کنید $F=\sqrt[m]{A}$ یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ است به‌طوری‌که رابطه‌ی

$$\Upsilon A^{\frac{1}{m}-2}+\Xi A^{\frac{-1}{m}}+\Sigma A^{\frac{-1}{m}-2}+\Pi=0,$$

برقرار باشد که در آن Υ, Ξ, Σ و Π چندجمله‌هایی در y هستند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\Upsilon=\Xi=\Sigma=\Pi=0.$$

اثبات قضیه‌ی ۱.۱: فرض کنید F یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام بوده و $\bar{F}=\frac{(F+\beta)^2}{F}$ تبدیل مربعی از متریک F باشد. در این‌صورت روابط زیر را داریم:

$$\bar{F}=(A^{\frac{1}{m}}+\beta)^2A^{\frac{-1}{m}}, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{x^k}&=2\big(1+A^{\frac{-1}{m}}\beta\big)\Big(\frac{1}{m}A^{\frac{1}{m}-1}A_{x^k}+\beta_{x^k}\Big)-\frac{1}{m}A^{\frac{-1}{m}-1}A_{x^k}\big(A^{\frac{1}{m}}+\beta\big)^2\\&=\frac{1}{m}A^{\frac{1}{m}-2}AA_{x^k}+2\beta\beta_{x^k}A^{\frac{-1}{m}}-\frac{\beta^2}{m}A^{\frac{-1}{m}-2}AA_{x^k}+2\beta_{x^k}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{x^ky^l}y^k=&A^{\frac{-1}{m}-2}\Bigg[\frac{-2}{m}AA_l\beta\beta_0+\frac{1}{m}(\frac{1}{m}+1)A_lA_0\beta^2-\frac{1}{m}AA_{0l}\beta^2-\frac{2}{m}A_lA_0-\frac{2}{m}AA_0\beta\beta_l\Bigg]\\&+A^{\frac{-1}{m}}\Big[2\beta_l\beta_0+2\beta\beta_{0l}\Big]+A^{\frac{1}{m}-2}\Big[\frac{1}{m}AA_{0l}+\frac{1}{m}(\frac{3}{m}-1)A_lA_0\Big]+2\beta_{0l}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

چون $\bar{F}$ مسطح تصویری است، از این‌رو بنابر (۴.۱) داریم:

$$\bar{F}_{x^ky^l}y^k=\bar{F}_{x^l}. \tag{4.2}$$

در نتیجه بنابر (۲.۲)، (۳.۲) و (۴.۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&A^{\frac{-1}{m}-2}\Bigg[\frac{-2}{m}AA_l\beta\beta_0+\frac{1}{m}(\frac{1}{m}+1)A_lA_0\beta^2-\frac{1}{m}AA_{0l}\beta^2-\frac{2}{m}A_lA_0-\frac{2}{m}AA_0\beta\beta_l+\frac{1}{m}AA_{x^l}\beta^2\Bigg]\\&+A^{\frac{-1}{m}}\Big[2\beta_l\beta_0+2\beta\beta_{0l}-2\beta\beta_{x^l}\Big]+A^{\frac{1}{m}-2}\Big[\frac{1}{m}AA_{0l}+\frac{1}{m}(\frac{3}{m}-1)A_lA_0-\frac{1}{m}AA_{x^l}\Big]\\&+2\beta_{0l}-2\beta_{x^l}=0.\end{aligned} \tag{5.2}$$

اکنون بنابر لم ۱.۲، رابطه‌ی (۵.۲) به معادلات زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{-2}{m}AA_l\beta\beta_0+\frac{1}{m}(\frac{1}{m}+1)A_lA_0\beta^2-\frac{1}{m}AA_{0l}\beta^2-\frac{2}{m}A_lA_0-\frac{2}{m}AA_0\beta\beta_l+\frac{1}{m}AA_{x^l}\beta^2=0, \tag{6.2}$$

$$2\beta_l\beta_0+2\beta\beta_{0l}-2\beta\beta_{x^l}=0, \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{m}AA_{0l}+\frac{1}{m}(\frac{3}{m}-1)A_lA_0-\frac{1}{m}AA_{x^l}=0, \tag{8.2}$$

$$۲\beta_{\circ l} - ۲\beta_{x^l} = \circ. \tag{۹.۲}$$

با توجه به معادله‌ی (۹.۲) خواهیم داشت:

$$\beta_{\circ l} = \beta_{x^l}. \tag{۱۰.۲}$$

اکنون از روابط (۷.۲) و (۱۰.۲) نتیجه می‌شود که:

$$\beta_{\circ}\beta_l = \circ, \tag{۱۱.۲}$$

و بنابراین

$$\beta_{\circ} = \circ \quad \text{یا} \quad \beta_l = \circ. \tag{۱۲.۲}$$

در حالتی که $\beta_l = \circ$، به نتیجه‌ی $\beta = \circ$ خواهیم رسید که متناقض با فرض است. پس $\beta_{\circ} = \circ$ و از این‌رو

$$\frac{\partial b_i}{\partial x^l} y^l y^i = \circ,$$

که نتیجه می‌دهد b_iها ثابت هستند. اکنون با استفاده از روابط (۶.۲) و (۸.۲) و ثابت بودن b_iها رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$A_{\circ}\left[\left(\frac{۲}{m}\beta^{۲} - ۱\right)A_l + A\beta\beta_l\right] = \circ. \tag{۱۳.۲}$$

در نتیجه بنابر معادله‌ی (۱۳.۲) دو حالت زیر را داریم:

حالت ۱: در این حالت داریم $A_{\circ} = \circ$ که به‌طور معادل خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left[a_{i_۱ i_۲ \ldots i_m (x)}\right] = \circ, \tag{۱۴.۲}$$

و بنابراین $a_{i_۱ i_۲ \ldots i_m}$ ها ثابت بوده و در نتیجه:

$$F = \sqrt[m]{y^{i_۱} \ldots y^{i_m}},$$

که نشان‌دهنده این است که متریک F متریکی از نوع بروالد-موور است.

حالت ۲:

$$\left(\frac{۲}{m}\beta^{۲} - ۱\right)A_l + A\beta\beta_l = \circ.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$A\beta\beta_l = \left(۱ - \frac{۲}{m}\beta^{۲}\right)A_l.$$

محاسبات برای نشان دادن عکس قضیه سر راست است و کار تمام است.

۳ اثبات قضیه‌ی ۲.۱

در این بخش به اثبات قضیه‌ی ۲.۱ خواهیم پرداخت. برای اثبات قضیه‌ی ۲.۱ به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱.۳. فرض کنید $F = A^{\frac{۱}{m}}$ یک متریک فینسلری ریشه‌ی m-ام روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ است به‌طوری‌که رابطه‌ی

$$\Upsilon A^{\frac{۲}{m}-۲} + \Xi A^{\frac{۱}{m}-۲} + \Sigma A^{\frac{-۱}{m}-۲} + \Pi A^{\frac{-۲}{m}-۲} + \Psi = \circ,$$

برقرار باشد که در آن $\Upsilon, \Xi, \Sigma, \Pi$ و Ψ چندجمله‌هایی در y هستند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\Upsilon = \Xi = \Sigma = \Pi = \Psi = \circ.$$

اثبات قضیه‌ی ۲.۱: فرض کنید F یک متریک فینسلری ریشه‌ی m–ام بوده و $\bar F = \frac{(F+\beta)^{۲}}{F}$ تبدیل مربعی از متریک F باشد. در این‌صورت روابط زیر را داریم:

$$\bar F = \big[A^{\frac{۱}{m}}+\beta\big]^{۲}A^{\frac{-۱}{m}} \Longrightarrow \bar F^{۲} = \big[A^{\frac{۱}{m}}+\beta\big]^{۴}A^{\frac{-۲}{m}}. \tag{۱.۳}$$

$$\begin{aligned}(\bar F^{۲})_{x^k} =& \frac{۲}{m}A^{\frac{۲}{m}-۲}AA_{x^k} + A^{\frac{۱}{m}-۲}\Big[\frac{۴}{m}A_{x^k}A\beta + ۴A^{۲}\beta_{x^k}\Big]\\ &+ A^{\frac{-۱}{m}-۲}\Big[\frac{-۴}{m}AA_{x^k}\beta^{۳} + ۱۲A^{۲}\beta^{۲}\beta_{x^k}\Big] + A^{\frac{-۲}{m}-۲}\Big[\frac{-۲}{m}AA_{x^k}\beta^{۴} + ۴A^{۲}\beta^{۳}\beta_{x^k}\Big]\\ &+ ۱۲\beta\beta_{x^k}.\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

$$\begin{aligned}(\bar F^{۲})_{x^ky^l}y^k =& A^{\frac{۲}{m}-۲}\Big[\frac{۲}{m}(\frac{۲}{m}-۱)A_\circ A_l + \frac{۲}{m}AA_{\circ l}\Big]\\ &+ A^{\frac{۱}{m}-۲}\Big[\frac{۴}{m}(\frac{۱}{m}-۱)A_\circ A_l\beta + \frac{۴}{m}AA_{\circ l}\beta + \frac{۴}{m}AA_\circ\beta_l + \frac{۴}{m}AA_l\beta_\circ + ۴A^{۲}\beta_{\circ l}\Big]\\ &+ A^{\frac{-۱}{m}-۲}\Big[\frac{۴}{m}(\frac{۱}{m}+۱)A_\circ A_l\beta^{۳} - \frac{۴}{m}AA_{\circ l}\beta^{۳} - \frac{۱۲}{m}AA_\circ\beta^{۲}\beta_l - \frac{۱۲}{m}AA_l\beta^{۲}\beta_\circ\\ &\qquad + ۲۴A^{۲}\beta\beta_l\beta_\circ + ۱۲A^{۲}\beta^{۲}\beta_{\circ l}\Big]\\ &+ A^{\frac{-۲}{m}-۲}\Big[\frac{۲}{m}(\frac{۲}{m}+۱)A_\circ A_l\beta^{۴} - \frac{۲}{m}AA_{\circ l}\beta^{۴} - \frac{۸}{m}AA_\circ\beta^{۳}\beta_l - \frac{۸}{m}AA_l\beta^{۳}\beta_\circ\\ &\qquad + ۱۲A^{۲}\beta^{۲}\beta_\circ\beta_l + ۴A^{۲}\beta^{۳}\beta_{\circ l}\Big]\\ &+ ۱۲\beta_\circ\beta_l + ۱۲\beta\beta_{\circ l}.\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

بنابر فرض $\bar F$ یک متریک مسطح دوگان موضعی است. در نتیجه

$$(\bar F^{۲})_{x^ky^l}y^k = ۲(\bar F^{۲})_{x^l}, \tag{۴.۳}$$

و از این‌رو طبق روابط (۲.۳)، (۳.۳) و (۴.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&+\frac{۲}{m}A^{\frac{۲}{m}-۲}\Big[(\frac{۲}{m}-۱)A_\circ A_l + A(A_{\circ l}-۲A_{x^l})\Big]\\ &+\frac{۴}{m}A^{\frac{۱}{m}-۲}\Big[(\frac{۱}{m}-۱)A_\circ A_l\beta + AA_{\circ l}\beta + AA_\circ\beta_l + AA_l\beta_\circ - ۲AA_{x^l}\beta + A^{۲}m(\beta_{\circ l}-۲\beta_{x^l})\Big]\\ &+A^{\frac{-۱}{m}-۲}\Big[\beta^{۲}\frac{۴}{m}\Big((\frac{۱}{m}+۱)A_\circ A_l\beta - AA_{\circ l}\beta - ۳AA_\circ\beta_l - ۳AA_l\beta_\circ + ۲AA_{x^l}\beta\Big)\\ &\qquad + ۱۲A^{۲}\beta(۲\beta_l\beta_\circ + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l})\Big]\\ &+A^{\frac{-۲}{m}-۲}\Big[\frac{۲}{m}\beta^{۳}\Big((\frac{۲}{m}+۱)A_\circ A_l\beta - AA_{\circ l}\beta - ۴AA_\circ\beta_l - ۴AA_l\beta_\circ + ۲AA_{x^l}\beta\Big)\\ &\qquad + ۴A^{۲}\beta^{۲}(۳\beta_\circ\beta_l + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l})\Big]\\ &+۱۲(\beta_\circ\beta_l + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l}) = \circ.\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

اکنون بنابر لم ۱.۳ و رابطه‌ی (۵.۳) داریم:

$$(\frac{۲}{m}-۱)A_\circ A_l + A(A_{\circ l}-۲A_{x^l}) = \circ, \tag{۶.۳}$$

$$(\frac{۱}{m} - ۱)A_\circ A_l\beta + AA_{\circ l}\beta + AA_\circ\beta_l + AA_l\beta_\circ - ۲AA_{x^l}\beta + A^۲m(\beta_{\circ l} - ۲\beta_{x^l}) = \circ, \qquad (۷.۳)$$

$$\frac{۴\beta^۲}{m}\Big((\frac{۱}{m}+۱)A_\circ A_l\beta - AA_{\circ l}\beta - ۳AA_\circ\beta_l - ۳AA_l\beta_\circ + ۲AA_{x^l}\beta\Big) + ۱۲A^۲\beta(۲\beta_l\beta_\circ + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l}) = \circ, \qquad (۸.۳)$$

$$\frac{۲\beta^۳}{m}\Big((\frac{۲}{m}+۱)A_\circ A_l\beta - AA_{\circ l}\beta - ۴AA_\circ\beta_l - ۴AA_l\beta_\circ + ۲AA_{x^l}\beta\Big) + ۴A^۲\beta^۲(۳\beta_\circ\beta_l + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l}) = \circ, \qquad (۹.۳)$$

$$\beta_\circ\beta_l + \beta\beta_{\circ l} - ۲\beta\beta_{x^l} = \circ. \qquad (۱۰.۳)$$

با توجه به اینکه A تقلیل‌ناپذیر بوده و $deg(A_l) = m - ۱$، از رابطه‌ی (۶.۳) نتیجه می‌شود که ۱-فرمی $\theta = \theta_l y^l$ روی U چنان موجود است که

$$A_\circ = \theta A. \qquad (۱۱.۳)$$

با مشتق‌گیری عمودی [۱۳] از رابطه‌ی (۱۱.۳) نسبت به y^l خواهیم داشت:

$$A_{\circ l} = A\theta_l + \theta A_l - A_{x^l}. \qquad (۱۲.۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۱.۳) و (۱۲.۳) در رابطه‌ی (۶.۳) رابطه‌ی (۵.۱) به‌دست می‌آید. از طرفی با جایگذاری روابط (۶.۳) و (۱۰.۳) در روابط (۷.۳)، (۸.۳) و (۹.۳) به رابطه‌ی (۶.۱) می‌رسیم. محاسبات برای نشان دادن عکس قضیه سر راست است و کار تمام است.

فهرست منابع

[1] Latifi, D. and Zeinali Laki, M., 2023. Geodesic vectors of invariant (α, β)−metrics on nilpotent Lie groups of five dimensional, *Caspian Journal of Mathematical Sciences,* 12(2), pp.211-223. doi: 10.22080/cjms.2024.26330.1675

[2] Latifi, D. and Zeinali Laki, M., 2023. On Kropina geodesic orbit spaces, *Mathematical Analysis and Convex Optimization,* 4(2), pp.115-126. doi: 10.22034/maco.4.2.11

[3] Matsumoto, M., 1972. On C-reducible Finsler-spaces, *Tensor. New series,* 24, pp.29–37.

[4] Shen, Z,. 2001. *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers.

[5] Tayebi, A. and Najafi, B., 2011. On m-th root Finsler metrics. *Journal of Geometry and Physics*, 61, pp.1479-1484. doi: 10.1016/j.geomphys.2011.03.012

[6] Tayebi, A., Peyghan, E. and Shahbazi, M., 2012. On generalized m-th root Finsler metrics, *Linear Algebra and its Applications,* 437, pp.675-683. doi: 10.1016/j.laa.2012.02.025

[7] Tayebi, A., Shahbazi Nia, M. and Peyghan, E., 2015. On Randers change of m-th root Finsler metrics, *International Electronic Journal of Geometry,* 8(1), pp.14-20. doi: 10.36890/iejg.592790

[8] Tayebi, A., Tabatabaei Far, T. and Peyghan, E., 2014. On Kropina-change of m-th root Finsler metrics, *Ukrainian Mathematical Journal,* 66(1), pp.1027-3190. doi: 10.48550/arXiv.1409.7351

[13] Vertical derivative

Locally dually flat and projectively flat structure square changes of m-th root metrics

Milad Zeinali Laki(1) [14] and Dariush Latifi(2)

(1) Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Mohaghegh Ardabili, P.O.Box. 5619911367, Ardabil, Iran.
(2) Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Mohaghegh Ardabili, P.O.Box. 5619911367, Ardabil, Iran.

Communicated by: Mehdi Najafikhah

Received: 13 December 2024 Accepted: 28 May 2025

Abstract: In this paper, we consider the square metric of the form $F = (\alpha + \beta)^2/\alpha$ and study the change of square metrics of the m-th root Finsler metrics. We also investigate and study the necessary and sufficient conditions for this type of Finsler metrics to be locally projectively flat and locally dually flat.

Keywords: (α, β)-metric, Locally dually flat metric, Locally projectively flat metric, m-th root Finsler metric, square metric.

[14] Corresponding author
E-mail addresses: (M. Zeinali Laki) miladzeinali@gmail.com, (D. Latifi) latifi@uma.ac.ir