مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۱، ص ۱۰۰–۱۱۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.44671.2196

کدهای SR–جمعی با وزن یکسان

علی عیسی‌پور خسادان [۱،۲] [۱] و شهرام مهری [۱] [۲] و سعدون محمودی [۲] [۳]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران
[۲] گروه ریاضی، مرکز علوم پایه، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء، تهران، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۲۰

چکیده: فرض کنید q توانی از یک عدد اول، $S = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^2\rangle$ و $R = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^2\rangle$ باشد. به ازای اعداد صحیح و مثبت α و β، زیرمجموعه ناتهی C از $S^\alpha \times R^\beta$ را یک کد SR–جمعی نامند هرگاه C یک R–زیرمدول باشد. در این مقاله به مطالعه کدهای SR–جمعی با وزن یکسان می‌پردازیم. به‌طور دقیق‌تر، روی این کلاس از کدها یک تابع وزن تعریف می‌کنیم. روابطی که بین طول، اندازه و وزن کدهای با وزن یکسان وجود دارد را به‌دست می‌آوریم. در پایان با تعریف نگاشت گری روی کدهای SR–جمعی ساختار را به میدان $\mathbb{F}_q$ انتقال می‌دهیم و زیرکلاسی از کدهای با وزن یکسان بهینه روی میدان $\mathbb{F}_q$ به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: کدهای جمعی با وزن یکسان، کدهای SR–جمعی، نگاشت گری.

رده‌بندی ریاضی: 94B60; 94B05

۱ مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر مطالعه‌ی کدها روی ضرب دو حلقه مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در مقالات [۳، ۴]، ساختار این کدها روی ضرب دو حلقه‌ی زنجیر بررسی شده است. در [۱]، کدهای دوری اریب روی ضرب دو حلقه‌ی $\mathbb{F}_{p^m}$ و $\mathbb{F}_{p^m} + u\mathbb{F}_{p^m}$ مطالعه شده است. محمودی و سامعی در [۱۰]، این کلاس از کدها را در حالت کلی کدهای SR–جمعی می‌نامند. آن‌ها S را یک R–جبر در نظر می‌گیرند و به ازای اعداد صحیح و مثبت α و β، زیر مجموعه‌ی $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ را یک کد SR–جمعی گویند هرگاه C یک R–زیرمدول باشد.

وزن مینیمم کد یکی از مولفه‌های مهم کد است که نقش اساسی در تصحیح خطا دارد. از این‌رو محاسبه وزن مینیمم کد در یک کلاس از کدها یکی از چالش‌های پژوهشگران است. کدهای با وزن یکسان، کدهایی هستند که وزن تمام کدواژه‌ها یکسان است و چالش محاسبه

[۱] (A. Isapour-Khasadan) ali.esapour@stu.malayeru.ac.ir
[۲] (S. Mehry) ,shmehry@malayeru.ac.ir
[۳] نویسنده مسئول مقاله (S. Mahmoudi) ,mahmoudi.math89@yahoo.com

وزن مینیمم را به حداقل می‌رساند. در [۵]، کارلت ساختار جبری کدهای وزن یکسان خطی را روی حلقه $\mathbb{Z}_4$ مورد مطالعه قرار داد، که در آن از وزن لی استفاده شده است و بعدها این نتیجه روی حلقه‌های $\mathbb{Z}_{p^m}$ توسعه داده شد [۹].

بررسی خواص کدهای با وزن یکسان روی ضرب دو حلقه نیز تعمیم داده شده است. در [۸]، دوگرتی و همکارانش کدهای $\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_4$-جمعی با وزن یکسان را معرفی کردند. همچنین در [۶]، کدهای با وزن یکسان روی حلقه $\mathbb{Z}_4^r \times \mathbb{Z}_4^s \times \mathbb{Z}_8^t$ بررسی شده است.

در این مقاله، کدهای جمعی با وزن یکسان روی حاصل‌ضرب حلقه‌های زنجیر $S = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^3\rangle$ و $R = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^2\rangle$ مطالعه می‌شود. به‌طور دقیق‌تر در بخش دوم، ساختار حلقه‌های زنجیر و نمایش این حلقه‌ها در نظریه کدگذاری را یادآوری می‌کنیم. کدهای SR-جمعی را معرفی می‌کنیم و فرایند تعریف تابع وزن را بررسی خواهیم کرد. در بخش سوم، روی $S^\alpha \times R^\beta$ یک تابع وزن تعریف می‌کنیم و روابط بین طول، اندازه و وزن این کدها را به‌دست می‌آوریم. در پایان با تعریف نگاشت‌های گری روی میدان $\mathbb{F}_q$ زیرکلاسی از کدهای بهینه به‌دست می‌آوریم.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

در این مقاله کدهای با وزن یکسان روی حاصل‌ضرب دو حلقه‌ی زنجیر $S = \frac{\mathbb{F}_q[u]}{\langle u^3\rangle}$ و $R = \frac{\mathbb{F}_q[u]}{\langle u^2\rangle}$ مطالعه می‌شود. این کدها را کدهای SR-جمعی با وزن یکسان می‌نامیم. در این بخش ابتدا ساختار حلقه‌های زنجیر را یادآوری می‌کنیم. پس از آن به معرفی دقیق‌تر کدهای SR-جمعی می‌پردازیم.

فرض کنید T یک حلقه ایده‌آل اصلی موضعی متناهی با ایده‌آل ماکسیمال M از درجی پوچ‌توانی e باشد. در این صورت بنا بر قضیه‌ی ۸.۸ از [۲]، عنصر $m \in T$ موجود است که $M = \langle m\rangle$ و M، M^2، $\cdots$، M^{e-1} تنها ایده‌آل‌های غیربدیهی T می‌باشند. بنابراین ایده‌آل‌های T زنجیر زیر را تشکیل می‌دهند

$$0 = \langle m^e\rangle \subset \langle m^{e-1}\rangle \subset \cdots \subset \langle m^1\rangle \subset \langle m^0\rangle = T.$$

این حلقه را یک حلقه‌ی زنجیر گویند. گزاره‌ی زیر یک فرم نمایش برای عناصر یک حلقه‌ی زنجیر ارایه می‌دهد که در نظریه‌ی کدگذاری از اهمیت بالایی برخوردار است.

گزاره **۱.۲**. [۴، لم ۱.۲] فرض کنید T حلقه‌ی زنجیر متناهی با ایده‌آل ماکسیمال M و $K = \dfrac{T}{M}$ میدان خارج قسمتی آن باشد. اگر m یک مولد از M و e درجه‌ی پوچ‌توانی آن باشد، آنگاه روابط زیر برقرارند:

الف) ایده‌آل‌های محض متمایز T، $\langle m^i\rangle$هایی هستند که $i = 1, 2, \cdots, e-1$.

ب) اگر V مجموعه‌ای از تمام رده‌های هم‌ارزی T به پیمانه‌ی m باشد، آنگاه برای هر $v \in T$ عناصر یکتای $v_0, v_1, \cdots, v_{e-1}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$v = \sum_{i=0}^{e-1} v_i m^i$$

پ)

$$| V | = | K |$$

ت) برای $0 \le j \le e-1$ داریم

$$| \langle m\rangle^j | = | K |^{e-j}.$$

اکنون فرض کنید q توانی از یک عدد اول و $\mathbb{F}_q$ میدان متناهی از مرتبه‌ی q باشد. به‌راحتی می‌توان دید که $S = \frac{\mathbb{F}_q[u]}{\langle u^3\rangle}$ و $R = \dfrac{\mathbb{F}_q[u]}{\langle u^2\rangle}$ حلقه‌های زنجیر با ایده‌آل‌های ماکسیمال به ترتیب $M_S = \frac{\langle u\rangle}{\langle u^3\rangle}$ و $M_R = \frac{\langle u\rangle}{\langle u^2\rangle}$ می‌باشند. با توجه به گزاره‌ی ۱.۲، می‌توان فرض کرد $S = \mathbb{F}_q + u\mathbb{F}_q$ و $R = \mathbb{F}_q + u\mathbb{F}_q + u^2\mathbb{F}_q$ که $u^2 = 0$ که $u^3 = 0$. همچنین برای سادگی ایده‌آل‌های $M_S = \langle u + \langle u^2\rangle\rangle = \langle \bar{u}\rangle$ و $M_R = \langle u + \langle u^3\rangle\rangle = \langle \bar{u}\rangle$ را به ترتیب با $M_S = \langle u\rangle$ و $M_R = \langle u\rangle$ نشان می‌دهیم. نگاشت $\mu : R \to S$ با ضابطه $\mu(a_0 + ua_1 + u^2a_2) = a_0 + ua_1$، که $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q$، یک همریختی حلقه‌ای است. فرض کنید α و β اعداد صحیح مثبت باشند. برای $d \in R$، روی مجموعه $S^\alpha \times R^\beta$ ضرب اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$d \cdot (a \mid b) = (\mu(d)a_0, \mu(d)a_1, \cdots, \mu(d)a_{\alpha-1} \mid db_0, db_1, \cdots, db_{\beta-1}).$$

مجموعه‌ی $S^\alpha \times R^\beta$ با این ضرب اسکالر یک R-مدول است.

تعریف **۲.۲**. فرض کنید α و β اعداد صحیح مثبت باشند. زیر مجموعه‌ی ناتهی C از $S^\alpha \times R^\beta$ را یک کد SR-جمعی نامند هرگاه C یک R-زیرمدول باشد.

بنا بر قضیه ۲.۱ در [۳]، ماتریس مولد کد SR-جمعی C به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_0} & R_{01} & R_{02} & 0 & 0 & uA_{01} & uA_{02} \\ 0 & uI_{k_1} & uR_{12} & 0 & 0 & 0 & u^2A_{12} \\ 0 & B_{01} & B_{02} & I_{l_0} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ 0 & 0 & uB_{12} & 0 & uI_{l_1} & uS_{12} & uS_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^2I_{l_2} & u^2S_{23} \end{bmatrix}$$

که R_{ij}ها و B_{tj}ها ماتریس‌هایی روی S، A_{ij}ها و S_{pq}ها ماتریس‌هایی روی R، I_k و I_l ماتریس‌های همانی می‌باشند. در این حالت C را یک کد از نوع $(\alpha, \beta; k_0, k_1; l_0, l_1, l_2)$ گویند. همچنین تعداد کدواژه‌های C برابر است با:

$$| C | = q^{2k_0} q^{k_1} q^{3l_0} q^{2l_1} q^{l_2}.$$

تابع $w : T \longrightarrow \mathbb{Q}$ روی حلقه‌ی T را با فرض $w(0) = 0$ یک تابع وزن گویند. فرض کنید w_S و w_R به ترتیب دو تابع وزن روی S و R باشند. تابع وزن w روی $S^\alpha \times R^\beta$ به شکل زیر تعریف می‌شود:
برای هر $(x, y) = (x_0, ..., x_{\alpha-1}, y_0, ..., y_{\beta-1}) \in S^\alpha \times R^\beta$، داریم

$$w(x, y) = w_S(x) + w_R(y) = \Sigma_{i=0}^{\alpha-1} w_S(x_i) + \Sigma_{j=0}^{\beta-1} w_R(y_j).$$

کد SR-جمعی $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ را یک کد با وزن یکسان گوییم هرگاه تمام عناصر ناصفر C وزن یکسانی داشته باشند.

۳ کدهای SR-جمعی با وزن یکسان

در دو دهه‌ی اخیر مطالعه‌ی کدها روی حلقه‌ها، توجه پژوهشگران زیادی را برانگیخته است. دلایل زیادی برای تعمیم مفاهیم کدگذاری از میدان‌ها به حلقه‌ها وجود دارد، اما یکی از دلایل مهم مطالعه کدها روی حلقه‌ها ساخت کدهای بهینه روی میدان‌ها به کمک نگاشت‌های گری است. در این بخش ساختار کدهای SR-جمعی با وزن یکسان را بررسی می‌کنیم و در نهایت به کمک نگاشت‌های گری روی میدان‌ها کلاسی از کدهای بهینه با وزن یکسان به‌دست می‌آوریم.
ابتدا روی $S^\alpha \times R^\beta$ یک تابع وزن تعریف می‌کنیم. نگاشت φ_s را روی S به شکل زیر در نظر بگیرید

$$\begin{array}{rcl} \varphi_s : S & \to & \mathbb{F}_q^2 \\ a + bu & \mapsto & (b, a + b). \end{array}$$

حال w_S با ضابطه $w_S(a + bu) = w_H(\varphi_s(a + bu))$ یک تابع وزن روی S است که در آن w_H وزن همینگ است. این تابع روی $\mathbb{F}_q$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$w_H(t) = \begin{cases} 1, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

همچنین روی R وزن همگن را در نظر می‌گیریم که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$w_{hom}(r) = \begin{cases} q(q-1), & r \in R \setminus \langle u^2 \rangle; \\ q^2, & r \in \langle u^2 \rangle \setminus \langle 0 \rangle; \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

با فرض $w_S(s) = w_H(\varphi_s(s))$ و $w_R(r) = w_{hom}(r)$، با توجه به تعریف تابع وزن در بخش قبل، روی $S^\alpha \times R^\beta$ یک تابع وزن w داریم. در ادامه کدهای SR-جمعی را نسبت به این تابع وزن مطالعه می‌کنیم.
لم زیر مجموع وزن کدواژه‌های یک کد SR-جمعی را بر اساس طول و اندازه‌ی کد به ما می‌دهد.

لم **۱.۳**. فرض کنید $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ یک کد SR-جمعی باشد آنگاه

$$\sum_{x\in C} w(x) = \frac{\mid C \mid (q-۱)}{q}(۲\alpha + q^۲\beta).$$

اثبات. کدواژه‌های C را به عنوان سطرهای یک ماتریس مانند G در نظر بگیرید. فرض کنید J_S ایده‌آل تولید شده توسط تمام عناصر ستون jام ماتریس G باشد به‌طوری‌که $۱ \leq j \leq \alpha$. با توجه به اینکه S یک حلقه زنجیر با ایده‌آل ماکسیمال $M_S = \langle u \rangle$ است، $\langle u \rangle$ و S تنها ایده‌آل‌های ناصفر S می‌باشند. بنابراین $J_S = S$ یا $J_S = \langle u \rangle$. ابتدا فرض کنید $J_S = \langle u \rangle$ باشد. چون C یک R-زیرمدول و نگاشت $\varphi : R \to S$ پوشا است، هر عنصر J_S یک عنصر از ستون jام است. بنا بر برهان [۱۰، لم۳.۶] روی حلقه‌های زنجیر، هر دو عنصر از ستون jام به تعداد مساوی $\frac{\mid C \mid}{\mid J_S \mid}$ تکرار می‌شوند. بنابراین مجموع وزن عناصر ستون jام در این حالت برابر است با

$$\frac{\mid C \mid}{\mid J_S \mid}(\sum_{x\in J_S} w_s(x)) = \frac{\mid C \mid}{\mid J_S \mid}(۲ \mid J_S \setminus \{۰\} \mid) = \frac{\mid C \mid}{q}(۲(q-۱)) = \frac{۲ \mid C \mid}{q}(q-۱).$$

اکنون فرض کنید $J_S = S$. در این حالت مشابه قسمت قبل هر عنصر از ایده‌آل J_S یک عنصر از ستون jام است. هر دو عنصر به تعداد مساوی $\frac{\mid C \mid}{\mid J_S \mid}$ تکرار می‌شوند. بنابراین مجموع وزن عناصر ستون jام برابر

$$\frac{\mid C \mid}{\mid J_S \mid}(\sum_{x\in J_S} w_s(x))$$

است. فرض کنید $a + ub$ یک عنصر از ستون jام باشد. حالت‌های زیر را داریم:

۱) $a = ۰$ و $b \neq ۰$

۲) $a \neq ۰$ و $b = ۰$

۳) $a \neq ۰$ ، $b \neq ۰$ و $a = -b$

۴) $a \neq ۰$ ، $b \neq ۰$ و $a \neq -b$

پس مجموع وزن عناصر ستون jام برابر است با

$$\begin{aligned}&\frac{\mid C \mid}{q^۲}(۲(q-۱) + q - ۱ + q - ۱ + ۲(q-۱)(q-۲))\\ &= \frac{\mid C \mid}{q^۲}(q-۱)(۲ + ۱ + ۱ + ۲(q-۲)) = \frac{۲ \mid C \mid}{q}(q-۱).\end{aligned}$$

در نتیجه مجموع وزن عناصر ستون jام برای حالتی که $۱ \leq j \leq \alpha$ است، برابر $\frac{۲ \mid C \mid}{q}(q-۱)$ است.

اکنون فرض کنید J_R ایده‌آل تولید شده توسط عناصر ستون jام ماتریس G باشد، به‌طوری‌که $\alpha + ۱ \leq j \leq \alpha + \beta$. با توجه به اینکه R حلقه زنجیر است، نتیجه می‌شود که $J_R = \langle u^۲ \rangle$، $J_R = \langle u \rangle$ یا $J_R = R = \langle ۱ \rangle$. باز بنا بر برهان [۱۰، لم۳.۶]، هر عنصر از ایده‌آل J_R یک عنصر از ستون jام است و هر دو عنصر به تعداد مساوی $\frac{|C|}{|J_R|}$ تکرار می‌شوند. ازاین‌رو مجموع وزن عناصر ستون jام برابر

$$\frac{\mid C \mid}{\mid J_R \mid}(\sum_{x\in J_R} w_R(x))$$

است. از آنجا که w_R وزن همگن است، بنا بر لم ۵.۶ از [۱۰]، داریم $\sum_{x\in J_R} w_R(x) = q(q-۱) \mid J_R \mid$. ازاین‌رو

$$\begin{aligned}\frac{\mid C \mid}{\mid J_R \mid}(\sum_{x\in J_R} w_R(x)) &= \frac{\mid C \mid}{\mid J_R \mid}(q(q-۱) \mid J_R \mid)\\ &= \frac{q^۲ \mid C \mid}{q}(q-۱).\end{aligned}$$

در نتیجه مجموع وزن عناصر C برابر

$$\sum_{x\in C} w(x) = \sum_{۱\le j\le \alpha} \frac{۲\mid C\mid (q-۱)}{q} + \sum_{\alpha+۱\le j\le \alpha+\beta} \frac{q^۲\mid C\mid (q-۱)}{q}$$
$$= \frac{\mid C\mid (q-۱)}{q}(۲\alpha + q^۲\beta)$$

□

قضیه‌ی زیر ارتباط طول، اندازه و مینیمم وزن کدهای SR-جمعی را نشان می‌دهد.

قضیه **۲.۳**. اگر $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ یک کد با وزن یکسان m باشد. آنگاه عدد صحیح λ موجود است که $m = \frac{\lambda\mid C\mid}{q}$ و

$$۲\alpha + q^۲\beta = \lambda(\frac{\mid C\mid -۱}{q-۱})$$

اثبات. بنا بر لم قبل داریم:

$$\sum_{c\in C} w(c)) = \frac{\mid C\mid (q-۱)}{q}(۲\alpha + q^۲\beta).$$

از طرفی مجموع وزن همه‌ی کدواژه‌ها برابر $m(\mid C\mid -۱)$ است. ازاین‌رو

$$\frac{\mid C\mid (q-۱)}{q}(۲\alpha + q^۲\beta) = m(\mid C\mid -۱).$$

بنا بر گزاره ۲۰۵ از [۴]، داریم $\mid C\mid = q^t$ به ازای یک $t > ۰$. پس

$$\gcd\left(\frac{\mid C\mid}{q}, \mid C\mid -۱\right) = ۱.$$

بنابراین عدد صحیح λ وجود دارد که

$$m = \frac{\lambda\mid C\mid}{q}.$$

در نتیجه

$$(q-۱)(۲\alpha + q^۲\beta) = \lambda(\mid C\mid -۱).$$

□

نتیجه **۳.۳**. فرض کنید $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ یک کد با وزن یکسان m باشد. اگر q زوج باشد، آنگاه m نیز زوج است.

اثبات. فرض کنیم m فرد باشد. بنا بر قضیه قبل $m = \lambda\frac{\mid C\mid}{q}$. چون q زوج و m فرد است، پس λ باید فرد باشد و $\frac{\mid C\mid}{q} = ۱$. پس

$$۲\alpha + q^۲\beta = \frac{\lambda(\mid C\mid -۱)}{q-۱} = \lambda = m,$$

اما $۲\alpha + q^۲\beta$ یک عدد زوج است که با فرد بودن m در تناقض است. بنابراین m زوج است. □

اکنون به کمک نگاشت‌های گری روی میدان‌ها کلاسی از کدهای بهینه به‌دست می‌آوریم. یک نگاشت گری را می‌توانیم به شکل زیر تعریف کنیم.

تعریف **۴.۳**. فرض کنید T یک حلقه‌ی موضعی با میدان خارج قسمتی $\mathbb{F}_q$ و تابع وزن w باشد. همچنین $n \in \mathbb{N}$ عددی صحیح و مثبت باشد. نگاشت $\phi : T \to \mathbb{F}_q^n$ با ویژگی‌های زیر را یک نگاشت گری گوییم:

الف) ϕ یک‌به‌یک باشد؛

ب) برای هر $x, y \in T$، $w(x-y) = w_H(\phi(x) - \phi(y))$ که در آن w_H وزن همینگ روی میدان $\mathbb{F}_q$ است. در این حالت گوییم نگاشت ϕ یک ایزومتری از (T, d_w) به $(\mathbb{F}_q, d_H)$ است.

از آنجا که R یک حلقه‌ی زنجیر است، بنا بر گزاره ۲۰۳ از [۴]، یک ایزومتری از (R, d_{hom}) به $(F_q^{q^۲}, d_H)$ وجود دارد که آن را با $\varphi_r : R \to \mathbb{F}_q^{q^۲}$ نشان می‌دهیم. همچنین روی S نگاشت φ_s در ابتدای بخش را در نظر بگیرید. به‌راحتی می‌توان دید که φ_s یک تبدیل خطی یک‌به‌یک است. با توجه به تعریف تابع وزن w_S روی S، نگاشت φ_s یک ایزومتری از (S, d_{w_S}) به $(\mathbb{F}_q^۲, d_H)$ است. این نگاشت‌ها به‌طور طبیعی روی S^α و R^β تعمیم داده می‌شود و ازاین‌رو نگاشت یک‌به‌یک زیر را داریم

$$\begin{aligned} \phi : S^\alpha \times R^\beta &\to F_q^{۲\alpha+q^۲\beta} \\ (s_۰, \cdots, s_{\alpha-۱}, r_۰, \cdots, r_{\beta-۱}) &\mapsto (\varphi_s(s_۰), \cdots, \varphi_s(s_{\alpha-۱}), \varphi_r(r_۰), \cdots, \varphi_r(r_{\beta-۱})). \end{aligned}$$

با توجه به تعریف تابع وزن روی $S^\alpha \times R^\beta$، نگاشت ϕ یک ایزومتری از $(S^\alpha \times R^\beta, d_w)$ به $(F_q^{۲\alpha+q^۲\beta}, d_H)$ است. پس اگر $C \subseteq S^\alpha \times R^\beta$ یک کد SR-جمعی باشد، آنگاه $\phi(C) \subseteq F_q^{۲\alpha+q^۲\beta}$ یک کد خطی روی F_q به طول $۲\alpha + q^۲\beta$ است.
لم زیر کران گریسمر برای کدهای خطی را معرفی می‌کند.

لم ۵.۳. فرض کنید $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ یک کد خطی روی میدان $\mathbb{F}_q$ و C یک $[n, k, d_H]$ کد خطی باشد، به‌طوری‌که $k \geq ۱$، آنگاه

$$n \geq \sum_{i=۰}^{k-۱} \lceil \frac{d_H}{q^i} \rceil.$$

اگر در یک کد خطی تساوی اتفاق بیفتد، آنگاه C را یک کد بهینه گویند.

اثبات. قضیه ۲۰۷۰۴ از مرجع [۷] را ببینید. □

تعریف **۶.۳.** در لم بالا، اگر تساوی زیر اتفاق بیفتد آنگاه C را یک کد بهینه گویند

$$n = \sum_{i=۰}^{k-۱} \lceil \frac{d_H}{q^i} \rceil.$$

قضیه **۷.۳.** فرض کنید $C \subseteq S^{q+۱} \times R^{q+۱}$ یک کد SR-جمعی با ماتریس مولد زیر باشد

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u & ۰ & \underline{b} & u^۲ & ۰ & \underline{b'} \\ ۰ & u & \underline{d} & ۰ & u^۲ & \underline{d'} \end{array} \right)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \underbrace{(u, u, \cdots, u)}_{q-۱ \text{ بار}} \\ \underline{b'} &= \underbrace{(u^۲, u^۲, \cdots, u^۲)}_{q-۱ \text{ بار}} \\ \underline{d} &= (t_۱u, t_۲u, \cdots, t_{q-۱}u) \\ \underline{d'} &= (t_۱u^۲, t_۲u^۲, \cdots, t_{q-۱}u^۲) \end{aligned}$$

و $\mathbb{F}_q = ۰, t_۱, \cdots, t_{q-۱}$. دراین‌صورت C یک کد با وزن یکسان $m = q^۳ + ۲q$ است. همچنین $\phi(C)$ یک کد بهینه با پارامترهای $[q^۳ + q^۲ + ۲q + ۲, ۲, q^۳ + ۲q]$ است.

اثبات. فرض کنید c یک کدواژه C باشد، دراین‌صورت با توجه به اینکه C یک کد SR-جمعی است، عناصر $i_۰ + i_۱u + i_۲u^۲$ و $j_۰ + j_۱u + j_۲u^۲$ در R موجود است که

$$\begin{aligned} c &= (i_۰ + i_۱u + i_۲u^۲) \left(\begin{array}{ccc|ccc} u & ۰ & \underline{b} & u^۲ & ۰ & \underline{b'} \end{array} \right) + (j_۰ + j_۱u + j_۲u^۲) \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۰ & u & \underline{d} & ۰ & u^۲ & \underline{d'} \end{array} \right) \\ &= i_۰ \left(\begin{array}{ccc|ccc} u & ۰ & \underline{b} & u^۲ & ۰ & \underline{b'} \end{array} \right) + j_۰ \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۰ & u & \underline{d} & ۰ & u^۲ & \underline{d'} \end{array} \right) \\ &= (i_۰u, j_۰u, i_۰\underline{b} + j_۰\underline{d} | i_۰u^۲, j_۰u^۲, i_۰\underline{b'} + j_۰\underline{d'}) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$w(C) = w_S(i_\circ u) + w_S(j_\circ u) + w_S(i_\circ \underline{b} + j_\circ \underline{d}) + w_R(i_\circ u^۲) + w_R(j_\circ u^۲) + w_R(i_\circ \underline{b}' + j_\circ \underline{d}')$$

اکنون اگر $i, j \neq \circ$ باشند، آنگاه

$$w(C) = ۲ + ۲ + (q-۲)۲ + q^۲ + q^۲ + (q-۲)q^۲ = q^۳ + ۲q$$

توجه داشته باشید که در عبارت‌های $i_\circ \underline{b} + j_\circ \underline{d}$ و $i_\circ \underline{b}' + j_\circ \underline{d}'$ فقط‌وفقط یک مؤلفه صفر می‌شود. همچنین اگر $i_\circ = \circ$ یا $j_\circ = \circ$ باشد، آنگاه به‌راحتی می‌توان دید که $w(C) = q^۳ + ۲q$. از طرفی طول $\phi(C)$ برابر است با

$$۲\alpha + q^۲\beta = ۲(q+۱) + q^۲(q+۱) = q^۳ + q^۲ + ۲q + ۲.$$

در نتیجه $\phi(C)$ یک کد خطی روی F_q با پارامترهای $[q^۳ + q^۲ + ۲q + ۲, ۲, q^۳ + ۲q]$ است. اکنون بنا بر تعریف ۶.۳، از تساوی

$$n = q^۳ + q^۲ + ۲q + ۲ = \lceil \frac{q^۳ + ۲q}{۱} \rceil + \lceil \frac{q^۳ + ۲q}{q} \rceil$$

می‌توان دید که $\phi(C)$ یک کد بهینه است. □

مثال **۸.۳**. فرض کنید $S = \mathbb{F}_۲ + u\mathbb{F}_۲$ و $R = \mathbb{F}_۲ + u\mathbb{F}_۲ + u^۲\mathbb{F}_۲$ باشد. اگر $C \subseteq S^۳ \times R^۳$ یک کد SR-جمعی با ماتریس مولد زیر باشد

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u & \circ & u & u^۲ & \circ & u^۲ \\ \circ & u & u & \circ & u^۲ & u^۲ \end{array} \right),$$

بنا بر قضیه‌ی قبل C یک کد با وزن یکسان $m = ۱۲$ است. همچنین $\phi(C)$ یک کد بهینه با پارامترهای $[۱۸, ۲, ۱۲]$ است. همچنین بنا بر [۴]، نگاشت φ_r به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{array}{rcl} \varphi_r : R & \to & \mathbb{F}_۲^۴ \\ a + bu + cu^۲ & \mapsto & (c, c+a, c+b, c+a+b). \end{array}$$

پس ماتریس مولد کد خطی $\phi(C) \subseteq \mathbb{F}_۲^{۱۸}$ به‌شکل

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} x & x' & x & y & y' & y \\ x' & x & x & y' & y & y \end{array} \right)$$

است، که در آن $x = (۱, ۱)$، $x' = (\circ, \circ)$، $y = (۱, ۱, ۱, ۱)$ و $y' = (\circ, \circ, \circ, \circ)$ است.

۴ نتیجه‌گیری

فرض کنید $S = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^۲ \rangle$ و $R = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^۳ \rangle$ باشد. به ازای اعداد صحیح و مثبت α و β، زیر مجموعه‌ی ناتهی C از $S^\alpha \times R^\beta$ را یک کد SR-جمعی نامند هرگاه C یک R-زیر مدول باشد. در این مقاله روی $S^\alpha \times R^\beta$ یک تابع وزن تعریف کردیم و ساختار کدهای SR-جمعی با وزن یکسان را نسبت به این تابع وزن بررسی کردیم. روابطی که بین طول، اندازه و وزن کد وجود دارد را به‌دست آوردیم. بر اساس تابع وزن تعریف شده، یک نگاشت گری از $S^\alpha \times R^\beta$ به $F_q^{۲\alpha + q^۲\beta}$ ساخته شد که به کمک آن یک کلاس از کدهای بهینه روی میدان F_q به طول $q^۳ + q^۲ + ۲q + ۲$ ارائه گردید.

فهرست منابع

[۱] س. باقری، ر. محمدی حصاری، ح. رضایی، ر. رضایی، ک. سامعی، کدهای دوری اریب $\mathbb{F}_{p^m}(\mathbb{F}_{p^m}+u\mathbb{F}_{p^m})$-جمعی از طول $2p^s$، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۴۰۰. https://doi:10.22055/JAMM.2021.36684.1900

[2] M. Atiyah, *Introduction to commutative algebra*, volume 361. Westview press, 1994. https://doi.org/10.1201/9780429493638

[3] I. Aydogdu, Codes over $\frac{\mathbb{Z}_p[u]}{\langle u^r\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_p[u]}{\langle u^s\rangle}$, *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, **32** (2019), 39–51. https://doi.org/10.13069/jacodesmath.514339

[4] M. Bajalan, R. Rezaei, K. Samei, On codes over product of finite chain rings, *Sigma J Eng Nat Sci*, **41(1)**(2023), 145–155. DOI: 10.14744/sigma.2023.00014

[5] C. Carlet, One-weight $\mathbb{Z}_4$-linear codes, *Coding Theory, Cryptography and Related Areas* (J. Buchmann, T. Høholdt, H. Stichtenoth, and H. Tapia-Recillas, eds.), Springer, Berlin, (2000), 57 - 72. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57189-3_5

[6] Calıskan, Basri, On one-weight and ACD codes in $\mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_4^s \times \mathbb{Z}_8^t$, *Filomat*, **35(2)** (2021), 871-882. https://doi.org/10.2298/FIL2103871C

[7] W. C. Huffman and V. Pless, Fundamentals of Error-Correcting codes, *Cambridge University Press*, Cambridge, (2003). doi: https://doi.org/10.1017/CBO9780511807077

[8] S.T. Dougherty, H. Liu, L. Yu, One-weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ additive codes, *AAECC*, **27** (2016), 123–138. doi: https://doi.org/10.1007/s00200-015-0273-4

[9] M. Shi, Optimal p-ary codes from one-weight linear codes over $\mathbb{Z}_{p^m}$, *Chin. J. Electron.*, **22(4)** (2013), 799–802. doi: 10.23919/CJE.2013.10285829

[10] S. Mahmoudi, K. Samei, SR-additive codes, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **56** (2019),1235–1255. https://doi.org/10.4134/BKMS.b180995

One weight SR-additive codes

Ali eisapour Khasadan[1,2] [4] and Shahram Mehry[1] [5] and Saadoun Mahmoudi[3] [6]

(1) Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, Malayer University, Malayer, Iran
(2) Department of Mathematics, Basic Sciences Center, Khatam al-Anbia Air Defense University, Tehran, Iran
(3) Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

Communicated by: Mehrdad Namdari

Received: 1 September 2023 Accepted: 10 June 2025

Abstract: Let q be a power of a prime number, $S = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^2\rangle$ and $R = \mathbb{F}_q[u]/\langle u^2\rangle$. For positive integers α and β, a nonempty subset C of $S^\alpha \times R^\beta$ is called an SR-additive code if C is an R-submodule of $S^\alpha \times R^\beta$. In this paper, we study one weight SR-additive codes. More precisely, we define a weight function on this class of codes. The relations between the length, size and weight of the code are presented. At the end, we define a Gray map over these codes. By using the defined Gray map, a subclass of optimal codes over $\mathbb{F}_q$ is constructed.

Keywords: One weight additive codes, SR-additive codes,Gray maps.

[4] *ali.esapour@stu.malayeru.ac.ir:(A. Isapour-Khasadan)*
[5] *shmehry@malayeru.ac.ir, shmehry@gmsil.com:(S. Mehry)*
[6] Corresponding author
mahmoudi.math89@yahoo.com: (S. Mahmoudi)